電位

１．電気の世界の山の高さ

電気力線のイメージで電場を考えると、正負の電荷が引き合う場合は理解しやすいが、同符号の電荷が反発するのに対してはイメージをつかみにくい。そこで、電気の世界にも山や谷があると考えて、その高低差で電荷が動くと考えてみる。

そうすると、山の高さが問題になるので、まず、「地球上の山の高さとは何か」から考えてみよう。

(1) 地上の山の高さ

標高200m程度の山を考えてみる。この山の登山は楽ではない。ところが、富士山の標高は3776mである。富士山に登るのとこの山に登るのとどちらがよりしんどいであろうか？誰でも富士山と答えるであろう。富士山に登ったことがない人でも、標高200mの山より富士山に登るほうがしんどいことが分かる。それは、標高を見て判断しているからである。標高が高いほど登山が苦しい山になる。

それでは、エベレスト山（標高8848m）と富士山ではどちらがしんどいか？と問われると、誰でも「エベレスト」と答える。やはりエベレスト山の方が標高が高いからである。

それでは、「オリンポス山（標高21000m）とエベレストではどちらがしんどいか」

この問いに対してどう答えるか。

「え、オリンポスと答えたいが、そんな山あったっけ」

となるはずである。世界最高峰といわれているのがエベレストである。それより高い山があるはずがない。実はこの山は火星最高峰である。火星表面の重力加速度は地球の約$\frac{1}{3}$である。重力加速度が$\frac{1}{3}$ということは火星表面に立ったときの自分の体重が$\frac{1}{3}$になるということである。

それでは、あらためて、「エベレストとオリンポスはどちらに登るのがよりしんどいか」

もちろん、火星にも空気があって地球と同じように登山できると仮定しての話である。

この場合、多くの人はエベレストと答える。オリンポスの標高21000mに直感で重力の$\frac{1}{3}$をかけて7000となり、エベレストの方が高くなるからである。

本当にその考え方は正しいのであろうか。標高は登山の苦しさを表わしているが、登山の苦しさとは、登山する人の仕事、すなわち、エネルギー消費量の大きさを表わしている。質量m[kg]の人が高さhの山に登山する場合、重力mgに逆らう力mgで上にh上がる仕事なので、その仕事はmghである。これは、山頂での重力による位置エネルギーと同じである。よって、質量mの人が高さhの山に登る仕事はmghで重力による位置エネルギーと等しいといえる。。

このmghを登山の苦しさを基準とした山の高さと決めてよいのか？答えは否である。それは、人によって質量mが異なるからである。人によって山の高さが異なると話しにならない。誰から見ても同じ高さにするには、mをある値に固定すればよいことになる。基準値であるから当然その値は1kgである。mghの$m=1$を代入すればghとなり、先ほどのオリンポスとエベレストの登りやすさを比較したとき、重力加速度と高さをかけたのは理

論的に正しいことになる。
　ここまでを整理すると、登山の苦しさを山の高さとするならば、ghで表わせばよいことになる。表現を変えると次のようになる。

　　「1kgの物体をゆっくりと運ぶ仕事。」

もっとも、地球上の標高を考えるとき、重力加速度をいちいちかけることはない。これは、地球上すべての位置で重力加速度の大きさがほぼ一定であるためである。遠い将来、宇宙旅行が自在に行なえるようになって、月や火星の山に登山するような時代が来れば、山の高さが上のように定義されるかもしれない。

⑵　電気の世界の山の高さ

　重力の世界における山の高さは、「1kgの物体を運ぶ仕事が山の高さである。」と表わせばよいことが分かった。これをまったく同じイメージで、電気の世界の山の高さを考えることにする。
　質量「1kg」は電気の世界では「＋1C」になり、「物体」は「電荷」であるから、電気の世界の山の高さに相当するものは、次のようなものになる。

「＋1Cの電荷をゆっくりと運ぶ仕事」

これを、**電位**という。単位はV（ボルト）である。
　これが電気の世界の山の高さであると定義する。重力の世界の山の高さと最大限同じように考えて定義しているので基本的考え方、使い方は全く同じである。電位で分からなくなったら重力の世界の山の高さで考えればよいのである。

⑶　アースについて

　地上の山の高さは海面を基準にした高さである。これは、そこが海面だったら問答無用で0mとするという意味である。電気の世界も問答無用で0にする電位の基準というものが必要である。それがアースである。
　電気製品は漏電を避けるために、電気製品から導線を引き出し、それを地上につなぐということを行なう。これをアースという。基本的にはすべての電気製品はアースしなければならないのであるが、アースするのはまれである。実は、アースを忘れることを防ぐためにコンセントの中でアースしてあるのである。コンセントの二つの穴の長さを比較すれば片方の長さがわずかに長いことに気付く、これは、長いほうが、コンセントの中でアースされているためである。海外に行くとアース線が独立しており、コンセントに三つの穴があいていることが多い。アースしてあれば、その位置の電位を問答無用で0とする。

「アースしてあると、そこの電位は0である。」

　アースの意味はもう一つある。正電荷か負電荷のどちらかが多い場合、電気力線が外部に漏れるために、外部から電荷を引き寄せる。そのために、アースしてあれば、必ず装置全体の正電荷の数と負電荷の数は同数となる。

「アースしてあると、正電荷と負電荷は同数である。」

アースの意味

①　電位を0とする。

②　正電荷と負電荷を同数にする。

⑷　電圧について

富士山に登山する場合も、海面から登山するのはまれで、多くの人は5合目（標高2500ｍ）からの登山である。実は本当の登山のしんどさは標高でなくて標高差なのである。標高と標高差は海面からの高さと、適当な２か所の高さの差の違いである。電位の場合も実際の仕事は電位でなくて２点間の電位の差である。これを**電圧（単位V）**という。電位と電圧の違いも標高と標高差の違いとまったく同じで、アースからの仕事を電位、適当な二か所間の仕事を電圧というのである。

２．電荷を運ぶ仕事

⑴　電荷を運ぶ仕事

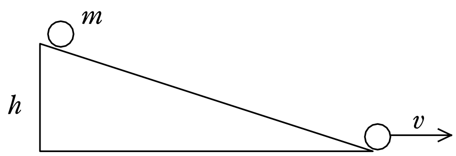
電圧の定義は「＋1Cをゆっくりと運ぶ仕事」である。これは、電位V[V]とは＋1Cを運ぶ仕事がV[J]であることを意味している。それでは、＋q[C]を運ぶ仕事はいくらになるだろうか。運ぶ電気量がq倍になるのであるから、運ぶ仕事もq倍になる。よって、＋q[C]を運ぶ仕事はqVといえる。

「電圧V[V]の2点間をq[C]の電荷を運ぶために必要な仕事Wは、$W=qV$で表わされる。」

$W=qV$の式は重力の世界ではどの公式に該当するのだろうか。電気量qは重力の世界では質量mに該当し、電圧Vは重力の世界での標高差ghに該当する。よって、$W=qV$は重力の世界の$W=mgh$に該当する。この式は重力による位置エネルギーの式なので、qVは電気力による位置エネルギーを意味していることになる。

それでは二つの公式の使い方を比較してみよう。

まず、mghの式を使う例を考えてみる。質量mの物体を高さhの斜面上に置き、静かに手を離した時、この物体が最下点に達した時の速さを求める場合である。



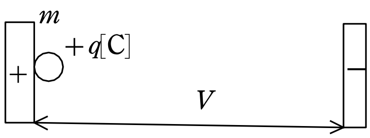
この場合、重力による位置エネルギーが最下点での運動エネルギーにかわるので、

$$\frac{1}{2}mv^2=mgh$$

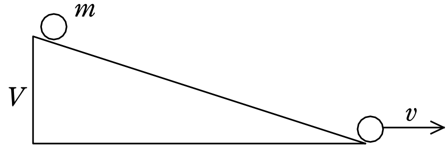
の方程式で解くことができる。これはエネルギー保存則である。

これとまったく同じ電気の世界の例は

極板間に電圧Vの電圧をかけ正極に質量mの物体に＋q[C]の電荷を帯電させたところ、負極に向けて加速した。負極に達した瞬間のこの電荷の速度を求める問題である。



正極が標高が高く、負極が標高が低いと考える。その標高差が電圧Vである。



正極での位置エネルギーがqVで、負極に達した瞬間すべて運動エネルギーに変わるので、

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV$$

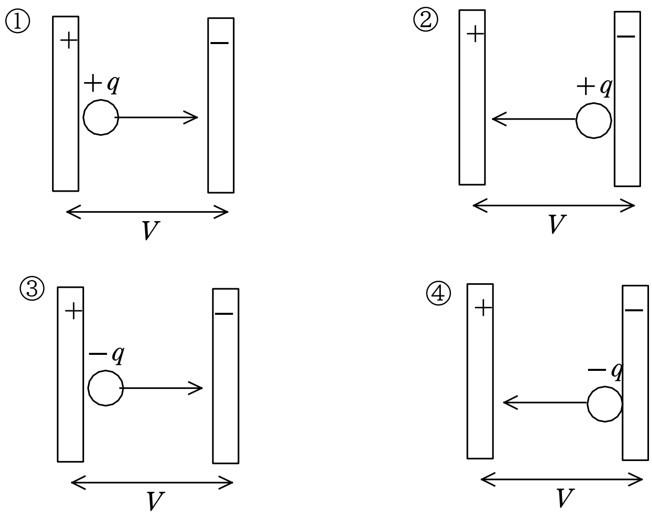
の方程式で解くことができる。

この例を見ても$W=mgh$と$W=qV$は使い方がほぼ同じであることが分かる。

(2) 仕事の符号

高校物理において仕事の符号ほど厄介なものはない。仕事の符号に関しては常に細心の注意が必要である。次の4パターンの電荷を運ぶ仕事を確認してみよう。

下の①は正電荷を正曲から負極に運ぶ場合、②は正電荷を負極から正極に運ぶ場合、③は負電荷を正極から負極に運ぶ場合、④は負電荷を負極から正極に運ぶ場合である。何れも電気量の絶対値はqで、両極間の電圧はVであり、仕事の絶対値はqVである。問題は正の仕事か負の仕事かである。



仕事の符号は力の向きと動かす方向が同じなら正、逆なら負である。判断基準は単純であるが、実際問題はそんなに単純ではない。

まず、動かす方向は誰でも正しく指摘できるであろう。①右、②左、③右、④左である。問題は力のはたらく方向である。電荷は逆符号の電極に向けて力がはたらく、よって、力のはたらく向きは①右、②右、③左、④左である。そうすると、力と動かす方向の関係は①同方向　②逆方向　③逆方向　④同方向　となり、仕事は、①$+qV$、②$-qV$、③$-qV$、④$+qV$となるべきかと思うが、実はこれはすべて逆となる。正解は

①$-qV$、②$+qV$、③$+qV$、④$-qV$

である。なぜ逆かと言えば、力が違うのである。電位は「+1Cの電荷をゆっくりと運ぶ仕事」である。

①の場合…手を離せば一気に負極へ飛んでいくので、ゆっくり運ぶに該当しない。ゆっくりと運ぶには逆向きに電気力と同じ力を加える必要がある。よって、①の運ぶ力は左向きなので、力と動かす方向が逆になり、この仕事は負である。

②の場合…この場合、力が右向きにかかっているので左に運ぶことができない。左に運ぶ

ためには左に力を加えなければならない。ゆっくりと運ぶ力は左向きなので、力と運ぶ方向が同じになり、この場合正の仕事である。

③④は同様に考えるとよい。

表にまとめると

	①	②	③	④
運ぶ方向	右	左	右	左
クーロン力の方向	右	右	左	左
運ぶ力の方向	左	左	右	右
仕事	$-qV$	$+qV$	$+qV$	$-qV$

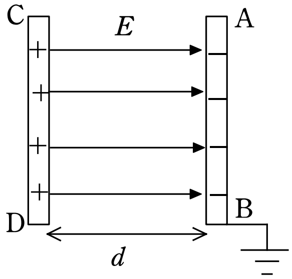
「ゆっくりと運ぶ仕事とは、はたらいている力と逆向きで同じ大きさの力がする仕事である。」

これは位置エネルギーの定義と同じである。電位は位置エネルギーの一種なので、位置エネルギーの定義と同じことになるのである。

３． 電位について

⑴電位の計算

金属板ABとCDを平行に設置し、金属板CDを正に帯電させ、金属板ABはアースした。この場合の金属板CDの電位を考えてみる。まず、電位の定義を再確認してみる。

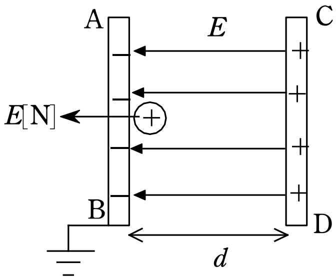


電位の定義は+1Cをゆっくりと運ぶ仕事である。電位を考えるときにmghを考慮したことで分かるように、この仕事は位置エネルギーの一種である。よって、位置エネルギーの定義に沿って考えればよい。位置エネルギーの定義は「外力が等しい力で基準の位置から運ぶ仕事」である。これより、電位の厳密な定義は

「外力が+1Cを等しい力で基準の位置から運ぶ仕事」

となる。

この定義の通りに金属板CDの電位を計算してみよう。まず、基準の位置に+1Cの電荷を置く、この電荷には電場E[N/C]により、クーロン力がはたらく。電場の定義は+1Cにはたらく力であるから、この電荷にはE[N]の力がはたらいていることになる。電荷を運ぶのはこの力ではない。外力である。この力と等しい外力を加えて、その外力がする仕事が電位となる。



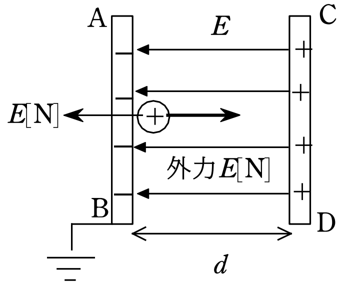
クーロン力がE[N]であるから、外力もE[N]である。電荷にクーロン力と逆向きにE[N]の力を加えて

その仕事を計算すればよい。

外力がE[N]で、運ぶ距離がd[m]であるから、その力がした仕事はEd[J]となる。これが、金属板CDの電位Ed[V]となる。よって、電位をVとすると、

$$V=Ed$$

の関係が成立する。



(2)　電場の再定義

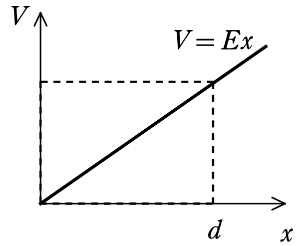
変形すれば、$E=\dfrac{V}{d}$　である。

これより、電場Eの単位は[V/m]でも良いことになる。

「電場の単位は[V/m]、[N/C]のどちらでも良い。」

電場を考えるときは$F=qE$よりも、$V=Ed$を使う場合の方が多い、そのため、電場の単位も[N/C]よりも、[V/m]の方が一般的である。

上の図において、極板ABからの距離xと、電位Vとの関係をグラフに表わせば、右図のようになる。



電場の強さEはこのグラフにおける傾きになっている。よって、電場の定義を次のようにすることもできる。

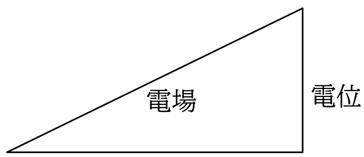
「電場とは電位の傾きを表わす。」

言い換えると

「電場とは1mあたりの電圧」

(3)　電位と電場の違い

電位とは標高に該当し、電場とは電位の傾きを表している。右図で考えると、高さが電位で傾きが電場である。



電位が低くなると、傾きも低くなり、電位が高くなると電場も高くなる。

＜例題＞　空気絶縁の強さは3×10^{6}V/mである。指を金属に近づけたとき、0.5cmで静電気が飛んだ。この人は何Vに帯電していたのであろうか。

＜解説＞

$V=Ed=3\times10^{6}\times0.5\times10^{-2}=1.5\times10^{4}\mathrm{V}$

(4)　電場のまとめ

電場の定義は3つある。

①　+1Cの電荷にはたらく力　$F=qE$

②　電気力線密度　$E=\dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}$

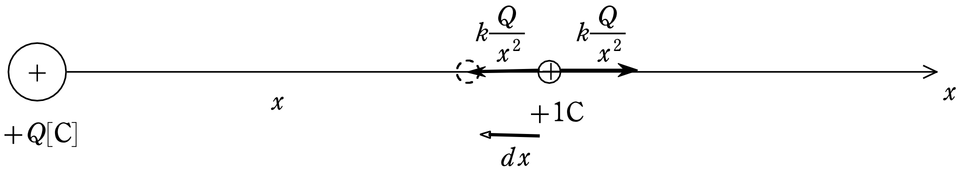
③　電位の傾き（1mあたりの電圧）　$V=Ed$

正式には①が定義であるが、3つあると思っていてよい。この3つの定義は同じものであるという認識のもとで問題を解く必要があるが、なかなか同じものであると思えないので電場の問題が難しくなる。

４． 点電荷の周りの電位

⑴ 点電荷の周りの電位

$+Q$[C]の点電荷の周りの電位はどうなっているのであろうか。計算してみよう。
まず、電位の基準であるが、通常はアースした場所となる。しかし、点電荷は空中にあり、その周辺に地上はない。さらに点電荷に表面はない。このような場合、無限遠を位置エネルギーの基準とする。無限遠を基準とした場合、電荷が複数あっても互いの周辺の電位を同じ基準で考えることができて大変便利となる。



電位は「+1Cを運ぶ仕事」であるから、この場合、外力が無限遠から目的の位置（点電荷からrの位置）に等しい力で運ぶ仕事を求めればよい。

仕事のところで述べたとおり、$W=Fs$の公式はF=一定が原則である。この場合、+1Cの電荷が点電荷に近づけば近づくほどクーロン力が大きくなり、F=一定とはいえない。このときは、少し（dx）だけ動かしたときの仕事を計算し、それを、スタート位置から目的地まですべて合計（積分）するとよい。

今、点電荷からx離れた位置にある+1Cの電荷をdxだけ点電荷に近づける場合の仕事を考えてみよう。dxという微小な距離だけ動かす間にクーロン力の大きさは一定であると考えてよく、$W=Fs$の公式が使える。この場合のクーロン力は外向きに$k\dfrac{Q}{x^2}$である。

（クーロンの法則$F=k\dfrac{Qq}{r^2}$に$q=+1$Cを代入すると良い。）

位置エネルギーは、クーロン力と等しい外力がする仕事であるから、外力は内向きに$k\dfrac{Q}{x^2}$である。よって、このときの仕事dWは

$$dW=-k\frac{Q}{x^2}dx$$

ここで、外力の向きと動かす方向が同じ方向であるので、仕事は正である。しかし、dxがxの減少方向なので、$dx<0$となる。よって、$-k\dfrac{Q}{x^2}dx$と式の前に$-$をつけなければ仕事が正の値にならない。これを無限大からrまですべて合計（積分）すると、全体の仕事量すなわち、電位が求められる。

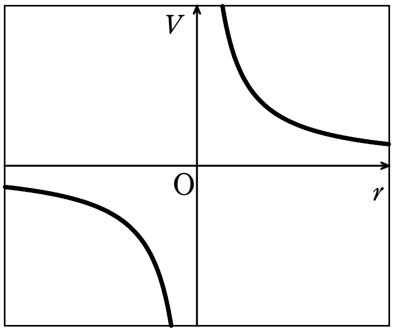
$$W=\int_{\infty}^{r}\left(-k\frac{Q}{x^2}\right)dx=\frac{kQ}{r}$$

となる。

電位をVとすると、これは、

$$V=\frac{kQ}{r}$$

となる。このグラフは右図のようになるのであるが、このグラフは$r<0$の領域で、$V<0$になっていることに注意しなければならない。＋電荷があるときの周辺は＋の電位になっているはずなので、上の公式の定義域は$r>0$ということになる。



$r<0$のときは、電荷を$-\infty$から運ばなければならない。逆向きに運ぶので符号も逆になる。よって、

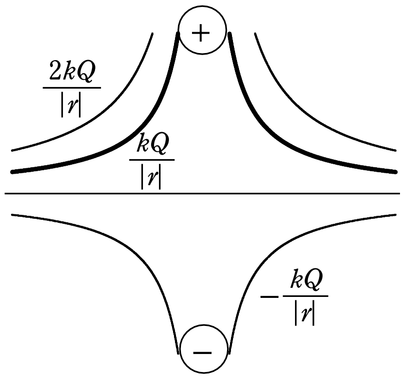
$$V=-\frac{kQ}{r}$$

まとめると

$$V=\frac{kQ}{|r|}$$

電気量が2倍になると　$V_2=\dfrac{2kQ}{|r|}$

負電荷なら　$V_3=-\dfrac{kQ}{|r|}$

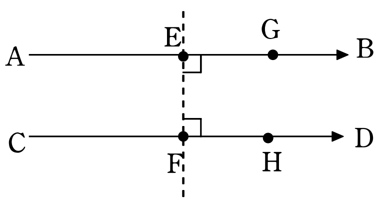


これをグラフにしたのが右図である。正電荷は山、負電荷は谷のイメージのとおりである。ただ、地上に山は山頂があるが、このグラフの山の高さは無限大となる。山頂部に正電荷、谷底に負電荷を描きこむと、まさにイメージが出来上がる。電気量が多くなると電位は2倍になっているが、グラフのイメージで見ると山が高くなるというよりも太くなると考えた方がいいようである。

５． 電気力線と電位との関係

電気力線は＋1Cの電荷に作用する力の方向、すなわち、電荷が動く方向を示しており、電位は、その位置での電気的な高さを表しているといえる。ここで、両者の関係を明確にしてみよう。

今、平行な電気力線ABとCDがあるとする、双方の電気力線に垂直な面を考え、その交点をE、Fとする。そして、電気力線ABに沿った位置に点Gをとり、電気力線CDに沿った位置に点Hをとる。

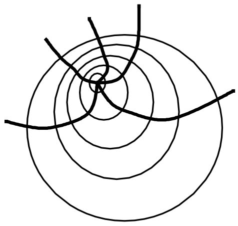


このとき、点Gにある＋1Cの点電荷を動かす場合の仕事を考える。G→Eと動かすときはクーロン力がBの方向に作用するために、外力はAの方向に加えて、Aの方向に動かすことになる。よって、外力のする仕事は正であるので、Eの電位の方が高くなる。E→Fの方向に動かすときは、クーロン力と等しい力はAの方向で動かす方向がFの方向となり、

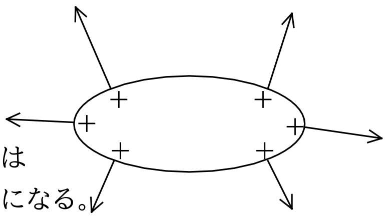
動かす方向と力の方向が垂直になるために、EF間を動かす仕事は0である。このことは、EとFは電位差がない、すなわち、同電位であることを意味している。この線EFを**等電位線**という。面の場合は**等電位面**という

Fから、電気力線に沿ってHの方向に動かすときは、外力はCの方向で、動かす方向はHの方向であるから、力の方向と動かす方向が逆である。つまり、外力のした仕事は負である。よって、Hの電位がFより低い。これをまとめると次のようになる。

「電気力線の方向に沿うと電位が下がり、逆らって動くと電位が上がる。等電位線と電気力線は直交する。」



右図において楕円を等電位線とするとき、その等電位線と直角になるように電気力線を引くと図のようになる。等電位線の狭まったところは、電位の傾きが大きいところすなわち電場の強いところである。電気力線が曲がっていくので、その場所の電気力線密度が高くなっている。すなわち、電場が強いことを意味している。



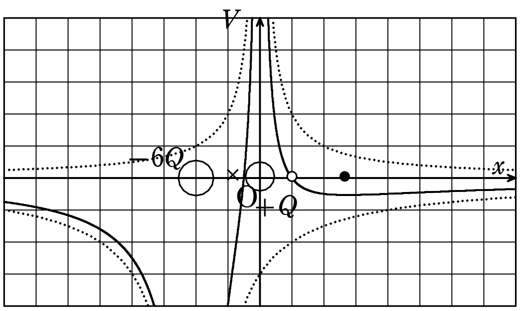
金属表面の電位と電気力線

電場内に金属を入れた場合、静電誘導が起こる。静電誘導が起こってしまえば金属表面の電荷は動かない。電荷が動かないのは同電位であるからで、金属表面はすべて同電位になる。金属内部も電荷が動かないのですべて同電位である。
電気力線は等電位線と垂直になり、金属表面は等電位線であるから、金属表面に垂直に電気力線が出ることになる。

６． 電位の例題

＜例題＞

座標A(0,0)に$+2Q$、座標B($-2a$,0)に$-6Q$の電荷があるとき、x軸正方向に十分に離れた位置に質量m、$+q$[C]の電荷を置いた。この電荷はx軸上のみ動くものとして、この電荷が最も速くなる時のx座標、及びその時の速さ、原点に最も接近した時のx座標を求めよ。



この問題における電位のグラフを右に描いた。破線はそれぞれの電荷による電位で、実線はそれを合成したものである。この実線のグラフの面を物体が転がるというイメージで問題を解くとよい。

- 最高速度になる位置の計算

重力の世界で最高速度になるのは、最も低い位置である。電気の世界も同じで、グラフの極小になっているところが、最高速度になる場所と考えられる。この位置は

極小の位置⇔接線の傾き0⇔電場＝0⇔力のつり合い
となる。電位が最小となる場所は、電位の傾きが0ですなわち電場が0である。電場とは＋1Cにはたらく力なので、力が釣り合っている場所となる。電場の定義③と①が同じであるということに気づかないと解けない。

この場所はグラフの黒点の位置である。この座標をxとすると負電荷との距離は$x+2a$なので、負電荷から受ける力はクーロンの法則より、左向き$\frac{6kQq}{(x+2a)^2}$。正電荷との距離はxなので、正電荷から受ける力は右向き$\frac{2kQq}{x^2}$である。よって、

$$\frac{6kQq}{(x+2a)^2}=\frac{2kQq}{x^2}$$

これを解くと、$x=(1+\sqrt{3})a, (1-\sqrt{3})a$

方程式の解は二つ出るが、最高速になる場所は一つしかない。これはどういうことだろうか。実はこの方程式は大きさのみの方程式で方向は考慮されていない。力g同じ向きに同じ大きさになっている場合と、逆向きで同じ大きさの場合である。この場合は力のつり合いなので後者でなければならない。グラフの×印の位置と●印の位置である。逆向きになっているのは●の方なので、

$$x=(1+\sqrt{3})a$$

が答えである。

- 最高速の計算

エネルギー保存則を使う。最初の位置では電位0、速度0なので、エネルギーの合計は0である。●の位置での位置エネルギーと運動エネルギーの和が0になるはずである。

$$V=\frac{2kQ}{|x|}-\frac{6kQ}{|x+2a|}=\frac{2kQ}{(1+\sqrt{3})a}-\frac{6kQ}{|(1+\sqrt{3})a+2a|}=(2\sqrt{3}-4)\frac{kQ}{a}$$

よって、

$$\frac{1}{2}mv^2+(2\sqrt{3}-4)\frac{kQ}{a}q=0$$

これを解けばよい。　$v=2\sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})kQq}{ma}}$

- 正電荷に最接近した場所の座標の計算

最接近した場所は速度0の場所である。重力の世界では最初の位置と同じ高さになったところでUターンする。この場合も同様に計算できる。つまり$V=0$の場所である。

$$V=\frac{2kQ}{|x|}-\frac{6kQ}{|x+2a|}=0$$

$$x=a, -\frac{1}{2}a$$

解は二つある。グラフ上でも$V=0$となる場所は二つあるが、正解は白丸の方である。
よって、　$x=a$
となる。

　ここで、電位の式に絶対値を忘れると正解が出ない場合がある。

電位の式　$V=\dfrac{kQ}{|r|}$の絶対値は忘れないように心がけよう。