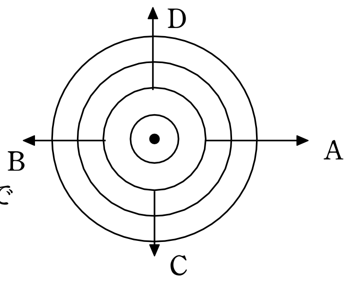
ドップラー効果

１．ドップラー効果が起こる理由

救急車がサイレンを鳴らしながら目の前を通過したとき、サイレンの音が急に低くなることを感じたことはないだろうか？この現象をドップラー効果と呼んでいる。このような現象がなぜ起こるのか考えてみよう。

(1) 音速とは

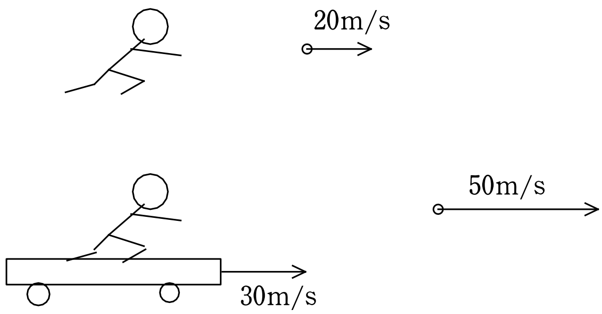
通常、音は静止している音源から音が出ている。その音は音源を中心とした同心円状に広がっていく。その広がる速さが音速である。



この場合はA,B,C,Dのその周辺にいる人たちどこから見ても速さVでつたわり、その波長、振動数、周期などすべて同じように伝わる。

音速は常温で約340m/sである。音はその媒質である空気を伝わる波なので、音源が動いていようと動いていまいと340m/sで伝わる。

たとえば静止している人が20m/sでボールを投げたとしよう。このボールは20m/sで投げた方向に飛んでいく。しかし、この人が30m/sで走っている台車の上で台車の進行方向に20m/sでボールを投げたらそのボールの速さはいくらになるだろうか？答えは50m/sである。つまり、ボールを投げる速度20m/sは投げた人を基準とする速度であるから、投げた人が動いている場合はその速度を加えた速度が実際に飛んでいくボールの速度になるのである。



この点が音速の場合は異なるのである。音速の基準はその媒質である空気である。空気が静止している以上、音源がどれだけ速い速度で動いていようが音速は340m/sなのである。風が吹いているなどしてその空気が動いている場合は、その空気の速度と音速を加えたものが実際の音速となる。

「音の速さは空気の状態によってのみ決定する」

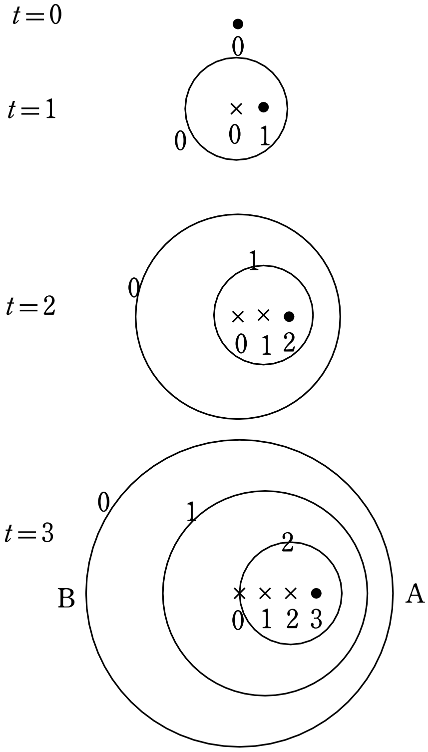
音速は常に一定ではなく、温度が変化すると音速も変化する。その速さは、摂氏温度をt℃としたとき、近似的に

$$V = 331.6 + 0.6t$$

であることが知られている。

⑵　音源が動いた場合音はどのように伝わるのだろうか。

右図は黒点の音源が一定の速さで音を出しながら右方向に移動している様子を各時刻において表わしたものである。



$t=0$のときに位置0にいた音源は$t=1$のとき、位置1に移動している。しかし、位置0のときに発した音の波面はあくまでも位置0から広がっているので、位置0を中心とした円を描いている。円周上の数値はその円の中心位置の番号である。

$t=2$のときは、位置0のときの波が位置０を中心として広がり、位置1のときの波面が位置1を中心として広がっている。よって、波面は同心円ではなく、中心が右へずれた円になっている。

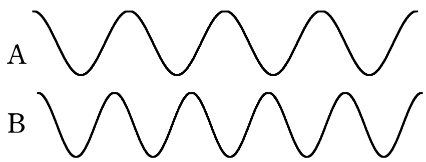
$t=3$のときは、同じように位置0のときの波が位置0を中心として大きく広がり、続いて、1,2のときの波が広がるために右図のような円になっている。

このような状態で連続して波面が広がっていくと、音の前面にいる人Ａと音の後面にいる人Bに聞こえる音の波長（波面の間隔）が異なることがわかる。Ａに聞こえるのは波面の間隔が狭い（波長が短い･振動数が高い）音として聞こえ、Bに聞こえるのは波面の間隔が広い（波長が長い･振動数が低い）音として聞こえる。このような原理においてドップラー効果が起こるのである。

２．波数

⑴　波数とは

右向きに進んでいる波ＡとＢを考えてみよう。Ａの波は波長4個分Bの波は波長5個分である。波長１個分を波１個と数えることにする。



このような波の数え方を波数という。Ａの波数は４個、Bの波数は５個である。波数の考え方を使えば波を理解しやすい面がある。たとえばＡの波長を2ｍとすれば、Ａの波の長さは8ｍ、波の速さを4ｍ/sとすると、波の通過時間は2sで、1sあたりの波の数は2個でこれは振動数となり、１個の通過時間は0.5sとなりこれが周期である。

波数を使うと波動の要素が次のようになる。

① **振動数は1秒間の波数**

② **波長は1個の長さ**

③ **周期は1個の通過時間**

となる。

⑵　音を出す時間と聞く時間

振動数とは1秒間の振動回数を表わしている。つまり、1秒間に耳に入った波数ということになる。

音源がf[Hz]の音をt[s]発したとすると、発した音の数はft[個]である。また、f'[Hz]の音をt'[s]聞いたとすると、聞いた音の数は$f't'$[個]である。音源が発した音を聞くので、発した音の数と聞いた音の数は等しい。よって、

$$f't' = ft$$

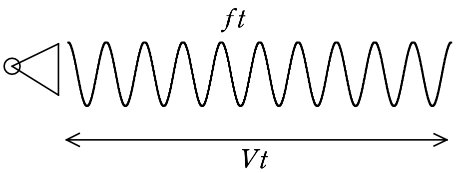
聞いた振動数f'は次のようになる。

$$f' = \frac{ft}{t'}$$

通常は出した音の振動数と聞いた音の振動数は同じとなるが、$t \neq t'$のとき、振動数は同じとならない。音を出した時間と聞いた時間が等しくない時、ドップラー効果が起こることになる。それは、音源あるいは聞く人（観測者）が動いている場合である。

⑶　静止している音源が出した音

静止している音源がf[Hz]の音をt[s]発した。音速をV[m/s]とする。発した音の数はft[個]であり、音の長さはVt[m]である。このことから次のことを求めることができる。



①　波長　1個の長さなので、音の長さを波数で割ればよい。

$\lambda = \dfrac{Vt}{ft} = \dfrac{V}{f}$　　よって、　$V = f\lambda$　の式が導かれる。

②　周期　1個の時間なので、音を発した時間を波数で割ればよい。

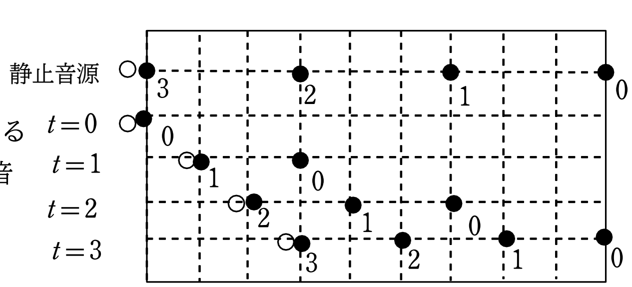
$T = \dfrac{t}{ft} = \dfrac{1}{f}$　　よって、　$T = \dfrac{1}{f}$　の式が導かれる。

３．音源が動いて観測者が静止している場合

⑴　音源移動のイメージ

右図は静止音源及び移動音源が音を出している様子を示したものである。

音は簡単のために1秒ごとに出るパルス音とする。黒丸がパルス音である。音の速さは毎秒3目盛りとする。黒丸のそばの数字は音源から出た時刻を示す。



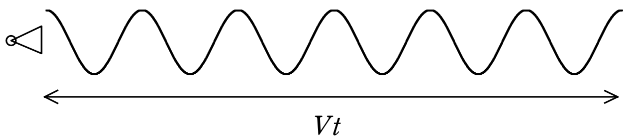
1段目の静止音源（白丸）の場合、0,1,2,3と同じ位置で1秒ごとに音を出し、3目盛りずつ移動しているので、0～3の音は3目盛間隔に並んでいる。これが音源が静止していた場合の音の状態である。

2段目から5段目までは、毎秒１目盛りずつ移動する移動音源（白丸）がパルス音を出している状態を2段目が時刻0のとき、3段目が時刻1の時というように表示している。5段目の時刻3のときの図が、静止音源と同じ時刻の音の配置を示している。

これをみると、音源が移動している分だけ音と音の間隔が縮まっていることが分かる。これは、音源が動くと波長が短くなることを示しているのである。

⑵　音源が速さuで動き、聞く人が静止している場合

まず、音源が振動数f速さVの音をt秒間出したとすると、音の長さはVtで波数はftである。

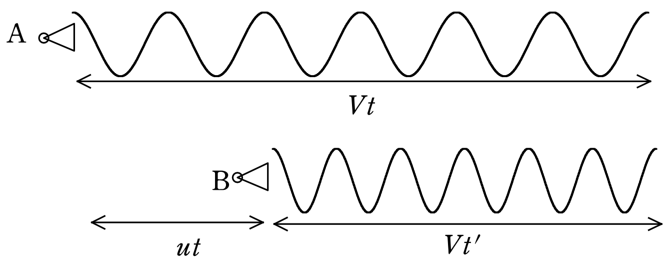


波長λは1波数あたりの長さであるから、$\lambda=\dfrac{Vt}{ft}=\dfrac{V}{f}$である。これは公式$V=f\lambda$からでも導かれる。

このとき、音源が音を出しながら動いていたとするとどうなるであろうか？

音源は速さuで動きながら時間tだけ動いているので、動いた距離はutである。

音源Aは静止した位置で時間tだけ音を出し、音源Bは速さuで動きながら同じ位置で同時に音を出したとする。音源が動こうが動くまいが音速は変わらないので音の先端は同時に進んでいるが、音の最後の位置が音源が移動した距離の分utだけずれている。



音を聞く時間は音の先端が届いてから音の最後が届くまでの時間である。音の長さの距離を音が通過する時間となる。この時間をt'とすると、音の長さはVt'となる。上の図により、

$$Vt'=Vt-ut$$

が成立する。

$$t'=\frac{V-u}{V}t$$

音源Bが出した音は音源が動いている分だけ波長が短くなっているこの短くなっている音の長さは$Vt-ut$なので、音1個の長さ（波長）は

$$\lambda' = \frac{Vt - ut}{ft} = \frac{V - u}{f}$$

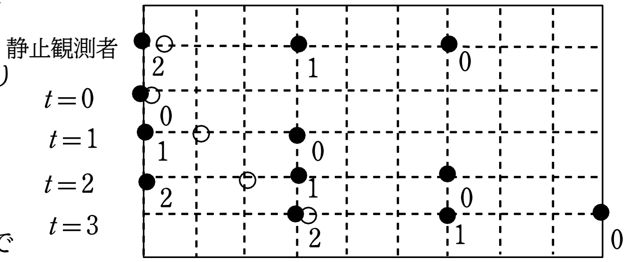
である。この人が聞く振動数f'は

$$f' = \frac{ft}{t'} = \frac{ft}{\frac{Vt - ut}{V}} = \frac{V}{V - u}f$$

となる。

４． 音源が静止し、観測者が速さvで動く場合

⑴ ドップラー効果のイメージ

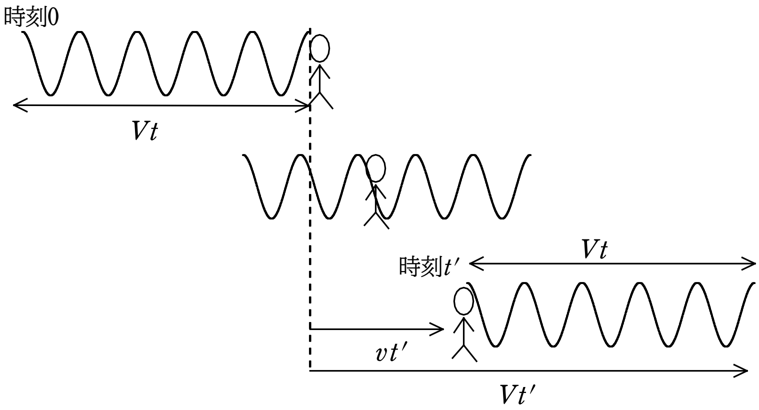


長さ６目盛り、速さ毎秒3目盛2秒間の音（黒丸）を静止している観測者（白丸）と毎秒１目盛りで動く観測者が聞く場合を比較してみる。

１段目が静止している観測者（白丸）が音を聞いている場合である。音は１秒間隔で飛んでくるパルス音である。１段目をみると静止している状況で音を聞くと、２秒で聞き終わることが分かる。２段目から５段目は音が届いた時間を時間０として、１秒間隔で0,1,2と音がやってくるのを毎秒1目盛りで動いている人が音を聞いている状態を示している。最後の音を聞くのは3秒後であることが分かる。移動した分だけ聞く時間が延びているのである。

⑵ 速さvで動きながら速さVの音を聞く場合

静止音源が振動数fの音を時間t発し、その音を速さvで動いている人がこの音を聞いた場合を考えてみる。音の長さはVtで、この人が時間t'の間聞いたとし、聞き初めの時刻を0とすると、聞き終わりの時刻はt'となる。



観測者より音の方が速いので、音がこの観測者を追い越していく。追い越し完了までの時間がt'である。時間t'の間に観測者はvt'移動し、音の先端はVt'移動している。上の図

より

$$Vt' = Vt + vt'$$

であることが分かる。これを計算して

$$t' = \frac{V}{V-v}t$$

となる。よって、この人が聞く振動数f'は

$$f' = \frac{ft}{t'} = \frac{ft}{\frac{V}{V-v}t} = \frac{V-v}{V}f$$

となる。これが、聞く人が動いている場合のドップラー効果の式である。

５． 音源が速さuで、聞く人が速さvで動いている場合

ここまでに

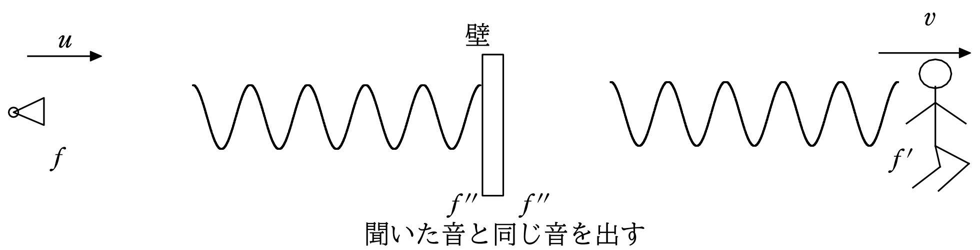
音源のみが動いている場合 $f' = \frac{V}{V-u}f$ …①

聞く人のみが動いている場合 $f' = \frac{V-v}{V}f$ …②

のドップラー効果の式を導いた。いよいよこの2式をドッキングしてみよう。

いま、音源が速さuで動きながらfの音を出して、その音を速さvで動いている人がf'の振動数で聞いたとする。

考え方として、間に壁を設ける。この壁が、聞いた音の振動数f''と同じ振動数の音を出したと考えると、単に音が通過したのと状況は同じである。



聞いた音と同じ音を出す

音源がuで動いて、壁が聞く振動数f''は①が適用できて、

$$f'' = \frac{V}{V-u}f$$

静止している壁がf''の音を出し、速さvで動いている人が聞くと、②が適用できて、

$$f' = \frac{V-v}{V}f''$$

この2式からf''を消去すると、

$$f' = \frac{V-v}{V-u}f$$

が成立する。これがまとめたドップラー効果の関係式である。

この壁を使った考え方は音が反射した場合などに広く使うことができる。

６． 動く向きが違う場合のドップラー効果

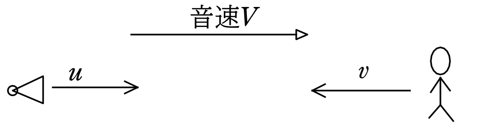
ドップラー効果の式

$$f'=\frac{V-v}{V-u}f$$

は、速度V,u,vはすべて同じ方向として成立している式である。逆方向を含む場合は、そのまま符号を逆にして使えばよい。

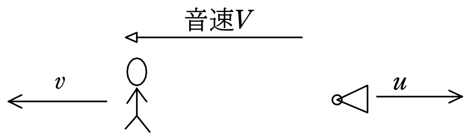
＜例＞

右図のように観測者の方向が逆の場合右向きを正とすると観測者の速度が$-v$であるので、



$$f'=\frac{V-(-v)}{V-u}f=\frac{V+v}{V-u}f$$

この状態ですれ違った場合は音速が逆向きとなる。音速を$-V$とすればよい。



$$f'=\frac{(-V)-(-v)}{(-V)-u}f=\frac{V-v}{V+u}f$$

この場合$-$が多くなって計算しにくくなる。

左向きを正とすると、

$$f'=\frac{V-v}{V-(-u)}f=\frac{V-v}{V+u}f$$

こちらの方がすっきりとする。音の進む方向を正とすると簡単になるのである。

「ドップラー効果は音の進む方向を正とする」

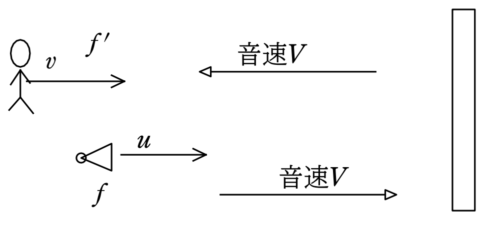
と決めておけばよい。

７． 壁に反射する場合のドップラー効果

音が壁に反射し、その反射波を聞く場合のドップラー効果は、壁が聞いた音と同じ音を跳ね返すと考えればよい。壁がf''の音を聞き、f''の音を発したとする。

音源から壁までのドップラー効果は

$$f''=\frac{V-0}{V-u}f=\frac{V}{V-u}f \quad \cdots \quad ①$$



壁から観測者までのドップラー効果は左向きを正として

$$f'=\frac{V-(-v)}{V}f''=\frac{V+v}{V}f'' \quad \cdots ②$$

②に①を代入すると

$$f'=\frac{V+v}{V}\frac{V}{V-u}f=\frac{V+v}{V-u}f$$

＜別解＞

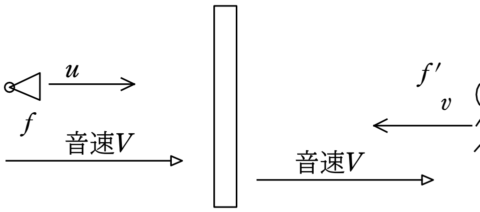
「反射の問題は対象点を考えるとよい」

より、観測者（音源でもよい）を壁の反対側に対象移動すると、

　反射せずにそのまま音が通過
したと考えることができる。
右向きを正として

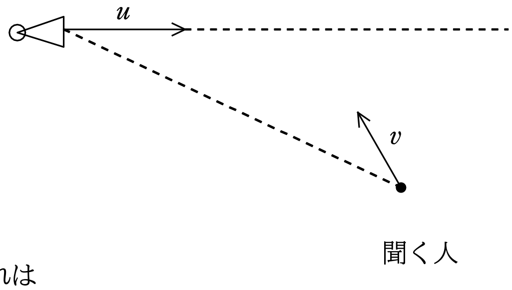
$$f'=\frac{V-(-v)}{V-u}f=\frac{V+v}{V-u}f$$

　となる。



８． 斜めに音源や観測者が動いている場合のドップラー効果

　今までは音源や人は同一直線上を
動いていた。それでは、同一直線上
以外を動いている場合はどう考えれ
ばよいのであろうか？



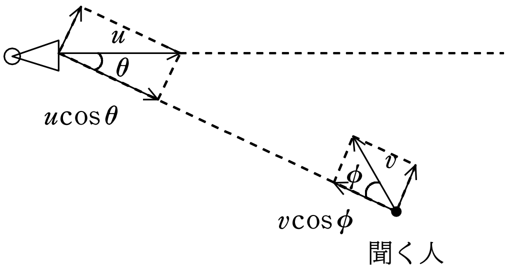
　ドップラー効果は$f'=\dfrac{ft}{t'}$でわかる
ように音を出した時間と聞く時間のず
れで起こるものである。聞く時間のずれは
互いに近づくか遠ざかるかを問題としている。
互いの距離が変わらなければドップラー効果は起こらないのである。たとえば音源と聞く人が同じ速さuで同一直線上を動いていた場合

$$f'=\frac{V-u}{V-u}f=f$$

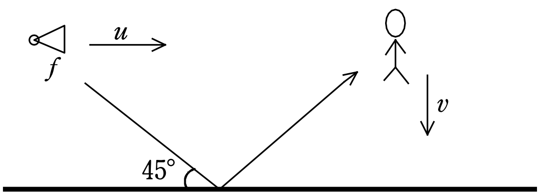
となり、振動数は変わらずドップラー効果はおきない。要は音源と聞く人との距離の問題となる。その場合、音源と聞く人との間に線分をつなぎ、それぞれの速度のその線分方向の速度が問題となる。この線分方向の速度を視線速度という。
右図の場合視線速度は互いに
$u\cos\theta$と$v\cos\phi$となる。
音源から聞く人の方向を正として
ドップラー効果の式に代入すると、

$$f'=\frac{V+v\cos\phi}{V-u\cos\theta}f$$

となる。



＜例題＞
　図のように音源が壁に平行に
右向きに振動数fの音を出しながら
速さuで移動している。
　観測者が壁に対して垂直に速さv
で移動している時、音源からの音が
壁に45°で反射して観測者の耳に入った。
この観測者が聞く音の振動数を求めよ。

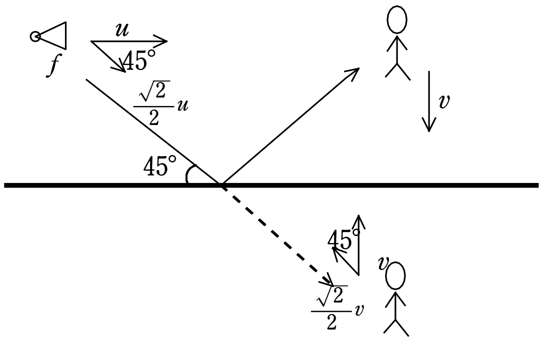


＜解説＞

「反射の問題は対象点に注目」

観測者を壁に対して対象移動すると、右図のようになる。

斜め方向のドップラー効果の問題となるので、速度を成分分解してドップラー効果の式を利用する。

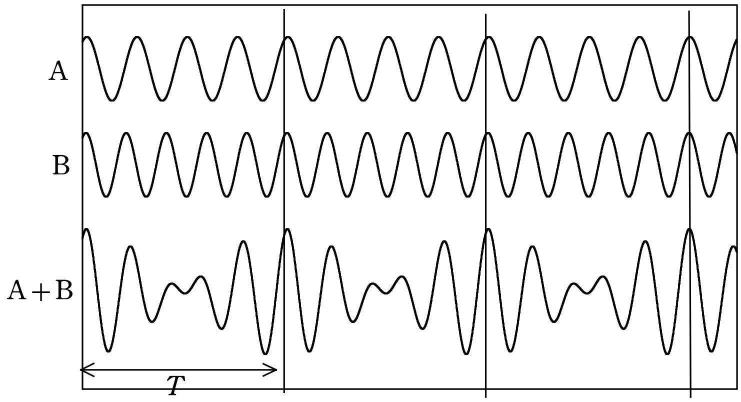


$$f'=\frac{V+\frac{\sqrt{2}}{2}v}{V-\frac{\sqrt{2}}{2}u}f=\frac{\sqrt{2}V+v}{\sqrt{2}V-u}$$

９．うなり

(1)　唸りの原因

下の図は少しだけ振動数の違う二つの音さを同時に鳴らしたとき、A、Bの音さの波形とその音を合成した波形を描いたものである。横軸は時間である。縦線はAとBの音さの位相がともに0になっている位置である。



AとBの位相が一致してから次に位相が一致するまでの時間をTとすると、上図の縦線の間隔がTとなる。位相が一致したところは波が強めあうので、合成した波の振幅は大きくなっている。位相が一致してから次に一致するまでの間に位相が少しずつずれているのであるが、ちょうどその中間点では位相が逆になっている瞬間がある。この瞬間では位相が逆であるために音が互いに打ち消しあい、振幅がほとんど0になっている。人がこの音を聞く場合、振幅が大きくなっているときは大きな音に聞こえ、振幅が小さくなっているところは小さな音に聞こえる。つまり、少しだけ振動数の違う音を同時に聞いた場合その音に強弱がつくのである。この現象を**うなり**と呼んでいる。

ここでいうところのTがうなりの周期になっている。周期Tの間の波数（山の数）を数えてみると、ちょうどひとつ違うことがわかる。つまり波数がひとつずれる時間がうなりの周期になるのである。振動数f_Aの音のT秒間の山の数はf_AT、振動数f_Bの音のT秒間の山の数はf_BTであるから、

$$|f_AT-f_BT|=1$$

となる。これは、　両辺をTで割ると

$$|f_A - f_B| = \frac{1}{T}$$

ここで、うなりの回数fは$f = \dfrac{1}{T}$の関係より、

$$|f_A - f_B| = f$$

の関係が導かれる。二つの音源の振動数の差がうなりの1秒間の回数になるのである。

⑵　正弦波を用いた唸りの原理

正弦波の式を振動数fで表すと

$$y = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{V}\right)$$ より、

$$y = A\sin 2\pi f\left(t - \frac{x}{V}\right)$$

波A（振動数f_A）波B（振動数f_B）を合成すると、

$$y = A\sin 2\pi f_A\left(t - \frac{x}{V}\right) + A\sin 2\pi f_B\left(t - \frac{x}{V}\right)$$

$$= 2A\sin 2\pi\frac{f_A + f_B}{2}\left(t - \frac{x}{V}\right)\cos 2\pi\frac{f_A - f_B}{2}\left(t - \frac{x}{V}\right)$$

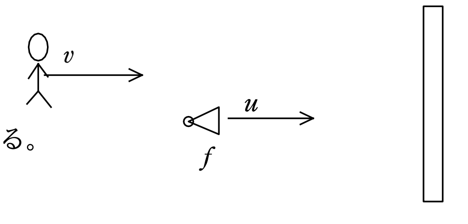
唸りが起こる時、定期的に音が聞こえなくなる時が来る。この波は振動数$\dfrac{f_A + f_B}{2}$の波と振動数$\dfrac{f_A - f_B}{2}$の波の積である。振動数$\dfrac{f_A + f_B}{2}$の波は高い振動数であり唸りではない。それに対して振動数$\dfrac{f_A - f_B}{2}$の波が低い振動数の波で、これが唸りである。1回振動の間に2回振幅が0になる時が来るので、振動数$\dfrac{f_A - f_B}{2}$の波が振幅0となるのはその2倍で、$|f_A - f_B|$が唸りの回数となる。

$$|f_A - f_B| = f$$

となる。

10．例題

＜例題１＞



音源および観測者が共に壁に向かって移動している。音源の速さはu、観測者の速さはvである。観測者は音源からの直接音と反射音の両方を同時に聞きうなりが発生している。1秒間に何回のうなりが聞こえるか。

＜解説＞

直接音の振動数f'は左向きを正として

$$f' = \frac{V - (-v)}{V - (-u)}f = \frac{V + v}{V + u}f$$

反射音の振動数は観測者を対称移動し右向きを正として

$$f''=\frac{V-(-v)}{V-u}f=\frac{V+v}{V-u}f$$

$\frac{V+v}{V-u}f>\frac{V+v}{V+u}f$なので、

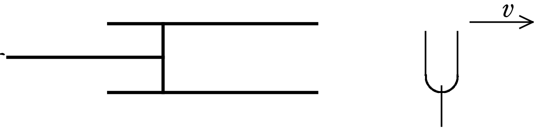
うなりは

$$n=\frac{V+v}{V-u}f-\frac{V+v}{V+u}f=\frac{2u(V+v)}{V^2-u^2}f$$

うなりは正の数となるので大きい方から小さい方を引かなければならない。大小関係が分からない時は絶対値をつけておく必要がある。

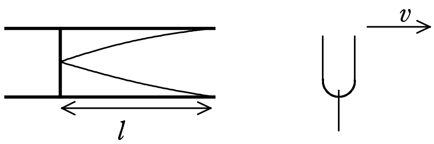
＜例題２＞

円筒にピストンを差し込んだ閉管を用意し、近くで音さを鳴らすと管口からlのところにピストンを



置いた時基本振動の共鳴が起こった。音さを右向きに速さvで動かした時共鳴させるためにはピストンをどちらにどれだけ動かさなければならないか。開口端補正はないものとし、音速をVとする。

＜解説＞



静止しているこの音の波長λは

$\lambda=4l$

音さの振動数fは

$$f=\frac{V}{\lambda}=\frac{V}{4l}$$

音さが動いている場合の振動数は、左向きを正として

$$f'=\frac{V}{V+v}f=\frac{V^2}{4l(V+v)}$$

ピストンを左にx動かした時の共鳴する振動数は

$$f'=\frac{V}{4(l+x)}$$

よって、

$$\frac{V^2}{4l(V+v)}=\frac{V}{4(l+x)}$$

これを解くと

$$x=\frac{v}{V}l$$