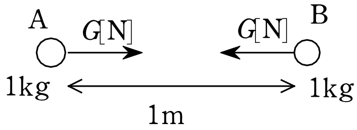
万有引力

１． 万有引力とは何か

⑴ 万有引力について

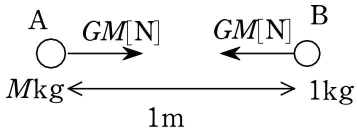
　万有引力とは質量のある物体どうしに作用する力である。

　1mはなして1kgの物体A、Bを置いたとき

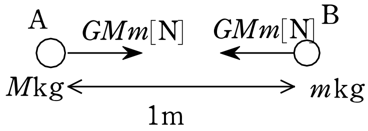


この物体間に作用する万有引力の大きさをG[N]とする。Aに作用する万有引力とBに作用する万有引力は作用･反作用の関係にあるので、常に、同一作用線上逆向き同じ大きさである。

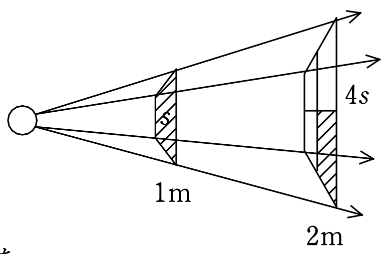
　次に物体Aのみ質量をM倍にした。このときに作用する万有引力もM倍になり、GM[N]になる。



　次に物体Bの質量をm倍にした。このときに作用する万有引力の大きさもm倍になり、GMm[N]となる。



　次に距離が遠くなった場合作用する力はどうなると考えられるのか検討してみよう。万有引力の正体は定かではないが物体から、何かが出ていてその何かを受け止める量で万有引力の大きさが決まると仮定してみよう物体Aから、1mはなれたところに面積sの板を置いたとしよう。この時、物体Aから出る何かをこの面積sで受け止め、それが万有引力となる。距離が2倍になったとき、上図のように同じ何かの量を受け止めるには、面積がその4倍の$4s$が必要であることがわかる。つまり同じ面積の物体では、受け止める量が$\dfrac{1}{4}$になっているのである。このことより、万有引力は距離がr倍になれば$\dfrac{1}{r^2}$になることがわかる。よって、距離がr[m]のときの万有引力Fは



$$F=G\frac{Mm}{r^2}$$

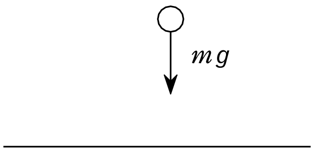
これが万有引力の法則である。仮定によってこの法則を推定したが、この法則の正しさは実験により確認されている。このときのGを万有引力定数という。実験によるGの値は

$$G=6.673\times10^{-11}\mathrm{Nm^2/kg^2}$$

この値は非常に小さいために通常の物体どうしに作用する力は日常生活にはまったく関係ないといえる。しかし、天体レベルでの万有引力は相当な大きな力となる。よって、万有引力の法則は天体の運動に関して用いられることになる。

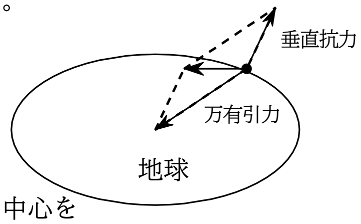
⑵　万有引力と重力の違いについて

万有引力は物体どうしに作用する力であり、物体の質量が充分に大きければ大きな力が作用する。地球とその周辺にある物体に作用する力も片方の物体が地球であり、充分に質量が大きいので充分に大きな万有引力が作用する。



地球周辺にある物体は万有引力を受けて地上向けて落下する。しかし、このときに作用する力は重力と呼ばれている。この重力と万有引力は同じなのか違うのか検討してみよう。

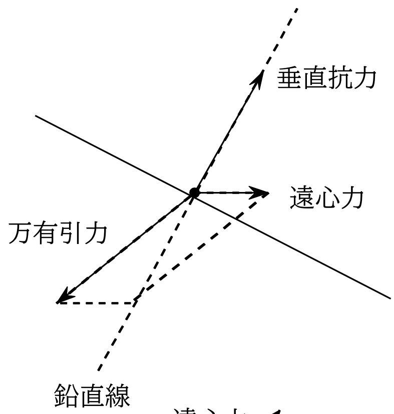
我々が住んでいる天体は地球と呼ばれている。地球は球のように見えるが実は赤道方向が少し膨らんだ回転楕円体と呼ばれている形に極めて近い。その地球の形を極端に現したのが右図である。



地上にある物体に作用している力は、地球の中心を向いている万有引力と地球表面に垂直な方向の垂直抗力である。もし地球が完全な球であれば、この万有引力と垂直抗力は同一直線上にありつりあっているといえるのであるが、先ほど述べたとおり、地球は回転楕円体をしており、垂直抗力と万有引力は同一直線上にはない。この2力はつりあっていないのでその合力が存在し、その方向に加速度運動をしていることになる。これはどうしたことであろうか？

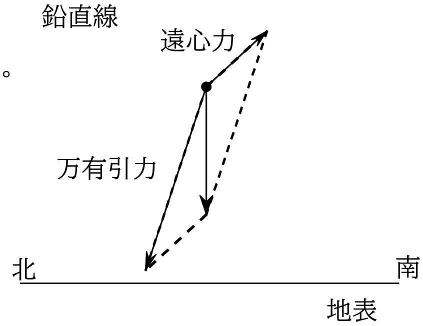
地球は知ってのごとく自転している。我々はその地球上にいるわけであるから、地球上にいる物体は地球と同時に等速円運動をしていることになる。等速円運動している物体には必ず向心加速度が生じており、その方向に向心力が作用していなければならない。この向心力がこの万有引力と垂直抗力の合力である。

上の図を見てもわかるように万有引力は地表との垂線（鉛直線）の方向に作用しているのではなく、鉛直下向きよりも少し北向きに作用している。



地球上の物体はすべて地球とともに等速円運動しているために、すべての物体に慣性力（遠心力）が作用している。これらの力を作図したのが右図である。

これを地上を水平に置き換え、地表にあった物体を空中に放した状態にしたのが右下の図である。



この図をみると、物体は遠心力と万有引力の合力の方向に落下することがわかる。この落下させる力が重力であることから、重力は遠心力と万有引力の合力であることがわかる。

1kgの物体に作用する万有引力の大きさは約9.8Nで、同時に1kgの物体に作用する遠心力

の大きさは、約0.03Nであるので、有効数字2桁以内では遠心力の影響は無視できることになる。よって、有効数字2桁以内で考えるならば万有引力＝重力といえる。地球の半径をR、質量をMとすると、

$$G\frac{Mm}{R^2}=mg$$

これより、

$$\frac{GM}{R^2}=g$$

となる。

(3)　地球の質量

$\frac{GM}{R^2}=g$より，地球の質量が計算できる。重力加速度の大きさ$g=9.80\mathrm{m/s^2}$,

万有引力定数　$G=6.673\times10^{-11}\mathrm{Nm^2/kg^2}$，地球半径　$R=6.38\times10^6\mathrm{m}$

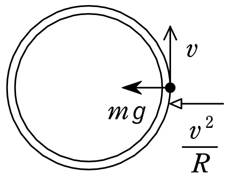
$$M=\frac{gR^2}{G}=\frac{9.80\times6.38\times10^6}{6.67\times10^{-11}}=5.98\times10^{24}\mathrm{kg}$$

２．円軌道の例題

＜例題１＞　第一宇宙速度

地球すれすれに飛んでいる人工衛星の速さを求めよ。

重力加速度の大きさをg、地球の半径をRとする。



＜解説＞

人工衛星の軌道が円軌道なので、等速円運動の問題として解けばよい。

向心加速度が$\frac{v^2}{R}$となるので、運動方程式は

$$mg=m\frac{v^2}{R}$$

これを解くと　$v=\sqrt{Rg}$

＜補足＞　地球の半径$R=6.38\times10^6\mathrm{m}$、$g=9.8\mathrm{m/s^2}$を代入すると

$v=7.9\mathrm{km/s}$となる。この速度を第一宇宙速度と呼んでいる。

地球の質量をMとすると、$g=\frac{GM}{R^2}$なので、これを$v=\sqrt{Rg}$に代入すると

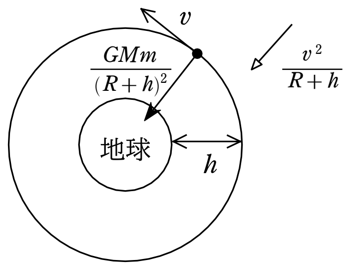
$$v=\sqrt{\frac{GM}{R}}$$　となる。

数値的には　地球半径　$R=6.38\times10^6\mathrm{m}$，$g=9.8\mathrm{m/s^2}$　として，

$$v=\sqrt{6.38\times10^6\times9.80}=7.91\times10^3\mathrm{m/s}=7.91\mathrm{km/s}$$

これが第一宇宙速度である。

＜例題２＞　上空を回っている人工衛星の速度



半径Rの地球の表面上空hの高さを回っている人工衛星の速さを求めよ。重力加速度の大きさをgとする。

＜解説＞

この問題では重力加速度は与えられているが、地球の質量や万有引力定数は与えられていない。

そこで、$g=\frac{GM}{R^2}$を使う。重力加速度の大きさgは地球表面での値であり、上空hでは重力加速度が違う。そこで、万有引力として計算する。

人工衛星は半径$R+h$の円軌道を描いている。この位置で、人工衛星にはたらく万有引力は$\frac{GMm}{(R+h)^2}$で、向心加速度は$\frac{v^2}{R+h}$なので、運動方程式は、

$$\frac{GMm}{(R+h)^2}=m\frac{v^2}{R+h}$$

これを解くと　$v=\sqrt{\frac{GM}{R+h}}$

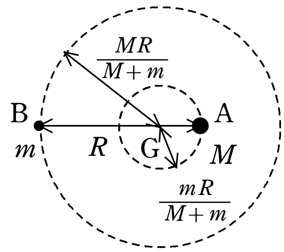
GMは与えられていないので答えに使えない。よって、$g=\frac{GM}{R^2}$を用いてGMを消す。

$GM=gR^2$なので、

$$v=\sqrt{\frac{GM}{R+h}}=\sqrt{\frac{gR^2}{R+h}}$$

となる。

＜例題３＞



質量Mの天体Aと質量mの天体Bが共通重心Gの周りを互いに回っている。天体Bの周回速度vを求めよ。

＜解説＞

天体AB間にはたらく万有引力は$\frac{GMm}{R^2}$である。

重心Gの位置は　ABをm:Mに内分する点である。

AG：BG＝m：M

よって、　BG＝$\frac{MR}{M+m}$となる。BGが回転半径である。Bの向心加速度は

$$\frac{v^2}{\frac{MR}{M+m}}=\frac{(M+m)v^2}{MR}$$

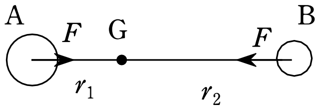
よって、運動方程式は

$$\frac{GMm}{R^2}=m\frac{(M+m)v^2}{MR}$$

これを解くと　$v=\sqrt{\dfrac{GM^2}{R(M+m)}}$

＜重心が回転中心であることの証明＞

天体A（質量M），B（質量m）が，ABをr_1：r_2に内分する点Gを中心として互いに円運動しているとする。向心力はFで作用反作用の関係にある。



互いの向心加速度は角速度をωとすると，

$r_1\omega^2$，$r_2\omega^2$である。向心力はそれぞれ,$Mr_1\omega^2$，$mr_2\omega^2$となり，この両者は作用反作用の関係にあるので，$Mr_1\omega^2=mr_2\omega^2$より，$Mr_1=mr_2$であり，

$r_1：r_2=m：M$

となる。これは，重心の内分比であり，Gが重心であることを意味している。

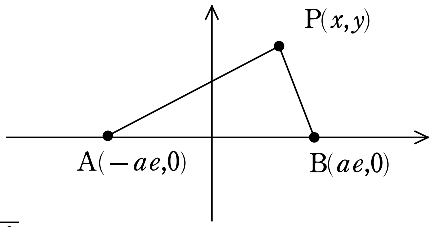
よって，

「複数天体が互いに回りあっているときはその回転中心は重心であるといえる。」

３．楕円について＜数学＞

ここで数学における楕円について考えてみよう。

楕円の性質を理解するために座標平面上の2点A$(-ae,0)$とB$(ae,0)$からの距離の和が$2a$である点Pの軌跡を求めてみる。



＜解＞

点Pの座標を(x,y)とする。

$\mathrm{PA}+\mathrm{PB}=\sqrt{(x+ae)^2+y^2}+\sqrt{(x-ae)^2+y^2}=2a$

この式を簡略化すると、

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1$$

となる。ここで、$b=a\sqrt{1-e^2}$とおけば、

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

これは、数学でいうところの楕円の式に他ならない。この式をグラフ化すると、

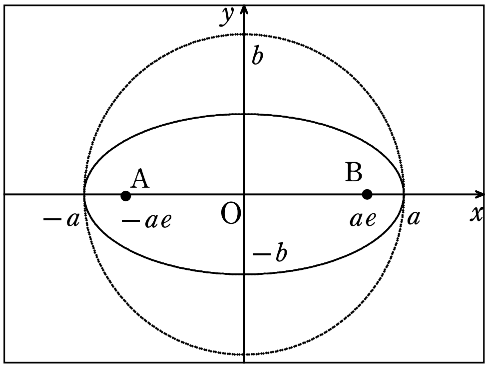
このときの点A,Bを楕円の**焦点**という。焦点は2つある。
さらにaを長半径、bを短半径という。
また、eを離心率という。

楕円の式を変形すると

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

この式は　円$y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$

をy方向に$\frac{b}{a}$倍した式である。



「楕円は円を縦方向に何倍かした図形」といえる。

４．ケプラーの第一法則

ケプラーは惑星の動きを細かく観測することにより、惑星の動きに関して法則を見つけた。これをケプラーの法則という。その第一法則は惑星の軌道に関する法則で、

「惑星は太陽をひとつの焦点とする楕円軌道を描く」

というものである。

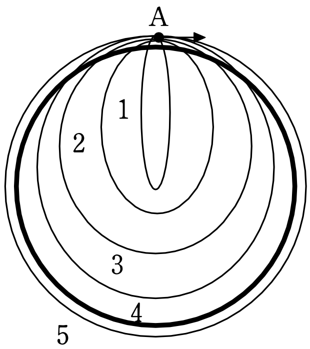
この法則を証明するには、大学での数学の知識が必要であり、高校段階では証明できないので、天体の速度とともに軌道の形がどのように変化するかにとどめることにする。

地球表面のA点からボールを投げた場合、放物線を描いて地上に落ちるが実はこの運動は楕円軌道の一部である。図において、太線の円が地球である。

①　遅い速度で水平に投げた場合。

投げる速さが遅い場合すぐ手前の地表に落ちるが、もし、地表がないとすると、投げた物体は楕円軌道を描いて元の位置に戻ってくる。その軌道と地表との交点が落下地点となる。

速く投げれば投げるほど物体は遠くに落ちる。このときの軌道は次第に図の1,2,3,4,5と細長い楕円から円に近づいていく。円軌道になったときは地表との交点がないので、地上に落ちずに人工衛星となるのである。そのときの速度は後で計算するが約7.9km/sである。この速度を**第一宇宙速度**という。よって、7.9km/sよりも遅い速度で物体を投げた場合、その軌道は楕円軌道である。

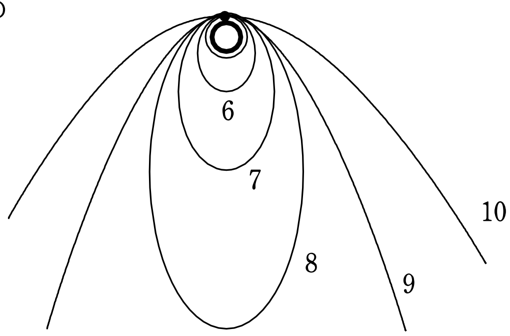


②　7.9km/sよりも速く人工衛星を打ち上げた場合

①の速度をさらに速くした場合を描いてみる。

速くなればなるほど、投げた地点と反対側の位置が6,7,8と次第に遠くなる。楕円の形は再び次第に細長くなるのである。

そして、11.2km/sの速度に達したとき、放物線軌道9になる。この速度も後ほど計算する。放物線は楕円とは異なり無限のかなたまで飛んで行き、二度と再び地球には戻ってこない。この速度を**第二宇宙速度**という。



この第二宇宙速度を超えてロケットを打ち上げるとどうなるであろうか。それは双曲線軌道になることが知られている。

いずれにしても天体の軌道は楕円･円･放物線･双曲線で総称して二次曲線を描いているのである。惑星の場合は同じところを何回も回るので円軌道か楕円軌道となる。

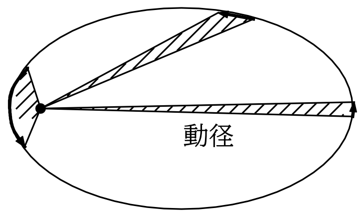
円軌道の場合は運動方程式で解けるが、楕円軌道の場合は高校段階の数学では運動方程式を解くことができない。楕円軌道の問題はケプラーの法則を使う必要がある。

５． ケプラーの第二法則

第二法則は同一軌道上を移動している天体は太陽に近いところほど速く動き太陽から遠くなるとき遅く動く。これを法則化したものである。

「惑星と太陽を結ぶ線分（動径）が単位時間に描く面積（面積速度）は一定である。」

これがケプラーの第二法則である。



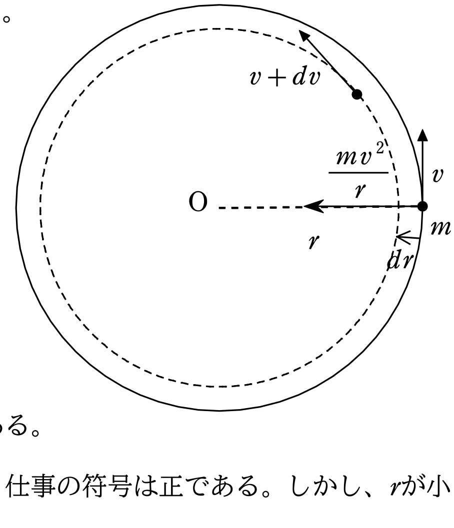
＜証明＞

半径rの円軌道を速度vで等速円運動している物体がある。いま、この物体を円の中心方向にゆっくりと引っ張り半径がdrだけ、小さくなったときのこの物体の速度が$v+dv$になったとする。

このとき物体を移動させる前の物体の運動エネルギーは$\frac{1}{2}mv^2$である。また、移動させた後の運動エネルギーは$\frac{1}{2}m(v+dv)^2$である。軌道を変えるときに加えた外力Fは向心力（遠心力）と等しい力であるから、

$F=\frac{mv^2}{r}$である。このとき外力がした仕事は

$W=Fs=\frac{mv^2}{r}dr$であるが、問題はその符号である。



外力の向きと動かす方向は同じ方向であるので、仕事の符号は正である。しかし、rが小

さくなる方向に動かすので$dr<0$である。よって、仕事が正になるためには

$W=-\dfrac{mv^2}{r}dr$でなければならない。これは外力がした仕事なので、外力から物体のほうにエネルギーが移動している。よって、

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{mv^2}{r}dr=\frac{1}{2}m(v+dv)^2$$

が成立する。右辺を展開すると、

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{mv^2}{r}dr=\frac{1}{2}mv^2+mvdv+\frac{1}{2}mdv^2$$

右辺第三項は微小値の２乗であるから、他項に比べて無視できる。これを簡略化すると、

$rdv+vdr=0$　　dtで割ると、　　$r\dfrac{dv}{dt}+v\dfrac{dr}{dt}=0$

$rv'+r'v=0$

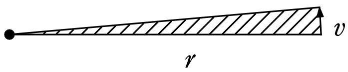
これは積の微分の形をしているので

$(rv)'=0$　　積分すると、　　$rv=$一定

この式は半径と速度は反比例していることを意味している。

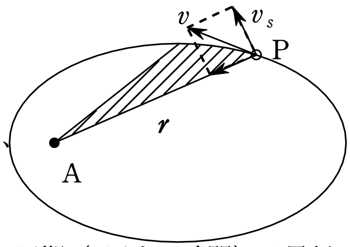
この式は$\dfrac{1}{2}rv=$一定ともいえる。

この式の左辺は右図のように動径が単位時間に描く面積を意味している。すなわちケプラーの第二法則である。



本証明は円運動にて行っているため速度vと動径rの方向は互いに直角である。しかし、楕円においては直角でない場合もある。その場合は速度ベクトルvの動径ベクトルrとの直角成分を使うとよいことになる。

中心天体Aの周りを楕円軌道で回っている。楕円軌道上右図のような位置Pに天体があるとき、速度vの動径rに対する直角成分はv_sとなる。このとき、$\dfrac{1}{2}rv_s$は動径rを底辺とし、高さv_sの三角形の面積となるが、この面積は1秒間の移動距離がv_sであり、天体の周期（1周する時間）は最低でも数時間であるので、rのほうがv_sよりもはるかに大きくなり、この三角形の面積は1秒間に動径が描く面積（図の射線部分）に限りなく近くなる。よって、



「惑星と太陽を結ぶ線分（動径）が単位時間に描く面積（面積速度）は一定である。」

のケプラーの第二法則が成立するといえる。

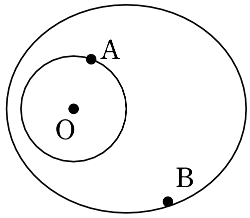
＜証明終わり＞

６．ケプラーの第三法則

「同一天体の周りを回っている複数の天体の軌道半長径aと周期Tの間に

$$\frac{a^3}{T^2}=\text{一定}$$

の関係が成り立つ」



これがケプラーの第三法則である。

この法則は同一天体の周りを回っていれば、すべての楕円軌道･円軌道に対して成立する。しかし、回っている天体が別であれば成り立たないことに注意を要する。たとえば太陽の周りを回っている惑星どおしの間では成立するが、地球の周りを回っている月と太陽の周りを回っている惑星との間では成り立たない。

＜証明＞

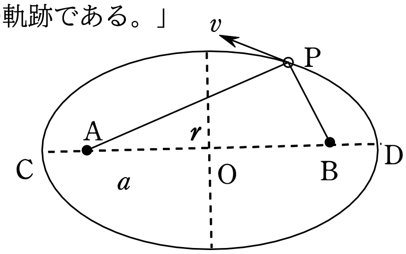
①　平均半径

楕円軌道は天体間の距離が随時変化する。まず、その平均値を求めてみよう。

　ケプラーの法則(1)における「楕円とは何か」の項で説明してあるとおり

「楕円とは2点A,Bからの距離の和が一定である点Pの軌跡である。」

といえる。



　楕円とは2点A,Bからの距離の和が等しい点の軌跡であるので、Pが楕円上のどの位置にあってもAP＋BPは一定である。点PがC点にあるときAP＋BP＝AC＋BCである。また、楕円の対称性よりAC＝BDであるから、BC＝ADとなる。

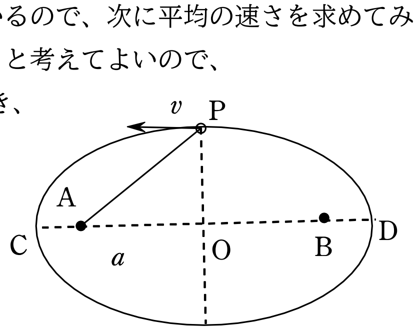
よって、AP＋BP＝AC＋BC＝AC＋AD＝CD＝$2a$である。

Aからの距離とBからの距離の和は常に$2a$であることを意味し、楕円の対象性より、Aからの距離の平均値とBからの距離の平均値は等しい。動径APの平均値（平均半径･平均距離）はCDの半分となり、a（半長径という）である。

「楕円軌道の平均半径は半長径である。」

②　平均の速さ

　また、楕円軌道上では天体の速度も随時変化しているので、次に平均の速さを求めてみよう。平均の速さは平均半径の位置にあるときの速さと考えてよいので、



右図のようにPが線分ABの垂直二等分線上にあるとき、AP＝PBとなり、AP＋BP＝$2a$とともに判断すると、AP＝aとなる。このときのPは平均半径の位置にあることになる。

　PO＝b、平均の速さを$\overline{v}$とすると、動径APが1秒間に描く面積は$\frac{1}{2}b\overline{v}$となる。周期をTとすると、

楕円の面積Sは、$S=\frac{1}{2}b\overline{v}T$となる。

また、右図の楕円はPOがbなので、半径aの円の上下方向を$\frac{b}{a}$に縮小したものと考えることができるので楕円の面積は円の面積πa^2の$\frac{b}{a}$になっている。よって、

$$S=\pi a^2\times\frac{b}{a}=\pi ab=\frac{1}{2}b\overline{v}T$$

となる。

この式を簡略化すると、$\overline{v}=\frac{2\pi a}{T}$となる。

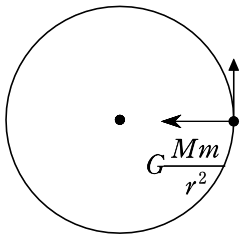
この式は半径aの円軌道における天体の平均の速さと同じである。このときの周期はその円軌道を回る天体の周期と考えることもできる。楕円の形を示す数bが存在しない。よって、次のことが言える。

「楕円軌道を描く天体の周期は、楕円の形に関係なく平均半径（半長径）を半径とする円軌道の周期と等しい。」

③　ケプラーの第三法則

まず、ここでは円軌道という条件でケプラーの第三法則を証明しよう。

質量Mの天体の周りを回っている質量mの小天体が万有引力$G\frac{Mm}{r^2}$を向心力として角速度ωで回転しているとすると向心加速度は$r\omega^2$であるから、運動方程式は



$$G\frac{Mm}{r^2}=mr\omega^2$$

ここで、周期$T=\frac{2\pi}{\omega}$を用いて、

$$G\frac{Mm}{r^2}=mr\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$　これを簡単にすると、　$$\frac{r^3}{T^2}=\frac{GM}{4\pi^2}$$

この式の右辺は定数となる。これが第三法則である。

この式は円軌道で導いたものであるが、②で証明したとおりrを軌道半長径aと置き換えるとそのまま楕円軌道でも成立することになる。

$$\frac{a^3}{T^2}=\frac{GM}{4\pi^2}$$

ケプラーの法則は円軌道でも楕円軌道でも使えるが円軌道の場合は運動方程式を立てて解けばよいので、ケプラーの法則を使う必要はない。

＜例＞

静止衛星軌道の軌道半径を計算

静止衛星は地球の自転周期と同じ周期で周る人工衛星である。地球の自転周期は地球が太陽の周りを公転しているために，1日（24h）より少し短く，23h56mである。これを秒に直すと，$T=23\times3600+56\times60=8.62\times10^4$s

ケプラー第三法則より

$$a = \sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2}T^2} = \sqrt[3]{\frac{6.67\times10^{-11}\times5.98\times10^{24}}{4\times3.14^2}\times(8.62\times10^4)^2} = 4.22\times10^7\mathrm{m}$$

これは軌道半径42200kmで，赤道上空35800kmの高度になる。
この軌道を周る人工衛星は，地球の自転と同じ周期なので,地球から見ると常に静止しているように見える。

７． 万有引力の位置エネルギー

万有引力も周りの空間に力を及ぼしているので位置エネルギーが存在している。この位置エネルギーを計算してみよう。まず、位置エネルギーの定義を復習すると、

「位置エネルギーとは外力が等しい力でゆっくりと基準の位置から運ぶ仕事」

である。この定義に素って計算するとよい。

⑴ 万有引力による位置エネルギーの基準

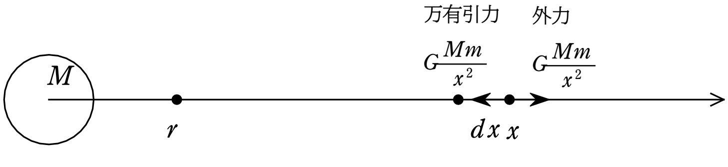
重力による位置エネルギーは基準を地表に置くことが多い。しかし、宇宙空間にある天体の中には地表のない天体（太陽･木星･土星など）も存在するし、天体から天体へ移動する人工天体の位置エネルギーを計算するときにその基準を途中で変えるわけには行かない。そこで、万有引力の基準は、ある天体の表面ではなく、無限遠の彼方と定義しておく。このようにすれば、無限遠はすべての天体に対して共通なので、宇宙旅行をしても途中で基準を変える必要はない。

「万有引力による位置エネルギーは無限遠を0とする。」

⑵ 万有引力による位置エネルギーの計算

質量Mの天体の中心からr離れた位置の質量mの物体が持つ万有引力による位置エネルギーを計算してみよう。

万有引力による位置エネルギーは質量mの物体を無限遠からゆっくりと運ぶ仕事で計算すればよい。万有引力は引き合う力であるから、外力は反対側の外向きの力となる。この外力が運ぶ仕事を計算するのである。今、中心天体からxの位置まで物体を運んできた状態を考えてみよう。この物体の左向きに万有引力$G\dfrac{Mm}{r^2}$が作用している。この状態で、この物体をゆっくりと運ぶには左向きに同じ大きさの外力を加えなければならない。この外力の大きさも$G\dfrac{Mm}{r^2}$である。この状態を図示したのが下の図である。



仕事は力×距離で求められるが、力が物体を運ぶ間に力の大きさが変化してはならない。ところが、この場合、物体を近づければ近づけるほど万有引力は強くなるので、外力も強くしなければならない。こういった場合の仕事は積分で求めることになる。

この物体をxの位置より、dxだけ近づける場合の外力がする仕事を計算してみよう。dxは限りなく0に近い値なので、動かす間に外力の強さは変化しないと考えてよい。このと

きの仕事dWは

$$dW=G\frac{Mm}{x^2}dx$$

仕事の計算は常に符号に注意しなければならない。外力の向きと動かす方向が逆なので、この場合の仕事は負になる。しかし、dxがxを減少させる方向なので、$dx<0$である。よって、上の式は全体が負になるので、そのままでよいことになる。無限遠からrの位置まで運ぶには、それぞれの区間の仕事をすべて合計すればよい。その仕事Wは

$$W=\int_{\infty}^{r}G\frac{Mm}{x^2}dx=GMm\int_{\infty}^{r}x^{-2}dx=GMm\left[-\frac{1}{x}\right]_{\infty}^{r}=-\frac{GMm}{r}$$

となる。よって、万有引力による位置エネルギーUは

$$U=-\frac{GMm}{r}$$

である。

(3)　重力による位置エネルギーと万有引力による位置エネルギーの違い

重力による位置エネルギーは$U=mgh$である。この式と、$U=-\frac{GMm}{r}$はどこが違うのであろうか？

mghの位置エネルギーの公式は地上付近でよく使う。そのために物体に作用する重力mgは一定であるとして計算しているが、万有引力の場合ははるか遠くからの力で計算している。そのために、地上付近ではmgh、遠く離れた位置を扱うときは$U=-\frac{GMm}{r}$を使えばよいことになる。このことを証明してみよう。

地球の半径をRとし、そこを重力の位置エネルギーの基準Aとし、そこからほんの少しh高いところBの位置エネルギーを$U=-\frac{GMm}{r}$を使って求めてみよう。上の論からすると、mghになるはずである。

A点の万有引力による位置エネルギーは$U_A=-\frac{GMm}{R}$、B点では$U_B=-\frac{GMm}{R+h}$

この位置エネルギーの差を求めればよい。$U_B>U_A$なので、

$$U=U_B-U_A=-\frac{GMm}{R+h}+\frac{GMm}{R}=\frac{GMmh}{R(R+h)}$$

で、$R>>h$であるから、$R+h\fallingdotseq R$と置いてよい。

よって、$U=\frac{GMmh}{R^2}$である。ここで、地上の万有引力が重力と等しいので、

$F=mg=\frac{GMm}{R^2}$といえるので、上の式を置き換えると、$U=mgh$となる。

よって、万有引力の位置エネルギーのごくわずかの差がmghとなっているといえる。

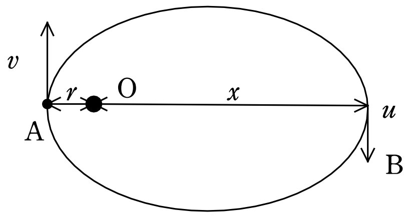
８．楕円軌道の問題の解き方

(1) 必殺技

高校範囲の楕円軌道の問題は解き方が限られている。

中心天体Oからr離れた位置Aで、AOより直角方向に速度vで人工衛星を飛ばした。

最遠点Bを通過時のOからの距離xとその時の速度uを求める方法。



未知数が二つなので、方程式が二つ必要。

その二つの方程式は

①　ケプラーの第二法則

②　エネルギー保存則

である。この二つの方程式で楕円問題は大抵解ける。

①　$rv=xu$

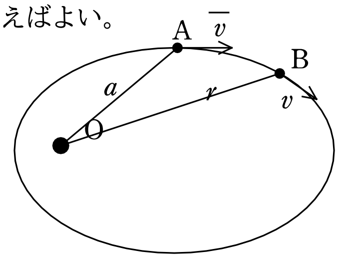
②　$\dfrac{1}{2}mv^2-\dfrac{GMm}{r}=\dfrac{1}{2}mu^2-\dfrac{GMm}{x}$

この二つの方程式を連立させればよい。

楕円の周期を求める問題ではケプラーの第三法則を使えばよい。

(2) 楕円軌道の全力学的エネルギー

天体が半短径となる位置Aにあるときのエネルギーを計算してみよう。



$E=\dfrac{1}{2}m\overline{v}^2-\dfrac{GMm}{a}$

$\overline{v}$は平均速度なので円軌道速度と同じである。

円軌道の運動方程式は　$\dfrac{m\overline{v}^2}{a}=\dfrac{GMm}{a^2}$

この式より　$m\overline{v}^2=\dfrac{GMm}{a}$　　これを代入すると，

$E=\dfrac{1}{2}m\overline{v}^2-\dfrac{GMm}{a}=\dfrac{1}{2}\dfrac{GMm}{a}-\dfrac{GMm}{a}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{GMm}{a}$

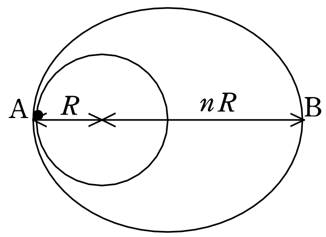
軌道の全力学的エネルギーは

$E=\dfrac{1}{2}mv^2-\dfrac{GMm}{r}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{GMm}{a}$

楕円軌道における全力学的エネルギーは，$-\dfrac{1}{2}\dfrac{GMm}{a}$であらわされ,軌道半長径のみによって決定する。

(3) 中心天体から距離R離れた位置で，円軌道を回っている人工衛星がある。この人工衛星を接線方向に加速すると，最遠点の距離がnRの楕円軌道になったという。この人工衛星は何倍に加速したのか，

また，軌道上の全力学的エネルギーはいくらか。



A点での円軌道速度をv_0とする。円軌道の運動方程式より

$$m\frac{{v_0}^2}{R}=\frac{GMm}{R^2}$$

これを解くと　$v_0=\sqrt{\frac{GM}{R}}$　①　となる。

A点で加速後の速度をv_A，B点での速度をv_Bとすると，ケプラーの第二法則より

$Rv_A=nRv_B$　　　　よって，$v_B=\frac{1}{n}v_A$　②

エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}m{v_A}^2-\frac{GMm}{R}=\frac{1}{2}m{v_B}^2-\frac{GMm}{nR}$$

②を代入して

$$\frac{1}{2}m{v_A}^2-\frac{GMm}{R}=\frac{1}{2n^2}m{v_A}^2-\frac{GMm}{nR}$$

これを解くと

$v_A=\sqrt{\frac{2n}{n+1}\frac{GM}{R}}$　　　よって，　$\sqrt{\frac{2n}{n+1}}$倍となる。

全力学的エネルギーは

$$E=\frac{1}{2}m{v_A}^2-\frac{GMm}{R}=-\frac{1}{n+1}\frac{GMm}{R}$$

となる。

＜補足＞

全力学的エネルギーは楕円軌道を描いているときは必ず負であることがわかる。$n\to\infty$のとき$E\to0$なので，無限遠に達するには$E\geqq0$でなければならないことがわかる。

９．第二宇宙速度

(1)　力学的エネルギー

半径xの円運動している時の速度をu'とした時の運動方程式は

$$m\frac{u'^2}{x}=\frac{GMm}{x^2}$$

楕円軌道なので、円軌道速度よりは低い速度である。よって、$u<u'$

$$m\frac{u^2}{x}<m\frac{u'^2}{x}=\frac{GMm}{x^2}$$

$$mu^2<\frac{GMm}{x}$$

①より

$$U=\frac{1}{2}mu^2-\frac{GMm}{x}<-\frac{1}{2}\frac{GMm}{x}<0$$

「楕円軌道を描いている場合その力学的エネルギーは必ず負となる。」

(2)　第二宇宙速度

地球の大気圏を脱出した宇宙船が7.9km/sに達していれば、この宇宙船は円軌道を描く

がそれより速い場合は楕円軌道を描く。速くなるにつれて次第に細長い楕円軌道になり、ある速度に達すると放物線軌道になり、二度と再び地球に戻らなくなる。上の式でいうと

$x\to\infty$である。

$$\lim_{x\to\infty}U=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}mu^2-\frac{GMm}{x}\right)=\frac{1}{2}mu^2\geqq 0$$

この結果より

「力学的エネルギーの合計が0以上の時、天体は二度と戻ってこない」

であることが分かる。

地球半径Rを用いて地球表面からの第二宇宙速度（脱出速度＝二度と戻ってこない速度）を求めてみよう。

$$U=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R}\geqq 0$$

これを解くと、

$$v\geqq\sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

これが脱出速度である。

ここで、第一宇宙速度の場合と同じようにGMを消去すると、

$$v=\sqrt{2gR}$$

第一宇宙速度は$\sqrt{gR}$だったので、

第二宇宙速度は第一宇宙速度の$\sqrt{2}$倍であることが分かる。

第二宇宙速度は数値的に

$$v=\sqrt{2\times 9.8\times 6.4\times 10^6}=11.2\mathrm{km/s}$$

11.2km/s以上の速度を持っていれば宇宙船は二度と地球に戻ってこなくなるといえる。

＜宇宙からの脱出速度＞

現在知られている最も確かな宇宙半径は4.40×10^{26}m（465億光年），最も確かな宇宙総質量は6.0×10^{53}kgである。このデータを基にして，宇宙自体がひとつの天体であると仮定したときの宇宙からの脱出速度を計算してみよう。

$$v=\sqrt{\frac{2GM}{R}}=\sqrt{\frac{2\times 6.67\times 10^{-11}\times 6.0\times 10^{53}}{4.40\times 10^{26}}}=3.0\times 10^8\mathrm{m/s}$$

この数値は光速度3.0×10^8m/sと同じ速度である。

恒星が一生の終わりに崩壊してつぶれ，脱出速度が光速度に達した天体をブラックホールと呼んでいる。光さえもこの天体から出ることができないので外から見ると黒く見えるはずなので，この名がある。脱出速度の計算から，宇宙自体もひとつのブラックホールであるかもしれない。

10.　第三宇宙速度

第三宇宙速度を計算してみよう。第三宇宙速度は太陽系から飛び出すのに必要な地球から打ち上げるロケットの最低速度である。

地球軌道上に宇宙船があるときの脱出速度Vは，太陽質量をM_S，地球軌道半径をRとす

ると，

$$\frac{1}{2}mV^2-\frac{GM_Sm}{R}=0 \quad より， \quad V=\sqrt{\frac{2GM_S}{R}}$$

地球の公転速度V_1は，運動方程式より

$$\frac{mV_2{}^2}{R}=\frac{GM_Sm}{R^2} \quad よって， \quad V_1=\sqrt{\frac{GM_S}{R}}$$

宇宙船は地球から飛び出した後，Vの速度を出していればよい。また，地球自体がV_1で動いているので，宇宙船は地球より$V-V_1$の速度だけ速ければよい。地球から飛び出した後$V-V_1$の速度になっていれば，太陽系から飛び出すことになる。

地球打ち上げ時の速度をv，地球半径をr，地球質量をMとすると，エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}=\frac{1}{2}m(V-V_1)^2$$

これを解くと

$$v=\sqrt{\frac{2GM}{r}+(V-V_1)^2}=\sqrt{\frac{2GM}{r}+\frac{GM_S}{R}(\sqrt{2}-1)^2}$$

万有引力定数　$G=6.673\times10^{-11}\mathrm{Nm^2/kg^2}$,

地球質量　$M=5.972\times10^{24}\mathrm{kg}$　太陽質量　$M_S=1.988\times10^{30}\mathrm{kg}$

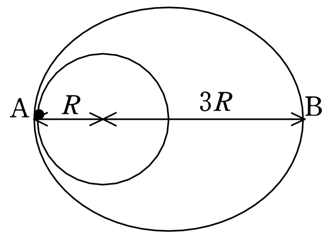
地球軌道半径　$R=1.496\times10^{11}\mathrm{m}$　地球半径　$r=6.378\times10^{6}\mathrm{m}$

を代入すると　$v=16.6\mathrm{km/s}$　となる。

11．楕円軌道例題

＜例題４＞楕円軌道

地球表面（半径R）すれすれに円軌道を回っている人工衛星がA点で速度を上げると、遠地点Bが距離$3R$の楕円軌道を描いた。A,B点での速度および楕円軌道での周期は円軌道での周期の何倍になったか求めよ。



＜解説＞

①　ケプラーの第二法則

$$Rv_A=3Rv_B$$

②　エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv_A{}^2-\frac{GMm}{R}=\frac{1}{2}mv_B{}^2-\frac{GMm}{3R}$$

この連立方程式を解くと　$v_A=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{GM}{3R}}$、$v_B=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{GM}{3R}}$

円軌道での周期をT、楕円軌道の周期をT'とすると、楕円軌道の半長径は$2R$なので、ケプラーの第三法則は

$$\frac{R^3}{T^2}=\frac{(2R)^3}{T'^2}$$

これを解くと　$T'=2\sqrt{2}\,T$

$2\sqrt{2}$倍の周期になる。

＜補足＞

ここでは周期が何倍かというのでケプラーの第三法則を使ったが、周期そのものを求めるのであれば、楕円軌道の周期は半長径と同じ半径の円軌道周期と同じなので半径$2R$の円軌道周期を計算すればよい。

その時の速度をvとすると、運動方程式は

$$m\frac{v^2}{2R}=\frac{GMm}{(2R)^2}$$

これを解くと　　$v=\sqrt{\frac{GM}{2R}}$

周期は　$T=\frac{2\pi\times 2R}{v}=4\pi R\sqrt{\frac{2R}{GM}}$