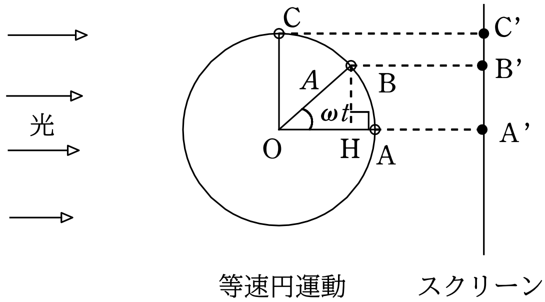
# 単振動

## １．単振動

円運動を真横から見たとき、物体は直線上の往復運動しているようにみえる。この運動を単振動という。単振動を考えるときは円運動の影として考えると良くわかる。

半径$A$の円周上を角速度$\omega$で等速円運動している物体がある。このとき真横から光が当たっているとし、反対側にスクリーンがあり、回転している物体の影がスクリーンに映っているものとする。

出発点をAとし、ここを基準として角度（位相）を考える。時刻0における影の位置をA’とする。




＜変位＞

$t$秒後の位置をBとする。中心角（位相）は$\omega t$であり、影の位置はB’である。このときのスクリーン上での基準の位置からのずれA’B’を**変位**という。単振動においても位相を考え、円運動しているときの中心角（位相）を単振動の位相と定義している。

BからOAに垂線をおろし、その足をHとする。BH＝A’B’である。すなわち、変位はBHの長さである。この変位を$x$とすると、回転半径が$A$であるから、

$$x = A\sin\omega t$$

が成立している。

＜振幅＞

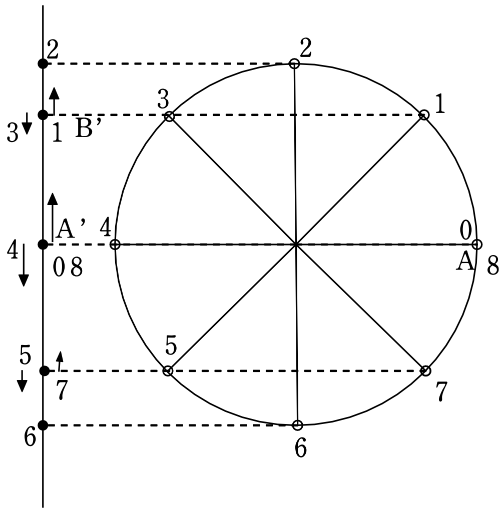
位相が$\dfrac{\pi}{2}$（90°）のときの円運動の位置をCとする。このときの影の位置はC’である。この位置は変位の最大値である。このときの変位（A’C’）を**振幅**という。

＜位相＞

周期8秒の単振動を考えてみよう。

周期8秒とは角速度が$\dfrac{\pi}{4}$[rad/s](45°/秒)の等速円運動の影の運動を意味する。

時刻0にA’（位相0）にあった物体は1秒後にB’の位置に来た。このときの位相は$\dfrac{\pi}{4}$である。このように、1秒ごとの単振動における物体の位置を右図に表している。物体のそばの数値は出発してからの時間を表わしている。




この図によれば、1秒後と3秒後は同じ位置であるが、1秒後は上向きに動いており、3秒後は下向きに動いている。位相は1秒後は$\dfrac{\pi}{4}$で3秒後は$\dfrac{3}{4}\pi$である。単振動の場合物体の位置を表すのに、変位で表わすと同じ位置で

はあるが速度の向きが違うものがあり、不便である。それに対して、位相で表わせば、変位、速度ともに区別できる。単振動における物体の位置は位相で表すのが最も良いことがわかる。例として5秒後の位置は位相が$\frac{5}{4}\pi$、7秒後の位置は位相が$\frac{7}{4}\pi$で表わすことができる。この位相を逆周りに表現して、5秒後は位相$-\frac{3}{4}\pi$、7秒後は位相$-\frac{\pi}{4}$でも良いのである。

**「単振動は位相を円運動しているときの角度$\theta$であらわす。」**

＜角振動数＞

単振動は等速円運動の影の運動であるから、単振動の位相も円運動と同じく一定の割合で変化する。その速度（円運動における角速度）を**角振動数**という。

基準の位置を出発してから$t$秒後の位相を$\theta$とすると、角振動数$\omega$は、

$$\omega = \frac{\theta}{t}$$

で表わされる。これも等速円運動と同じである。

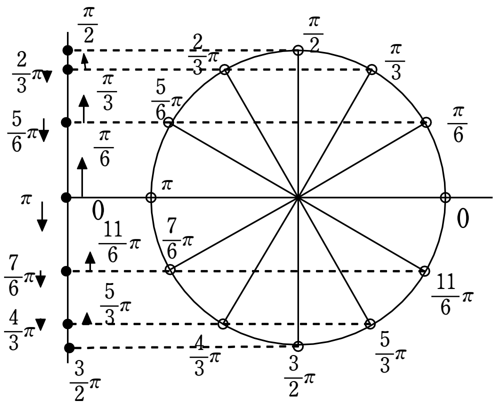
＜振動数＞

1秒間の振動回数は等速円運動の回転数に相当するものである。これを振動数という。円運動の回転数と同じ式$f = \frac{\omega}{2\pi}$がそのまま成立する。

## ２．単振動の特徴

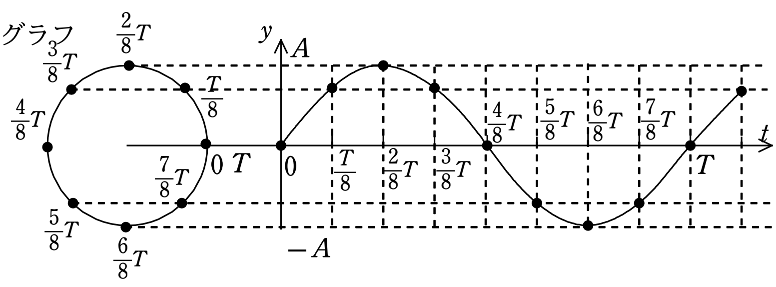
### (1) 単振動の位相

図に単振動の位相と円運動の位相を対比して表わしている。単振動の位相を読めるようにしておくこと。



### (2) 単振動の変位のグラフ

振幅$A$、周期$T$の単振動における各時刻の変位をグラフにしてみると右図のようになる。正弦曲線である。



単振動における変位を表わす式は、各振動数を$\omega$とすると、

$$y = A\sin\omega t$$

である。$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ より、$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ となるので、これを代入すると、

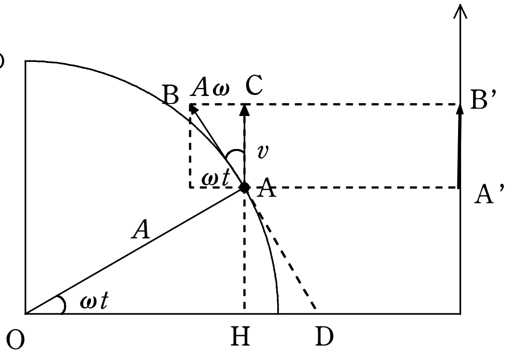
$$y = A\sin 2\pi\frac{t}{T}$$

となる。これが、上のグラフの式である。

この式は物体が原点より動き始めてから$t$秒後の変位を表わす式である。

(3)　単振動における物体の速度

回転半径$r$、角速度$\omega$の等速円運動の周回速度は$r\omega$で表わされるので、回転半径$A$（振幅）の場合の周回速度はAB＝$A\omega$となる。単振動は円運動の影と考えてよいので、単振動における物体の速度A’B’＝$v$は図のように周回速度$A\omega$の鉛直成分と考えることができる。




よって、単振動の速度はA’B’（AC）となる。

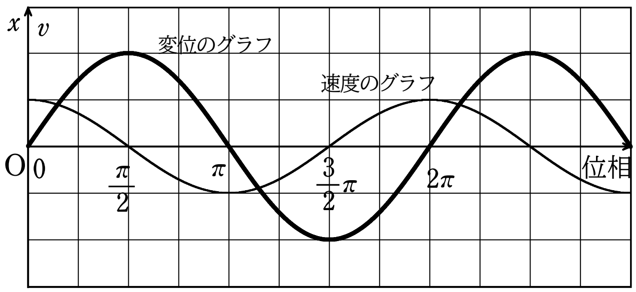
等速円運動の速度は円周の接線方向であるので、∠OAD＝90°であり、

△OAD∽△AHDとなる。そのため、∠HAD＝∠AOH＝$\omega t$となり、∠BAC＝$\omega t$である。よって、AC＝$A\omega\cos\omega t$となる。

これが単振動における物体の速度を表わす式である。この式は変位を微分することによって求めることもできる。

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(A\sin\omega t) = A\omega\cos\omega t$$

右のグラフは単振動の変位と速度を横軸を位相として同じグラフ上に描いたものである。このグラフにおいて太線は変位、細線は速度を表わしている。



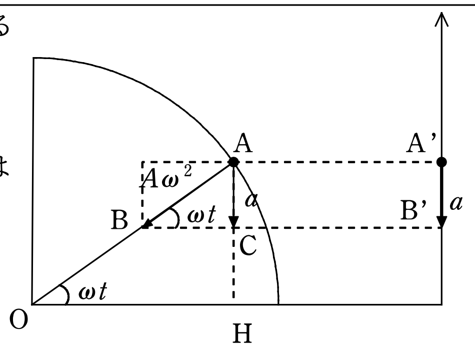

このグラフより、速度が正の向きに最大となるのは位相0のとき、負の向きで最大になるのは位相$\pi$のときであることが分かる。いずれにしても変位が0のときに物体は最も速くなるのである。それに対し静止するのは位相$\dfrac{\pi}{2}$のときと、位相$\dfrac{3}{2}\pi$のときで、これは、最上端と最下端である。

このグラフをよく見て、変位と速度がどのような関係を持っているのか確認しておこう。

(4)　単振動をしている物体の加速度

次に単振動をしている物体の加速度について考えてみよう。

半径$r$で角速度$\omega$で等速円運動している物体の加速度（向心加速度）は$r\omega^2$であるから、回転半径（振幅）$A$の場合は$A\omega^2$となる。単振動の場合はこの加速度ABの影（A’B’）、すなわち、鉛直成分ACとなる。
△ABC∽△AOHより、
∠ABC＝$\omega t$となるので、



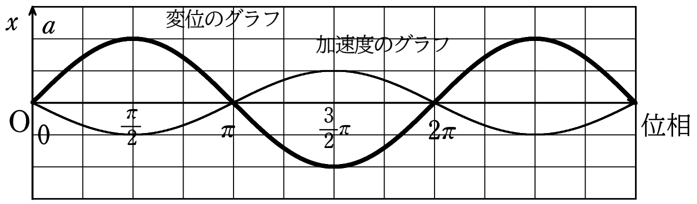

AC＝A’B’＝$-A\omega^2\sin\omega t$となる。
ここで、マイナスが付いているのは加速度が鉛直下向きになっているためである。この式も速度と同じく微分を用いて求めることができる。

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(A\omega\cos\omega t)=-A\omega^2\sin\omega t$$

これが単振動における物体の加速度で復元加速度という。

次に、どの変位のときに加速度が大きくてどの変位のときに加速度が小さいか、というような加速度と変位の関係を調べてみよう。

右図は太線の変位を示すグラフと細線の加速度を示すグラフを重ねて描いたものである。




これを見ると、変位と加速度は常に逆向きであることがわかる。また、変位が大きくなればなるほど加速度も大きくなっており、変位0のときは加速度も0である。

⑸　初期位相がある場合

ここまでをまとめると、

$$\begin{cases} x=A\sin\omega t \\ v=A\omega\cos\omega t \\ a=-A\omega^2\sin\omega t \end{cases}$$

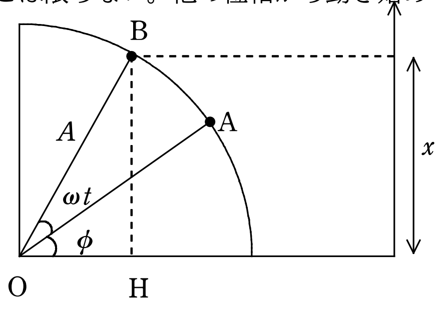
である。この三公式が単振動の三公式である。しかし、実質は最初の変位の式のみで後は必要なときに微分して求めるのが手っ取り早い。

しかし、ここまでは、物体はすべて位相0の位置から動き始めたことになっているが、実際問題として位相が0の位置から常に動き始めるとは限らない。他の位相から動き始めた場合はどう考えればよいのであろうか？

この場合も等速円運動の影であるとして考えればよい。時刻0のとき、A点にあった物質が$t$秒後にB点まで来たとする。この$t$秒後の変位$x$は△BOHに注目することにより、

$x=A\sin(\omega t+\phi)$

である。



微分することにより、速度と加速度を求めると、

$v=A\omega\cos(\omega t+\phi)$

$a=-A\omega^2\sin(\omega t+\phi)$

となる。

まとめると、

$$\begin{cases} x=A\sin(\omega t+\phi) \\ v=A\omega\cos(\omega t+\phi) \\ a=-A\omega^2\sin(\omega t+\phi) \end{cases}$$

となる。

**「単振動は等速円運動の影として考えると考えやすい。」**

３． 単振動の運動方程式

(1) 復元加速度

単振動の運動状態を示す式をまとめると、

$$\begin{cases} x=A\sin(\omega t+\phi) \\ v=A\omega\cos(\omega t+\phi) \\ a=-A\omega^2\sin(\omega t+\phi) \end{cases}$$

ここで、$x$と$a$がよく似た式になっている。この2式から$A\sin(\omega t+\phi)$を消去すると、

$a=-\omega^2 x$

となる。これが復元加速度と変位の関係を表わす式である。単振動において$\omega$は一定であるから、この式より、

**「復元加速度は変位と逆向きで大きさは変位に比例する」**

ことがわかる。

運動方程式に代入すると、

$F=ma=-m\omega^2 x$

となる。この力が、復元加速度を生じさせており、単振動を引き起こす力である。この力を**復元力**という。復元加速度と同様に復元力は変位と逆向きで大きさは変位に比例するといえる。逆に言えば物体に作用する力を計算したとき、その力がつりあいの位置からのずれ（変位）に比例していれば、$\omega$が一定となるために、単振動であるといえる。

まとめると、

**「復元力が変位に比例していれば、その物体の運動は単振動である。」**

これが、多くの問題を解くとき、単振動かどうかを判定する条件となる。単振動でないのに単振動の公式を使ってはならないのは明らかである。単振動の問題を解くときはこの条件で必ず単振動かどうかの判定をすること。

物体のつりあいの位置は力がつりあっているのであるから加速度は0である。もしこの物体が単振動しているならば、この位置は変位0の位置となる。このことを用いて単振動の問題の一般的解き方をまとめると次のようになる。

単振動の一般的解き方

**① 物体に作用する力より、つりあいの位置を調べる。**

**② つりあいの位置より$x$ずらして、元に戻ろうとする力（復元力）を計算する。**

**③ 単振動と確認されたら復元加速度を$\omega^2 x$として運動方程式を立てる。**

この方法でおそらくすべての単振動の問題が解けるはずである。

４． 単振動のエネルギー

単振動において各時刻の力学的エネルギーはどうなっているのであろうか？当然エネルギー保存則は成立しているであろうがこれを証明してみよう。

(1) 単振動の位置エネルギー

単振動は変位$x$に比例する復元力が作用する。その大きさ$F$は、$F=ma=m\omega^2 x$である。これは$m\omega^2=k$とおくと、$F=kx$となる。この力はばねと同じ力であるから、ばねと同じ位置エネルギーが単振動の位置エネルギーとなる。よって、単振動の位置エネルギー$U$は

$$U=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

(2) エネルギー保存則

単振動の式は

$$\begin{cases} x=A\sin(\omega t+\phi) \\ v=A\omega\cos(\omega t+\phi) \\ a=-A\omega^2\sin(\omega t+\phi) \end{cases}$$

これより、力学的エネルギーの和は

$$E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}m\omega^2 x^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t+\phi)+\frac{1}{2}m\omega^2 A^2\sin^2(\omega t+\phi)$$

$$=\frac{1}{2}m\omega^2 A^2(\cos^2(\omega t+\phi)+\sin^2(\omega t+\phi))=\frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

となり、単振動において$m$、$A$、$\omega$いずれも定数であるので、$E$は一定である。これにて単振動におけるエネルギー保存則が成立していることが証明できた。

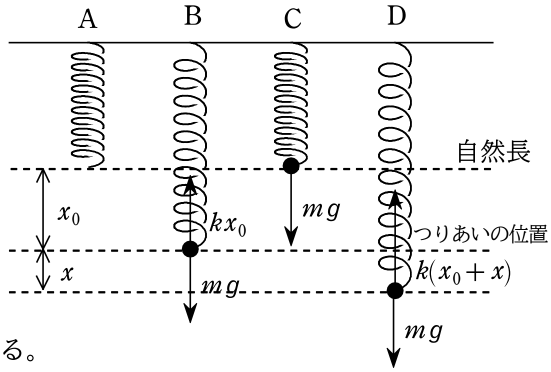
この式に$f=\dfrac{\omega}{2\pi}$を使うと、

$$E=2\pi^2 mf^2A^2$$

単振動のエネルギーは振動数の２乗と振幅の２乗の積に比例することがわかる。

５． 鉛直ばね振り子

右図においてAはばねに何もつけず自然の状態でつるしたもので、Bは質量$m$のおもりをつるしてつりあいの位置で静かに離した状態で、このときばねは$x_0$伸びていた。このおもりを最初の自然長の位置まで持ち上げて静かに離すと単振動を始めた。この最初の位置がCである。Dはつりあいの位置よりさらに$x$伸ばした位置を示している。このときのばね振り子の運動状態を考えてみよう。




**① つりあいの位置の確認**

単振動では、まず、つりあいの位置を確認することが大切である。Bの状態で、力がつりあっているので、

$$kx_0=mg$$

が成り立っている。これより、$x_0=\dfrac{mg}{k}$となる。これがつりあいの位置である。

単振動ではつりあいの位置を最初に確認しておかないと問題が解けないことがあるので注意を要する。このつりあいの位置が単振動における変位0の位置となる。単振動ではこの位置を中心として上下（左右）対称に運動する。

**② $x$伸ばして復元力を計算し単振動かどうか確認する**

Dの状態はつりあいの位置よりも$x$伸びている。この状態で、復元力を計算する。下向きを正とすると、復元力$F$はばねの弾性力と重力の差になるので、

$$F=-k(x_0+x)+mg$$

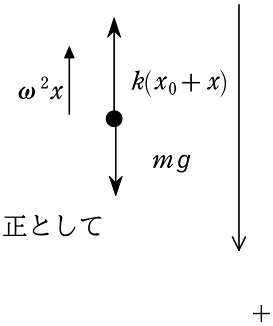
この復元力は一見$x$に比例してなく、単振動にならないと思えるが、(1)のつりあいの式を使えば

$$F=-k(x_0+x)+mg=-kx$$

となる。

**③ 単振動であることを確認して復元加速度$\omega^2x$を用いて運動方程式**

復元力$F$は$F=-kx$なので、変位$x$に比例している。この振動は単振動であることが分かる。このとき、つりあいの式を使ったが最初につりあいの条件式$kx_0=mg$を立てていないと、この式変形に気付かないことが多い。そのために最初につりあいの条件式を立てておく必要がある。




下向きを正としてこの単振動の運動方程式を立ててみよう。

加速度は復元力と同じ方向に$\omega^2 x$、質量は$m$であるから、

$$F = -kx = m(-\omega^2 x)$$

となり、これを解くと、$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$が得られる。

このときの運動方程式は下向きを正として計算したが上向きを正として計算しても問題はない。その場合運動方程式の符号は正となり、

$$kx = m\omega^2 x$$

である。ベクトルとして計算する時は復元力、復元加速度ともに負の値をとっているが、スカラーで計算する時は最初から正の数として計算してもよい。

角振動数が求められれば、そこから、周期、振動数は次のようにして求められる。

周期　$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

振動数　$f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

(4)　振幅の計算

振幅は最上端あるいは最下端とつりあいの位置との距離（等速円運動の回転半径）である。この場合つりあいの位置から最上端（最初の位置）との間は$x_0$であるので、振幅は$x_0$となる。最上端あるいは最下端の位置が不明で速度がわかっている場合はエネルギー保存則を使う。たとえばつりあいの位置での速度が$v_0$であるとすると、つりあいの位置での運動エネルギーが最上端での位置エネルギーになるので、$\dfrac{1}{2}m{v_0}^2 = \dfrac{1}{2}k{x_0}^2$より、$x_0$を求めることができる。

(5)　初期位相の計算

初期位相は時刻0の位置での位相である。この場合は最初最上端に物体があった。単純に考えれば最上端は位相$\dfrac{\pi}{2}$の位置であるが、この場合下向きを正としているので、$\dfrac{3}{2}\pi$となる。どちら向きを正にしているのかを確認して初期位相を調べなければならない。

(6)　変位、速度、加速度の式

変位を表わす式、　$x = A\sin(\omega t + \phi)$に各データを代入すると。

$$x = x_0 \sin\left(\omega t + \frac{3}{2}\pi\right) = \frac{mg}{k}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \frac{3}{2}\pi\right) = -\frac{mg}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

これを微分すると、

$$v = g\sqrt{\frac{m}{k}}\,\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

さらに微分すると、

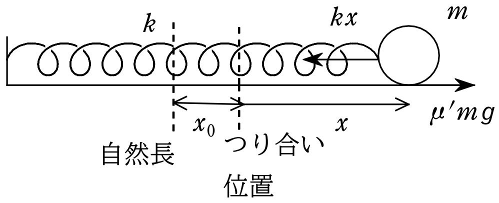
$$a = g\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

となる。

６． 単振動例題

＜例題１＞ 摩擦力が関係する単振動

ばね定数$k$のばねに質量$m$のおもりを取り付け、動摩擦係数$\mu'$の水平面に置き、他端を固定した。このおもりを持って静かに$d$だけ引き延ばして手を離したら、このおもりは暫らく滑ってやがて静止した。




静止するまでの時間を求めよ。

＜解説＞

この運動は最後に静止するので単振動であることに気付きにくいのであるが、単振動である。

**① つり合いの位置確認**

通常つり合いの位置は手を離したところ静止した状態を保つ位置であるが、この場合はたらいている摩擦力は動摩擦力である。静止したら動摩擦力ははたらかないのである。よって、静止位置が釣り合いの位置ではない。自然長より$x_0$伸びた位置が釣り合いの位置とすれば、ばねの弾性力が動摩擦力とつりあっているので、

$$kx_0 = \mu' mg$$

**② つり合いの位置より$x$伸ばして復元力の計算**

つり合いの位置$x_0$より$x$伸ばしているので、ばねの伸びは$x+x_0$で、ばねの弾性力は$k(x+x_0)$となる。よって、復元力$F$は

$$F = k(x+x_0) - \mu' mg = kx$$

ここではスカラーで計算しているので復元力は正となっている。

**③ 単振動であることを確認して運動方程式**

復元力$F$が$x$に比例しているのでこの運動は単振動であることが分かる。復元加速度$\omega^2 x$として運動方程式を立てると、

$$kx = m\omega^2 x \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{周期}\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

単振動は静止しないが、この運動はばねが最も縮んだ時に静止し、その後静止したままとなる。これは、静止した瞬間、摩擦力が動摩擦から静止摩擦に変わるためである。摩擦力がはたらいている単振動の問題は運動の途中で摩擦力の種類が変わることがあるので注意を要する。

この場合動き始めてから静止するまでは、周期の半分となるので、解答は $\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ となる。

＜補足＞

再び静止する位置$a$はエネルギー保存則より求められる。

$$\frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}ka^2 + \mu' mg(d-a)$$

これを解くと　$a = \frac{2\mu' mg}{k} - d$

　この位置でのばねの弾性力$F$は　$F = 2\mu' mg - kd$である。

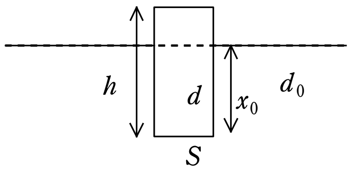
これが、静止摩擦係数を$\mu$として、最大摩擦力$\mu mg$より大きければ再び動き出すが小さければ静止したままとなる。再び動き始める条件は

　$2\mu' mg - kd > \mu mg$

　$d > \frac{2\mu' - \mu}{k} mg$　が成立した時である。

＜例題２＞　浮力による単振動

　密度$d_0$の水面に密度$d$、断面積$S$、高さ$h$の角柱が浮いている。この角柱を一瞬沈めて振動させた時、振動周期を求めよ。




＜解説＞

**①　つり合いの位置確認**

　つり合いの位置における水に沈んでいる部分の高さを$x_0$とする。

　この角柱の重力は　$dShg$　（密度×体積×重力加速度）

　浮力は　$d_0 S x_0 g$

　つりあっているので　$dShg = d_0 S x_0 g$

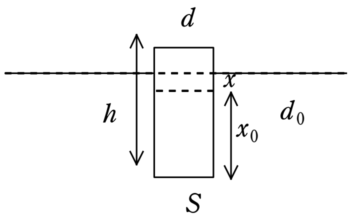
**②　つり合いの位置より$x$ずらして復元力の計算**

　つり合いの位置より$x$さらに沈めた時の浮力は

　$d_0 S(x + x_0)g$

よって、復元力$F$は

　$F = d_0 S(x + x_0)g - dShg = d_0 Sgx$




**③　単振動であることを確認して運動方程式**

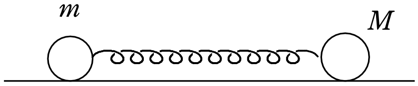
復元力$F$が変位$x$に比例しているので、この振動は単振動である。復元加速度$\omega^2 x$として運動方程式を立てると、

　$d_0 Sgx = dSh\omega^2 x$

これより、　$\omega = \sqrt{\frac{d_0 g}{dh}}$　　よって、周期は　$T = 2\pi\sqrt{\frac{dh}{d_0 g}}$

＜例題３＞　慣性力を使った単振動

　滑らかな水平面上に，質量$M$と$m$のおもりを置き，ばね定数$k$のばねでつなぎ，$M,m$を引張って，静かに離し振動させた。このときの振動周期はいくらか。




＜解説＞

　ばねによる単振動の計算には動かない点（ばねの端）が必要であるが，このばねは両端が動いている。一般に動いてはならないところが動いている場合は慣性力あるいは相対速度を用いて解くとよい。この場合加速度運動なので，慣性力を用いることになる。

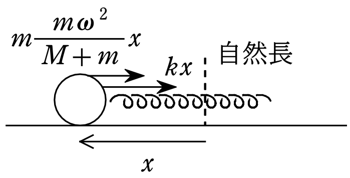
# 単振動

**①　つりあいの位置確認**

通常つりあいの位置はその位置で手を離すと静止したままになる位置である。この場合はばねが自然長になる位置となる。

**②　つりあいの位置より$x$ずらして，復元力を計算する。**

$M$が動かないとして$m$の重りについてのみ考える。ばねを自然長から$x$伸ばすと，ばねの力$kx$がはたらく。このとき，$M$から$m$を見た相対加速度の大きさは$\omega^2x$である。この加速度が$m:M$に分けられるので，




$M$が$\dfrac{m\omega^2}{M+m}x$，$m$が$\dfrac{M\omega^2}{M+m}x$の加速度運動をしていることになる。よって，$M$から見た慣性力$m\dfrac{m\omega^2}{M+m}x$を右向きに加える。

よって，復元力は$kx+m\dfrac{m\omega^2}{M+m}x$であり，これは単振動である。運動方程式は$M$から見た加速度は$\omega^2x$なので，

$$m\omega^2x=kx+m\frac{m\omega^2}{M+m}x$$

これを解くと

$$\omega=\sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}}\qquad \text{よって，周期は}\quad 2\pi\sqrt{\frac{Mm}{k(M+m)}}$$

＜別解＞

動いてはならないところが動くから求められないので，動かないところに目をつけて解く方法もある。

$M$，$m$の重心位置は動かないので，ばねの重心位置を固定した振動として解く事にする。この場合ばねの長さが変わるので，ばね定数に変化が起こる。

ばね定数$k$のばね$n$個を直列に連結し，$kx$の力で引張ると，それぞれのばねが$x$伸びるのでこの連結ばねは$nx$伸びることになる。この連結ばねのばね定数$k'$は

$$k'=\frac{F}{x'}=\frac{kx}{nx}=\frac{k}{n}$$

これは，ばね定数はばねの長さに反比例することを意味している。

$M$，$m$のおもりを取り付けたばねの重心の位置は$m$，$M$を$M:m$に内分する点である。よって，$m$側のばねの長さは$\dfrac{M}{M+m}$倍になるので，ばね定数は　$\dfrac{M+m}{M}k$となる。

このばねを$x$伸ばしたときの復元力は

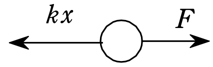
$\dfrac{M+m}{M}kx$となるので，単振動である。復元加速度は$\omega^2x$となるので，運動方程式は

$$m\omega^2x=\frac{M+m}{M}kx$$

これを解くと　$\omega=\sqrt{\dfrac{k(M+m)}{Mm}}$　（以下同様）

７． 単振動一般論

　右図のように、一定の力$F$が一方方向にはたらき、他方に位置座標$x$に比例する力$kx$がはたらいた時、この物体の運動は単振動である。




＜証明＞

つり合いの位置の位置座標を$x_0$とすると、　$kx_0=F$

つり合いの位置より$s$ずらした位置（位置座標$x_0+s$）の復元力は　$k(x_0+s)-F=ks$

復元力がつり合いの位置からの変位$s$に比例しているので、この運動は単振動と言える。

　復元加速度は$\omega^2 s$なので，運動方程式は

$$ks=m\omega^2 s$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

　よって，周期は　$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

この式に一定の力$F$は含まれていない。

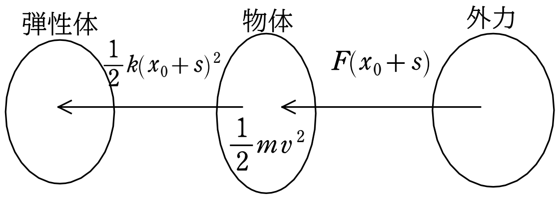
**「単振動の周期には一定の力$F$は無関係である。」**

といえる。

＜エネルギー保存則＞

　位置座標0の位置からつり合いの位置$x_0$からの変位$s$（位置座標$x_0+s$）に移動させたときの外力$F$による仕事は$F(x_0+s)$である。

　また，$x_0+s$位置がずれるときの弾性体による仕事は$-\frac{1}{2}k(x_0+s)^2$である。これをもとにエネルギーの流れ図を書くと




流れ図より

$$-\frac{1}{2}k(x_0+s)^2+F(x_0+s)=\frac{1}{2}mv^2$$

$$-\frac{1}{2}kx_0{}^2-kx_0s-\frac{1}{2}ks^2+Fx_0+Fs=\frac{1}{2}mv^2$$

$kx_0=F$より

$$-\frac{1}{2}kx_0{}^2-kx_0s-\frac{1}{2}ks^2+kx_0{}^2+kx_0s=\frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{1}{2}kx_0{}^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}ks^2$$

　この式は変位0の位置を基準としたエネルギー保存則でであると同時に、つり合いの位

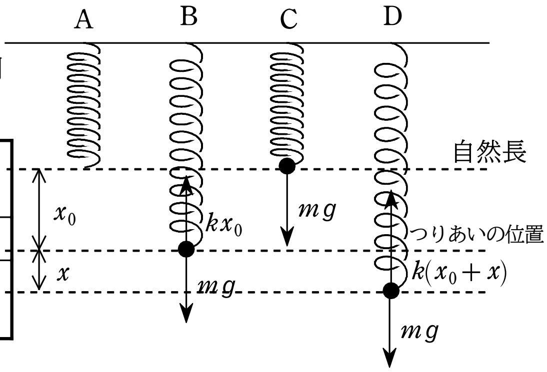
置を基準とした変位でエネルギー保存則が成立していることを意味している。

**「つりあいの位置からの変位でエネルギー保存則を使うこともできる。」**

しかし，このときに一定の力$F$が含まれていないことに注意が必要である。

例　鉛直ばね振り子の場合

　自然長の位置Cを位置エネルギーの基準として右図Dの状態とのエネルギー保存則の式を立てると，




| | $\frac{1}{2}mv^2$ | $\frac{1}{2}kx^2$ | $mgh$ |
|---|---|---|---|
| $C$ | 0 | 0 | 0 |
| $D$ | $\frac{1}{2}mv^2$ | $\frac{1}{2}k(x_0+x)^2$ | $-mg(x_0+x)$ |

エネルギー保存則の式を立てると

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}k(x_0+x)^2-mg(x_0+x)=0$$

展開すると

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx_0{}^2+kx_0x+\frac{1}{2}kx^2-mgx_0-mgx=0$$

Bのつり合いの条件より　$kx_0=mg$より，$mg$を消去すると，

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx_0{}^2+kx_0x+\frac{1}{2}kx^2-kx_0{}^2-kx_0x=0$$

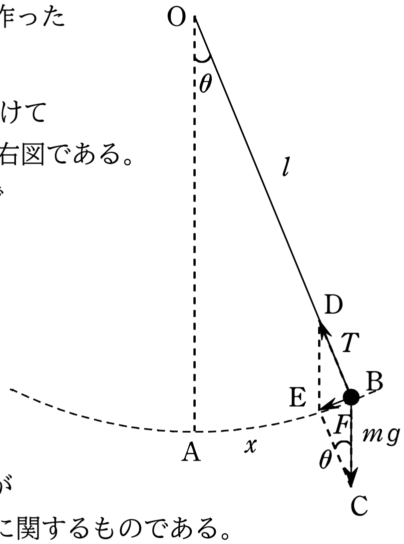
$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}kx_0{}^2+\frac{1}{2}kx^2=0$$

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kx_0{}^2$$

このエネルギー保存則の式は，重力を無視した状態でのつり合いの位置を基準としたエネルギー保存則の式である。

　この式は便利であるが，中途半端な知識で使うと間違えやすいので，この式の成り立ちをしっかりと理解したうえで使わなければならない。

８．単振子




長いひもにおもりを取り付けて振り子を作った

この振り子の運動を調べてみよう。

長さ$l$のひもに質量$m$のおもりを取り付けて
この長さ$x$（中心角$\theta$）だけずらした図が右図である。
このとき、おもりに作用する重力は$mg$で
張力を$T$とする。

**①　つりあいの位置の確認**

つりあいの位置とは物体をその位置に置き静かに手を離したとき物体がそのままの位置で静止しているその位置である。この場合はA点である。

A点では張力と重力のつり合いがあるが単振動で必要なつりあいの式は動く方向に関するものである。この場合A点でおもりは左右に動くのであるから、左右方向のつりあいの式が必要なのである。A点では左右方向に力が作用していないので、つりあいの式は必要ない。

**②　復元力を計算**

点Bにあるときの復元力を$F$とすると、この復元力は重力$mg$と張力$T$の合力になっている。このとき、扇形OABの中心角を$\theta$とすると、∠BCE＝$\theta$であるため、

$$F=mg\sin\theta$$

となる。復元力はあくまで、変位$x$で表わさなければならない。そこで、$\theta$と$x$の関係を扇形OABから求めると、$x=l\theta$である。この式により$\theta$を消去すると、

$$F=mg\sin\frac{x}{l}$$

となる。

**③　単振動であることを確認して運動方程式**

この復元力は$x$に比例していない。つまり、この振り子の運動は単振動ではないのである。単振動でないときは微小振動（$x\fallingdotseq 0$）のときに単振動になっていることが多いのでそれを調べてみる必要がある。

$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$より、$\theta\fallingdotseq 0$のとき、$\sin\theta\fallingdotseq\theta$といえる。よって、$x\fallingdotseq 0$のとき、

$\displaystyle\sin\frac{x}{l}\fallingdotseq\frac{x}{l}$となる。この関係により、復元力は

$$F=mg\sin\frac{x}{l}\fallingdotseq\frac{mg}{l}x$$

となる。この式は復元力が$x$に比例していることを意味している。つまり、微小振動のときに限って振り子は単振動になるのである。

このように振幅が大きいときは単振動でなくても、微小振動のときのみ単振動になる場合がある。

　最初から微小振動の時の単振動を求めることが分かっている場合はもっとスムーズに計算できる。

　$x \fallingdotseq 0$のときは扇形OABは二等辺三角形あるいは直角三角形と区別ができないので、形OAB∽△CBEといえる。

よって、OA:AB＝CB:BEとなり、

$$l:x=mg:F$$

これより、

$$F=\frac{mg}{l}x$$

が成り立つ。

　微小振動に限って単振動であることがわかったので、その復元力は$\omega^2 x$である。運動方程式は

$$m\omega^2 x=\frac{mg}{l}x$$

となる。これを解くと、

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$$

よって、周期は

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

　この周期にはおもりの質量が含まれていない。この式により、振り子の長さと周期を測定することにより重力加速度の大きさを測定することができる。

微小振動の時の単振動でよく使うのが

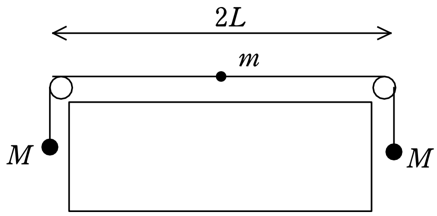
**「頂角が0に近くて同じ場合、二等辺三角形∽直角三角形∽扇形と考えてよい。」**

## ９．微小振動の単振動例題

＜例題３＞

　長さ$2L$の台の両端に滑車を取り付けひもを張った。中央に質量$m$の小物体、両端に質量$M$のおもりを取り付け右図のように滑車を通して取り付けた。

　$M>>m$として、中央の小物体を微小振動させた時の振動周期を求めよ。



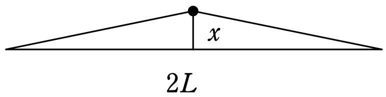

＜解説＞

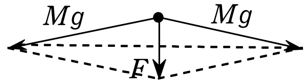
**①　つり合いの位置確認**

　つり合いの位置はひもが直線状になっている位置である。本当は重力により若干下がっているが、$M>>m$なので、この問題の場合はそれを考えない。

**②　つりあいの位置より$x$ずらして復元力の計算**

おもりを上方に$x$ずらしたときの状態を示したのが右上の図で、その時小物体にはたらいている力を示したのが右下の図である。




両者の直角三角形は相似といえるが、長さの分かっている辺が対応していない。上では底辺と高さがわかっており、下では斜辺と高さが分かっている。

三平方の定理を使って計算できるが、この振動は微小振動なので、$L>>x$となり、頂角は0に近い直角三角形である。これは、二等辺三角形と同等と考えることができ、底辺と斜辺は等しいと考えてよいので、

$$L:x=Mg:\frac{F}{2}$$

が成立する。よって、

$$F=\frac{2Mg}{L}x$$

**③　単振動であることを確認して運動方程式**

微小振動の場合、復元力$F$は変位$x$に比例しているので、この微小振動は単振動である。よって、運動方程式は

$$\frac{2Mg}{L}x=m\omega^2x$$

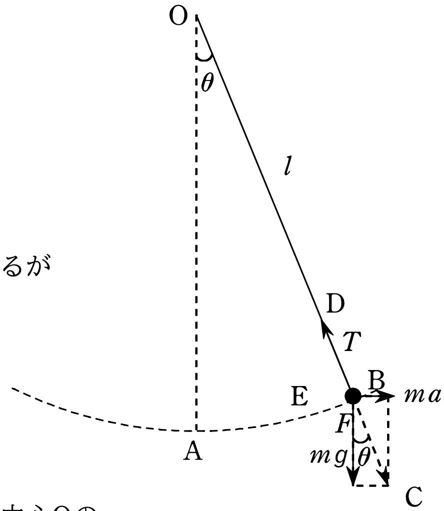
これを解くと　$\omega=\sqrt{\frac{2Mg}{mL}}$　　周期は　$2\pi\sqrt{\frac{mL}{2Mg}}$

＜例題４＞　この振り子が加速度$a$の電車内で微小振動している場合

加速度$a$で加速中の電車の中で長さ$l$のひもに質量$m$のおもりを取り付けた単振り子の周期を求めよ。

＜解説＞

**①　つりあいの位置の確認**



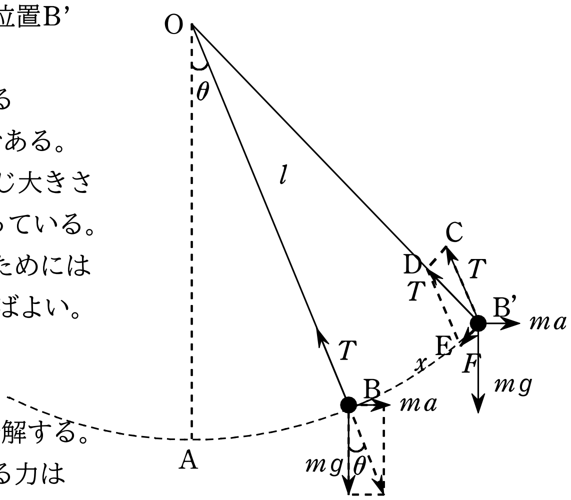

この振り子自体が加速しているので慣性力を考えることにする。慣性力を使わなくてもできるが慣性力を使わない場合、単振動の加速度と電車の加速度が重なるのでその区別で混乱が起こりやすい。この場合慣性力を使ったほうが問題を考えやすい。

最初に慣性力を使ったつり合いの位置を調べることにする。つりあいの位置は振り子の中心Oの真下Aから角度$\theta$の位置とする。この場合慣性力$ma$と重力$mg$と、張力$T$がつりあっている。　つりあいの関係式は、

$T\cos\theta=mg$　　$T\sin\theta=ma$

簡単にすると　　$T=m\sqrt{g^2+a^2}$

**②　つりあいの位置より$x$ずらして復元力の計算**




つりあいの位置Bより$x$ずらした位置B'における復元力を計算してみよう。

B'の位置のおもりに作用している力は張力$T$と慣性力$ma$と重力$mg$である。このうち、$ma$と$mg$は同じ方向・同じ大きさであるが、張力はその方向が異なっている。

B'点でつりあいの条件式を使うためには張力$T$がBの位置と同じ方向であればよい。よって、張力$T$（B'D）をB点での張力と同じ方向成分（B'C）と、復元力方向の成分（B'E＝$F$）に分解する。そうすると、B'のおもりに作用する力は重力$mg$、慣性力$ma$、張力$T$（B'C）と復元力$F$の合力である。このうち、重力$mg$、慣性力$ma$、張力$T$（B'C）がB点でのつりあい条件によってつりあっているので、結局B'点での合力は復元力$F$のみとなる。

ここにおいて微小振動であるために$x \fallingdotseq 0$と考えてよいので、△DB'E∽扇形OBB'といえる。よって、OB:BB'＝DB':B'Eである。この結果

$l:x=T:F$

が成り立つ。復元力$F$は　$F=\dfrac{T}{l}x$　である。また、つりあいの条件式より

$T=m\sqrt{g^2+a^2}$であるので、

$$F=\frac{m\sqrt{g^2+a^2}}{l}x$$

である。よって、運動方程式は

$$\frac{m\sqrt{g^2+a^2}}{l}x=m\omega^2 x$$

となり、これを解くと

$$\omega=\sqrt{\frac{\sqrt{g^2+a^2}}{l}}$$

周期は

$$P=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2+a^2}}}$$

となる。