等速円運動

１．回転速度

円周上を一定の速さで回転する運動を等速円運動という。等速円運動では角度に弧度法を使うので、まず、弧度法の復習から始めよう。

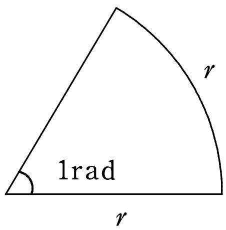
(1) 弧度法

角度は通常1周360°の度を使っているが、この単位は計算上極めて不便である。たとえば中心角θ、半径rの弧の長さlは、θを度で表わせば

$$l=\frac{2\pi\theta}{360}r$$

と、かなり複雑である。

そこで、考えられたのは弧度法である。この角度の定義は半径と同じこの長さをもつ扇形の中心角を1rad（ラジアン）とするものである。



扇形の中心角が2倍になると、弧の長さも2倍になる。
すなわち、弧の長さと中心角は比例するのである。
中心角がθ[rad]のときの弧の長さlは、中心角が基準1radのθ倍になっているので、弧の長さもθ倍になり、

$$l=r\theta$$

角度を度で表わした場合より、かなり簡単である。

・1周は何radか

円周は$2\pi r$であるので、$l=2\pi r$を上の式に代入すると、$2\pi r=r\theta$となり、

$$\theta=2\pi$$

となる。

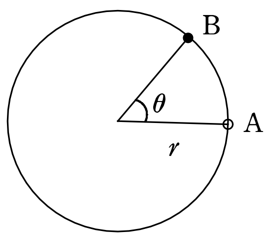
「1周（360°）は2π[rad]である。」

以後、角度は特に指定がない以上弧度法を遣うものとする。

(2) 等速円運動の要素

それでは等速円運動について考えてみよう。まず、等速円運動で扱われるさまざまな要素をまとめてみよう。

半径rの円周上を等速で円運動している物体がある。
この物体は時刻0において、Aの位置にいた。
ここを基準の位置とする。



＜位相＞

時刻tにおいてBの位置に移動した。Aからの角度をθとする。このθを**位相**という。

＜角速度＞

円運動における回転速度を表わすのに、1秒あたりの回転角度を使う方法がある。これを**角速度**という。角速度は円運動における回転速度の基準として使われる。この場合t秒間でθ[rad]回転しているので、角速度ωは

$$\omega=\frac{\theta}{t}$$

で定義される。
＜周回速度＞
　弧長ABは$l=r\theta$より、$r\theta$である。この物体の速さvは1秒あたりの移動距離である。この場合、t秒で円弧上を$r\theta$移動しているので、物体の速さvは

$$v=\frac{r\theta}{t}$$

$\theta=\omega t$であるから、これを代入して、

$$v=r\omega$$

となる。これを周回速度という。
＜周期＞
　円運動は1周する時間が重要であるが、これを**周期**という。ゆっくりとした回転のときに周期で表わすとわかりやすい。周期をTとすると、1周（2π[rad]）回転するのにT秒かかっていることになるので、角速度ωすなわち1秒あたりの回転角度は

$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$

これより、

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

となる。
＜回転数＞
　円運動の回転が速いときは周期で表わすよりも、1秒間の回転数で表わすほうがわかりやすい。これを回転数という。回転数fとは1秒間にf回転しているということである。
1周2π[rad]であるから、1秒でf周、すなわち$2\pi f$[rad]回転していることになる。これは、角速度ωである。よって、

$$\omega=2\pi f$$

これより、

$$f=\frac{\omega}{2\pi}$$

波動ではfとTとの関係が良く用いられる。fとTの関係は、$T=\frac{2\pi}{\omega}$、$f=\frac{\omega}{2\pi}$より、

$$T=\frac{1}{f}$$

となる。

　回転速度を表わす方法は角速度、周回速度、周期、回転数と4通りあり、よく整理しないと混乱を招く。そこで、すべてを角速度基準で表わしておくとよい。そうしておくと、角速度さえ求めれば、そこから、必要なものが求められることになる。

回転速度
$$\begin{cases} v = r\omega \\ T = \dfrac{2\pi}{\omega} \\ f = \dfrac{\omega}{2\pi} \end{cases}$$

なお、波動では$T = \dfrac{1}{f}$もよく使われる。

２． 向心加速度

⑴ 速度の変化

等速円運動では、周を回っている物体の速さは一定であるがその方向は常に変化している。1図において、A点にいるときの速度とB点での速度は大きさが同じで方向のみが少し異なる。

中心角∠AOB＝θとすると、∠PBQ＝θとなる。

＜証明＞

∠BHO＝90°　なので、

∠AOB＋∠OBH＝90°　･･･①

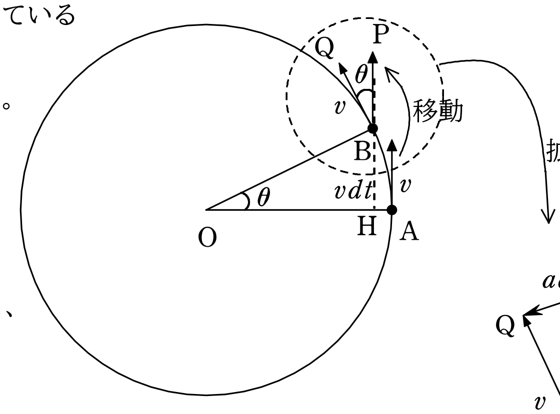
また、∠OBQ＝90°なので、

∠OBH＋∠PBQ＝90°　･･･②

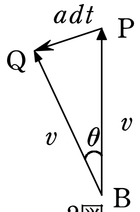
①②より、∠AOB＝∠PBQ＝θ

中心角の変化と同じだけ速度の方向が変化しているのである。

＜証明終わり＞



1図



2図

⑵ 向心加速度の大きさ

速度は速さにその方向を含むベクトルである。単位時間の速度変化が加速度である。この場合速度が変化しているので加速度を生じていることになる。その加速度の大きさを求めてみよう。

平均の加速度を$\vec{a}$とすると、$\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a}t$より、$\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BP} + \vec{a}t$となる。物体がAからBに移動する時間を微小時間$dt$とすると、$\vec{a}t$の大きさは$adt$となる。この状態を図示したのが2図である。

また、弧ABの長さはvdtであり、dtが微小時間であるから、この平均の加速度は瞬間の加速度になり、中心角θは限りなく0に近い角度となるので、扇形OABと二等辺三角形BPQは相似と考えてよい。よって、

OA：AB＝BP：PQ

これは、

$r : vdt = v : adt$

簡単にすると、

$$a=\frac{v^2}{r} \quad \cdots ①$$

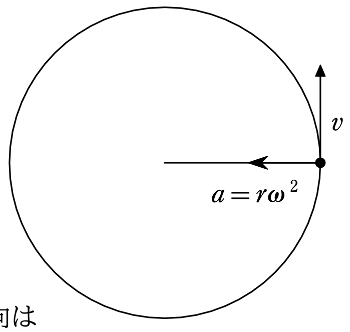
ここで、$v=r\omega$を用いると、

$$a=r\omega^2 \quad \cdots ②$$

が成り立つ。この加速度を**向心加速度**という。向心加速度の公式は角速度を回転速度の基準としているので、②が正式な向心加速度の公式であるが、実際問題として①を使うことが多い。

⑶　向心加速度の方向

上の2図にもう一度注目してほしい。∠BPQは二等辺三角形の底角であるが、頂角θが限りなく0に近い角度なので、∠BPQは90°に限りなく近づくので、∠BPQ＝90°といえる。つまり、物体は速度と直角方向に加速度を受けるということである。物体の速度は円周の接線方向であるので、加速度の方向は円の中心を向く方向になる。この加速度は円の中心を向く加速度ということで向心加速度と名づけられている。



「向心加速度は円の中心を向く方向である。」

⑷　向心力

物体に加速度が生じているということは、その物体に力が作用しているということになる。この力の大きさは運動方程式より、

$$F=ma=mr\omega^2 \qquad \text{または、} F=m\frac{v^2}{r}$$

でなければならない。この力を向心力という。

ここで注意しなければならないことは、この向心力は実在の力を示しているのではないということである。力の役割を示しているのに過ぎない。たとえば、地球を回る人工衛星では向心力という力で円運動しているのではなく、重力が向心力の役割を果たして円運動しているのである。

「向心力は円運動をさせる役割を示している力であり、実在の力ではない。」

３．円運動の計算例

円運動の問題は向心力の役割を果たしている力を計算し、それと、向心加速度を用いて運動方程式を立てて解けばよい。極めて機械的に問題を解くことができるので、そのパターンをつかんで置くとよい。円運動の問題は大きく分けて水平円運動と鉛直円運動に分けられる。それぞれの解き方を紹介しよう。

等速円運動

(1)　水平円運動の例

水平円運動は等速円運動の場合である。等速で円運動していれば、すべてこのパターンで解ける。

水平円運動の解法

①　運動物体にはたらく力の作図

②　回転中心を基準として力を分解

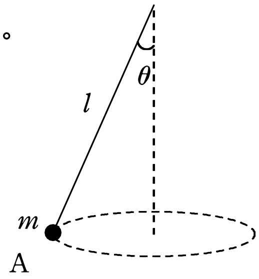
③　円の中心方向の向心加速度を用いて運動方程式を立てる。

④　円の中心方向と直角方向で力のつりあいの式を立てる。

⑤　方程式を解く。

＜例題＞

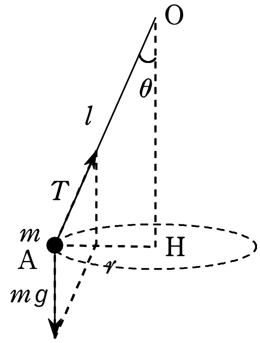
長さlのひもに質量mのおもりAを取り付け、鉛直線からθの角度を保って円錐状に回転運動をさせた。このときの回転周期を求めよ。



＜解＞

①　力の作図

物体の運動状態を調べるのであるから、このような場合はすべて力の作図から始めるべきである。このおもりに作用する力をすべて作図すると、この場合は重力と張力以外には存在しない。

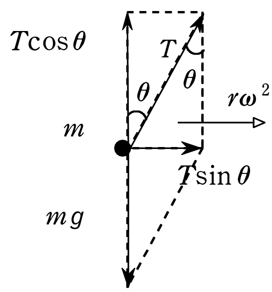


②　力の分解

この円運動における中心はHである。AH方向とその直角方向に分解する。

張力Tが斜めになっているので鉛直方向と水平方向に分解すると、鉛直方向が$T\cos\theta$で水平方向が$T\sin\theta$である。

このうち、向心力は水平方向成分で$T\sin\theta$である。



③　運動方程式

回転半径をrとすれば、向心加速度の大きさは$r\omega^2$である。方向はAから回転中心Hの方向である。

運動方程式は

$$mr\omega^2 = T\sin\theta$$

となる。

ここで、$r = l\sin\theta$であるから、運動方程式は

$$ml\omega^2 = T$$

④　直角方向のつり合いの式

鉛直方向には物体は速度変化を起こさないために鉛直方向の力の釣り合いが成立する

$$mg = T\cos\theta$$

③④の連立方程式を解くと、

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}}$$

回転周期Pは　　$P=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{l\cos\theta}{g}}$

である。

(2)　鉛直円運動の例

鉛直円運動は鉛直方向の円運動を指しており、この場合等速円運動ではない。円状に運動をしているのではあるが、接線方向に加速度を持つ。この場合は接線方向の力の釣り合いが成立しないのである。また、そのために、周回速度が未知数となり、方程式がもうひとつ必要になる。それが、エネルギー保存則である。そのため水平円運動の解放の④がエネルギー保存則に変わる。

鉛直円運動の解法

①　運動物体の力の作図

②　回転中心を基準として力を分解

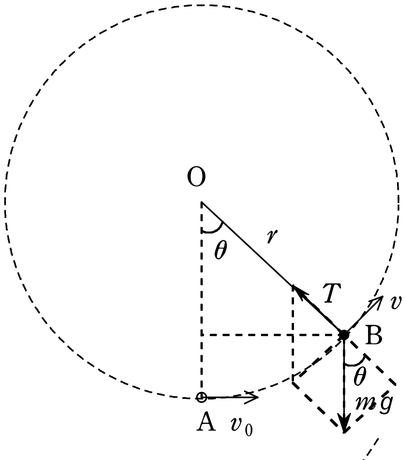
③　円の中心方向の向心加速度を用いて運動方程式を立てる。

④　エネルギー保存則で方程式を立てる。

⑤　方程式を解く。

＜例題＞

図のように長さrのひもに質量mのおもりを取り付け最下点Aで初速度v_0で鉛直面上に円運動させた。このとき、円直線からの角度θのときのひもの張力Tを求めよ。



＜解＞

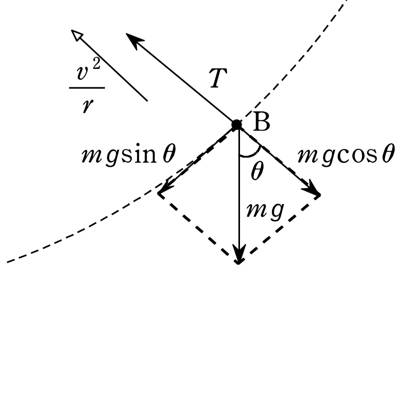
①　力の作図

この物体にはたらく力を作図する。
この場合、重力と張力のみである。

②　力の分解

この場合の回転中心はO点である。よって、OB方向とその直角方向で力を分解する。張力はそのままで、重力の分解が必要である。

右図の通り、重力の回転中心方向成分は$mg\cos\theta$であり、その直角方向（接線方向は）$mg\sin\theta$である。



③　向心加速度を用いて運動方程式

おもりはB点で中心方向に加速しているので、$T>mg\cos\theta$でなければならない。運動方程式は

$$T-mg\cos\theta=m\frac{v^2}{r}$$

となる。この場合未知数がvとTの二つ存在するのでこのままでは解けない。そこでもうひとつの方程式が必要となる。

④　エネルギー保存則

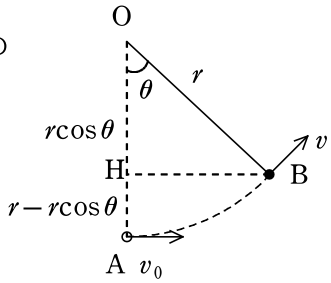
水平円運動と同じように接線方向の方程式はどうであろうか？この方向も力$mg\sin\theta$が作用しており、接線方向にも加速度がある。つまり等速円運動ではないのである。接線方向の方程式を立てる場合この方向の加速度が新しい未知数となるので、この方程式を立てたのでは上の運動方程式は解けない。

そこで、エネルギー保存則が解く鍵となる。

「困ったときはエネルギー保存則」

と思っておくとよい。

A点を重力の位置エネルギーの基準とすると、A点での力学的エネルギーは運動エネルギーのみで$\frac{1}{2}mv_0{}^2$である。



B点での運動エネルギーは$\frac{1}{2}mv^2$であり、重力の位置エネルギーはABの高さの差AHをまず求めなければならない。OA＝r、OH＝$r\cos\theta$であるので、AH＝$r-r\cos\theta$

である。重力による位置エネルギーは

$$mgr(1-\cos\theta)$$

となる。よって、B点の力学的エネルギーは

$$\frac{1}{2}mv^2+mgr(1-\cos\theta)$$

である。

エネルギー保存則は

$$\frac{1}{2}mv^2+mgr(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}mv^2$$

③④を連立させると、

$$T=\frac{mv_0{}^2}{r}+mg(3\cos\theta-2)$$

である。

この鉛直円運動はv_0がある速度以上でないと最上点まで上がらない。張力は必ず正でなければならない。そのため、最上点（$\theta=180°$）まで上がるには$T\geqq0$の条件を満たさなければならない。よって、

$$T=\frac{mv_0{}^2}{r}-5mg\geqq0 \qquad これより、\qquad v_0\geqq\sqrt{5gr}$$

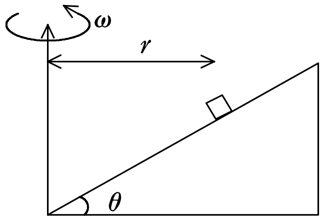
最下点で$\sqrt{5gr}$以上の速度があれば鉛直円運動ができる。

４．水平円運動例題

＜例題＞

右図のような傾角θの斜面上に質量mの物体を置いた,斜面との静止摩擦係数はμであるとする。この斜面の先端を回転させたとき,この物体が静止し続けるための角速度ωの範囲を求めよ。

物体を置いた位置は回転軸からrの位置とする。



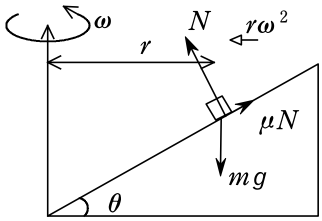
＜解説＞

最低角速度の計算

(1)　力の作図

この物体にはたらいている力は，右図のように重力mg，垂直抗力N，静止摩擦力である。静止摩擦力は滑り始める直前を意味するので最大摩擦力μNとなる。

この物体は等速円運動しているので，回転中心方向に向心加速度$r\omega^2$がはたらいている。



(2)　回転中心を基準に分解して運動方程式

各力の水平方向成分は，左向きを正として

垂直抗力　$N\sin\theta$，最大摩擦力　$-\mu N\cos\theta$

なので，運動方程式は

$$N\sin\theta-\mu N\cos\theta=mr\omega^2 \quad \cdot\cdot\cdot \quad ①$$

各力の鉛直方向成分は，上向きを正として

垂直抗力　$N\cos\theta$，最大摩擦力　$\mu N\sin\theta$，重力　$-mg$

鉛直方向のつりあいの式は

$$N\cos\theta+\mu N\sin\theta-mg=0 \quad \cdot\cdot\cdot \quad ②$$

この連立方程式を解くと

$$\omega=\sqrt{\frac{\tan\theta-\mu}{1+\mu\tan\theta}\frac{g}{r}}$$

最大角速度の計算

最大摩擦力の向きが逆になるので①②の方程式の摩擦力の符号を逆にすればよい。

$$N\sin\theta+\mu N\cos\theta=mr\omega^2 \quad \cdot\cdot\cdot \quad ①'$$

$$N\cos\theta-\mu N\sin\theta-mg=0 \quad \cdot\cdot\cdot \quad ②'$$

この連立方程式を解くと

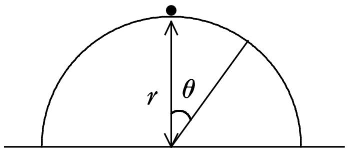
$$\omega=\sqrt{\frac{\tan\theta+\mu}{1-\mu\tan\theta}\frac{g}{r}}$$

よって，静止している角速度の範囲は

$$\sqrt{\frac{\tan\theta-\mu}{1+\mu\tan\theta}\frac{g}{r}}<\omega<\sqrt{\frac{\tan\theta+\mu}{1-\mu\tan\theta}\frac{g}{r}}$$

５． 鉛直円運動例題

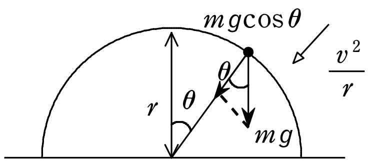
水平面に固定された表面が滑らかな半径rの半円柱の最上端に質量mの小物体を置いた。この小物体は滑り始めて，中心角θの位置により円柱の表面から離れた。このときの$\cos\theta$の値を求めよ。



＜解説＞

(1) 力の作図

小物体が，円柱面から離れる位置では垂直抗力が0になるので，この小物体にはたらいている力は重力のみとなる。



(2) 重力を回転中心方向で分解

半径と重力との角度がθなので，回転方向成分は　$mg\cos\theta$

(3) 回転中心方向に向心加速度を加えて運動方程式を立てる。

$$m\frac{v^2}{r}=mg\cos\theta\cdots①$$

(4) エネルギー保存則

最上端での重力による位置エネルギーを0とすると，

離れる点での重力による位置エネルギーは　$-mgr(1-\cos\theta)$となる。

$$0=\frac{1}{2}mv^2-mgr(1-\cos\theta)\cdots②$$

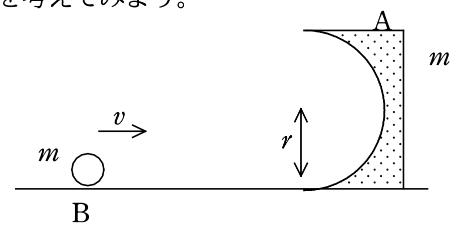
①②を連立させて解くと

$$\cos\theta=\frac{2}{3}$$

６． 相対運動と円運動

回転中心が移動する場合の円運動の計算例を考えてみよう。

滑らかな水平面上に半径rの半球面を持つ質量mの物体Aを静かに起き，その半球面に質量mの小球Bを速さvでぶつけた。小球Bは滑らかに半球面を滑りあがり,最上端から水平に飛び出した。



この運動が可能な速さvの最小値を求めよ。

＜解説＞

この問題では半球面が右方向に移動するので，回転中心が動くことになる。このときは半球面が動かないとしたときの相対速度を使って計算すればよい。

方向が複雑になるので，左向きを正とした速度ベクトルで考える。物体Aが静止したときの最上端での小球Bの速度をu，小球Bの真実の速度をv'，物体Aの速度をVとする。

最上端での最低速度では垂直抗力が0のときである。（速くなればなるほど垂直抗力が大きくなる。）

よって，最上端での力は重力のみなので，向心加速度$\frac{u^2}{r}$を用いて運動方程式を立てると，

$m\frac{u^2}{r}=mg$････①

エネルギー保存則は

$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv'^2+\frac{1}{2}mV^2+2mgr$　････②

相対速度で速度基準の変換をすると

$u=v'-V$　････③

この段階で未知数は　u,v,v',Vなので，方程式が不足している。

残りの方程式は，滑らかな水平面上の運動なので運動量保存則である。

$-mv=mV+mv'$････④

この場合速さvは右方向になっているので速度は$-v$となることに注意。

この連立方程式を解くと

$v=3\sqrt{gr}$

この速さ以上で，最上端に達することができる。