

運動量

1. 運動量とは

(1) 運動量とは

「力とは速度を変化させるもの」である。力を考えるときは速度変化に注目して考えればよい。しかし、速度の変化すなわち加速度と力は1 : 1の対応をしていないのである。つまり、力が分かったところで加速度を求めることはできない。これは、質量が分からないためである。「力とは速度を変化させるもの」という力の基本が1 : 1対応していないのは物事を考える上において不便である。そこで、「力とは質量×速度を変化させるもの」としてはどうだろうか？質量は力を加えても変化しないから、速度を変化させるものとはすなわち質量と速度の積を変化させたことになる。この積を運動量という。

$$\text{運動量} = \text{質量} \times \text{速度} \quad (\vec{P} = m\vec{v})$$

質量の単位がkg、速度の単位がm/sであるから、運動量の単位はkgm/sとなる。

運動量の概念を使えば「力とは運動量を変化させるもの」といえる。この場合は質量が含まれているので、力と運動量変化は1 : 1対応していることになる。

では、この運動量なるものはどのような意味として考えればよいのだろうか？

同じ速度で質量の大きい物体と小さい物体が飛んできたとき、質量の大きい物体を受け止めたときの衝撃は質量の小さい物体を受け止めたときの衝撃より大きい。また、同じ質量の物体でも、速い物体と遅い物体では速い物体を受け止めたときの衝撃が大きい。この事実より、質量と速度の積は受け止めたときの衝撃をあらわしていることがわかる。これを「運動の激しさ」という。運動量は運動の激しさを表わしている。

なお、速度が方向を持つために質量との積も速度と同じ方向を持つことになり、運動量はベクトルである。

(2) 力積について

この場合の速度変化とは速度の差ではなくて、加速度すなわち1秒間の速度変化である。物体の速度が v_0 から v に t 秒間で変化したとき、その加速度は

$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

で定義されている。

運動量の変化も同じように考え、運動量の差ではなく、1秒間の運動量変化である。式に直すと、

$$\frac{mv - mv_0}{t}$$

である。これが力を意味することになる。よって、

$$F = \frac{mv - mv_0}{t}$$

となるはずである。運動方程式より、

$$F = ma = m \frac{v - v_0}{t} = \frac{mv - mv_0}{t}$$

であり、この式が正しいことが証明される。

運動量

分母を払うと、

$$mv - mv_0 = Ft$$

という式ができる。運動量の差が力と時間の積となることを意味している。この力と時間の積を**力積**という。力積の単位は力[N]と時間[s]の積であるからNsということになる。

(3) 力積の式の利用方法

もうひとつの導き方をしてみよう。

① 物体の加速度が一定の場合

加速度三公式のひとつ $v = v_0 + at$ の両辺に質量 m をかけると、

$$mv - mv_0 = mat$$

ここで、運動方程式 $ma = F$

より、

$$mv - mv_0 = Ft$$

となる。

この導き方より、この公式を使わなくても運動方程式と加速度三公式を連立させれば問題を解くことができるので、等加速度（力が一定）の場合は計算が若干速くなる場合以外にこの公式のメリットはあまりない。この公式の本当の能力は加速度（力）が一定でない場合に発揮される。

② 物体の加速度（力）が変化する場合

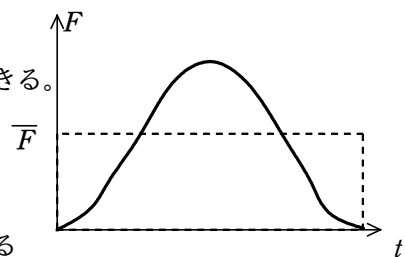
接触時間内にはたらいっている力が通常変化している。その間の平均の力の大きさを \bar{F} とあらわすと、

$$mv - mv_0 = \bar{F}t$$

となる。平均の力を使って、力積の式を表すことができる。

・ 平均の力の意味

物体どうしが接触してから離れるまでの間に右のように、相手物体から受ける力の大きさが変化するときの平均の力とはどのようなものであろうか。



それは、右の図形を押しなべて一様にしたときの力と見ることができる。つまり、接触時間内の同じ面積の長方形の高さということである。

左辺の運動量の差は力積全量（面積）である。つまり、力が変化しているときでも、その時間内の力積合計（平均の力×時間）を使えば、この式が使えるのである。運動方程式と加速度三公式の連立では力が一定の場合しか使えないので、この公式は力が変化しているときに使うことを考えればよい。

運動量

<例題>

右図のように力が変化しているとき、
静止していた質量2kgの物体はいくら
の速度になるか？

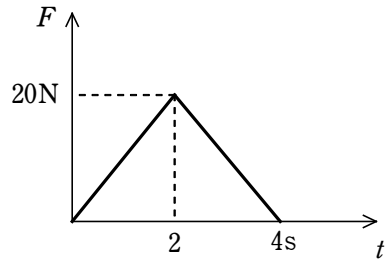
解

力積 F_t はグラフの下の部分の面積である
ので、 $F_t = 40\text{Ns}$ 、 $m = 2$ 、 $v_0 = 0$ より、

$$mv - mv_0 = 40$$

$$v = 2\text{m/s}$$

となる。



2. 衝突の場合

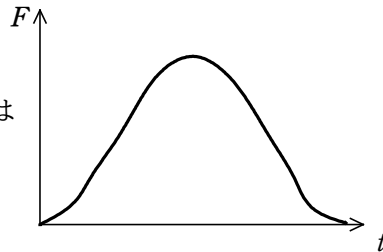
(1) 衝突の瞬間の力積

力積の式が最も有効に使えるのが衝突である。

右図のように二つの物体が衝突する瞬間は
非常に短時間ながら力の大きさが変化している。

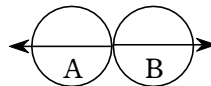


二つの物体間にかかる力をグラフに現すと
右のようになる。



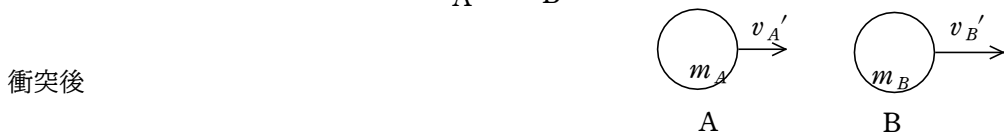
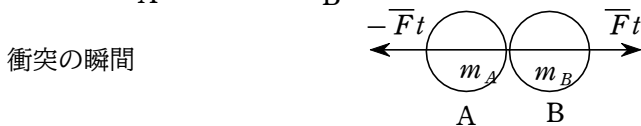
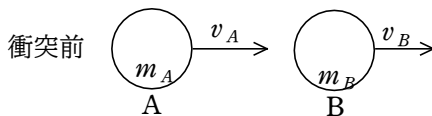
この面積が力積であるが、この面積を求める
のは通常、容易ではない。しかし、衝突の瞬間は
他の方面から特別な関係が求められるのである。

物体A、Bが衝突するとき、力の大きさは
時間とともに変わるが、互いに作用する力は
作用反作用の関係にあるために向きが逆であるが
大きさは常に等しい。また、Aの接触時間とBの
接触時間も当然ながら等しい。そのために、
物体Aが受ける力積と物体Bが受ける力積は向きが
逆で大きさが等しくなるのである。



(2) 衝突の瞬間に成り立つ関係

この性質を利用して物体が衝突する瞬間の物体の速度変化について考えてみよう。



運動量

質量 m_A の物体Aが速度 v_A で、質量 m_B の物体Bが速度 v_B でともに右向きに動いているとする。この物体はやがて衝突し、その瞬間平均の力 \overline{F} がかかったとする。そうすると、力積は $\overline{F}t$ である。

Aにかかる力積とBにかかる力積は大きさが等しく逆向きである。衝突後各物体の速度はそれぞれ $v_{A'}$ 、 $v_{B'}$ になったとする。この物体に対して力積の式を立てると、

$$A: \quad m_A v_{A'} - m_A v_A = -\overline{F}t \quad \dots \textcircled{1}$$

$$B: \quad m_B v_{B'} - m_B v_B = \overline{F}t \quad \dots \textcircled{2}$$

ここで、力積の符号がわかりにくいのであるが、わからないときは原点に戻って力で考えればわかる。つまりAに作用する力積を考えるときは、Aに作用する力で考えればよい。そして、力で考えるときは速度変化（加速度）の向きで考えると良いのである。Aに作用する力積の場合は物体Aは速度が衝突によって小さくなる。つまり、左側に加速されたのである。ということは左に力がかかったことであり、力積も左側にかかったことになる。よって、Aにかかる力積は $-\overline{F}t$ である。

式①②は $\overline{F}t$ の大きさがわからないのが難点であるが、①+②を計算すると消滅する。

①+②を計算すると、

$$m_A v_{A'} - m_A v_A = m_B v_{B'} - m_B v_B$$

であり、移項すると

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v_{A'} + m_B v_{B'}$$

この式は衝突前後の運動量の総和が等しいことを意味しており**運動量保存則**と呼ばれている。

3. 運動量保存則

運動量保存則とエネルギー保存則はいつでも使う可能性がある法則である。たとえば、ばねに関する公式 $F=kx$ や $U=\frac{1}{2}kx^2$ などは、ばねがないのに使うことはありえない。電気関係の公式は電気の問題でしか使わない。これに対して、運動量保存則とエネルギー保存則はすべての問題に関して使う可能性がある。問題にあたる時、解き方が思いつかないときはこの運動量保存則とエネルギー保存則を考えてみる必要がある。そのときに重要なことは、これらの保存則が使えるかどうかの判定である。これらの法則はこの判定方法をしっかりとマスターしておかなければならない。

(1) 運動量保存則が使える条件

物体Aと物体Bがあり、質量 m_A の物体Aが速度 v_A で、質量 m_B の物体Bが速度 v_B でともに右向きに動いているとする。それぞれに力積 F_{At} 、 F_{Bt} がかかったとし、衝突後、各物体の速度はそれぞれ $v_{A'}$ 、 $v_{B'}$ になったとする。このとき成立する式は

$$A: \quad m_A v_{A'} - m_A v_A = F_{At} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$B: \quad m_B v_{B'} - m_B v_B = F_{Bt} \quad \dots \textcircled{2}$$

この式はすべての物体の運動に関して成立する一般的な式である。この式から運動量保存則が成立するための条件を考えてみよう。運動量保存則は

運動量

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A' + m_B v_B' \quad \dots ③$$

である。この式が上の①②から導かれるためには右辺が消えなければならない。つまり、

$$F_{At} + F_{Bt} = 0 \quad \dots ④$$

これが成立するのが運動量保存則が成立するための絶対条件となる。二つの物体間に作用する力は作用反作用で、この力は逆向きで大きさが等しい力で互いに力が作用する時間も同じである。よって、作用反作用の関係にある力が作用していれば④式は成立することになる。逆に言えば、反作用がA、B以外の物体にある場合は④式は成立しなくなり、運動量保存則も成立しない。まとめると、

「計算対象の物体に作用しているすべての力が作用反作用のペアになっている場合、運動量保存則が成立する。」

作用反作用のペアになっている力を内力といい、反作用の相手の物体が計算対象外の物体である場合その力を外力という。外力は外から力がかかっているという意味である。

上記のことは分かりやすくいえば、

「計算対象外の物体との間で力を及ぼしあっていると、運動量保存則は使えない。」

または、

「力を及ぼしあっているすべての物体が計算対象であれば運動量保存則が使える」ということである。具体的な例としては、通常地球自体の運動状態は計算しない（静止していると考えている）ので、地球との間に力が及ぼしあっていたら運動量保存則は使えないことになる。

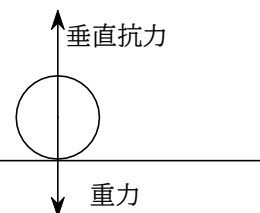
(2) 内力、外力の例

① 重力

まず、物体に作用する重力について考えてみよう。重力とは「地球が引く力」である。そのために、その反作用は地球にある。地球上の物体が地球の重力によって落下する時、物体も地球を引っ張っていて、地球も物体のほうに向けて加速しているのである。つまり地球は浮き上がっているといえる。しかし、この地球の動きというのは計算対象外である。地球は動かないものとして物体の動きを考えている。このときはこの重力は外力となる。地球の動きを考えると重力は内力となる。一般に重力は外力であり、重力が作用しているときは運動量保存則は成立しない。

しかし、重力がつりあいの力で打ち消されているときはこの限りではない。滑らかな水平面上の運動は重力が作用しているが、同時に垂直抗力が作用していて、両者はつりあっている。つりあいの力は力が作用していないのと同じであるから、この場合は運動量保存則が成立する。

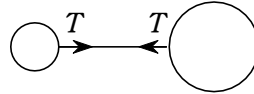
衝突の場合も重力が作用しているが衝突は瞬間であるから、重力の影響はその瞬間に限れば衝突によって受ける力に比べればはるかに小さいので無視できる。一般に衝突は運動量保存則が成立している。



運動量

② 張力

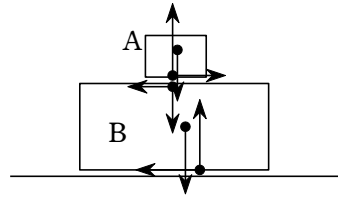
二つの物体がひもでつながれている場合、そのときに作用している張力は、逆向き同じ大きさ



同一作用線上に作用しているが、直接作用反作用の関係にはない。（この場合の作用反作用はひもと物体に作用する力である。反作用は物体がひもを引く力である）しかし、作用反作用と同じような関係であるので、二つの物体がともに計算対象であるならば運動量保存則が成立する。しかし、片方の物体が計算対象でないとか、何か他の物体に固定されている場合は、運動量保存則が成立しない。

③ 抗力（垂直抗力と摩擦力）

右に物体A、Bは水平面上にある物体に作用する力の作図をしたものである。ここで物体どうしは接触しているが、作用点が良くわかるようにわざと離してある。また、鉛直方向の力はすべて同一作用線上にあるが矢印が重なるのでこれもわざとずらしてある。



物体Aに作用する力は重力、垂直抗力、摩擦力である。重力は地球に反作用を持つが垂直抗力で打ち消されているために、摩擦力のみ外力である可能性がある。物体Bが計算対象外であるときは運動量保存則は成立しない。

次に物体Bを考えてみよう。物体Bに作用する鉛直方向の力は物体Aからの垂直抗力、下面からの垂直抗力、重力の3力がつりあい関係にあり打ち消しあっている。水平方向の力はAからの摩擦力と下面からの摩擦力がある。Aからの摩擦力はA,Bともに計算対象である場合は内力となる。それに対して下面からの摩擦力は反作用が下面（地球）にある。地球は計算対象外であるから、これは外力となる。よって下面に摩擦力がある限り運動量保存則は成立しない。しかし、この摩擦力がない場合はすべて内力となり、運動量保存則が成立する。

「滑らかな水平面上の運動は運動量保存則が成立している」

といえる。

④ 平面上の運動に対する運動量保存則

運動量は質量と速度の積であり方向を持つ。その方向は速度の方向と同じである。つまり運動量はベクトルである。運動量保存則もベクトル式である。そのために、平面上の衝突の場合は x 成分と y 成分に分解して計算することが可能である。

4. 運動量保存則と共通重心

(1) 共通重心の動き

質量 m_A の物体Aが最初座標 \vec{x}_{A0} にあり、速度 \vec{v}_A で動いている。質量 m_B の物体Bが最初座標 \vec{x}_{B0} にあり、速度 \vec{v}_B で動いているとする。それぞれの物体の時間 t 後の位置 \vec{x}_A 、 \vec{x}_B は

$$\vec{x}_A = \vec{x}_{A0} + \vec{v}_A t, \quad \vec{x}_B = \vec{x}_{B0} + \vec{v}_B t$$

であらわされる。共通重心の座標は

運動量

$$\frac{m_A \vec{x}_A + m_B \vec{x}_B}{m_A + m_B} = \frac{m_A \vec{x}_{A0} + m_B \vec{x}_{B0}}{m_A + m_B} + \frac{m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B}{m_A + m_B} t$$

これより、 $\frac{m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B}{m_A + m_B}$ が重心速度 \vec{v}_G を表していることがわかる。

物体Aの初速度 \vec{v}_{A0} 、加速度を \vec{a}_A 、物体Bの初速度を \vec{v}_{B0} 、加速度を \vec{a}_B とすると、

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{A0} + \vec{a}_A t, \quad \vec{v}_B = \vec{v}_{B0} + \vec{a}_B t$$

となる。重心速度は

$$\vec{v}_G = \frac{m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B}{m_A + m_B} = \frac{m_A \vec{v}_{A0} + m_B \vec{v}_{B0}}{m_A + m_B} + \frac{m_A \vec{a}_A + m_B \vec{a}_B}{m_A + m_B} t$$

となり、 $\frac{m_A \vec{a}_A + m_B \vec{a}_B}{m_A + m_B}$ が重心の加速度 \vec{a}_G を表していることがわかる。

物体A,B間に作用反作用 \vec{f} 、 $-\vec{f}$ および外力 \vec{F}_A 、 \vec{F}_B がはたらいているとすると、物体Aにはたらく力は $\vec{F}_A + \vec{f}$ 、物体Bにはたらく力は $\vec{F}_B - \vec{f}$ となる。

$$\text{それぞれの運動方程式は } \vec{F}_A + \vec{f} = m_A \vec{a}_A, \quad \vec{F}_B - \vec{f} = m_B \vec{a}_B$$

$$\text{両辺加えると } \vec{F}_A + \vec{F}_B = m_A \vec{a}_A + m_B \vec{a}_B$$

重心の加速度は

$$\vec{a}_G = \frac{m_A \vec{a}_A + m_B \vec{a}_B}{m_A + m_B} = \frac{\vec{F}_A + \vec{F}_B}{m_A + m_B}$$

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B = (m_A + m_B) \vec{a}_G$$

この式は、重心の位置に各物体の質量の和のに等しい物体があって、その物体に外力の合力がはたらいたとしたときの運動をしていることを意味している。

重心の運動に関して次のことが言える。

「重心の運動は全質量が重心に集まり、その重心に外力がはたらいたと考えて問題を解くことができる。」

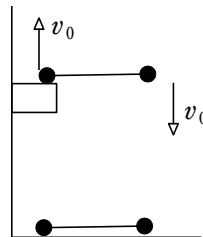
そして、外力がはたらかなかつたときは、重心は作用反作用なる力がはたらかなかつた時とまったく同等となる。

「運動量保存の法則が成立する時、共通重心は等速運動をする。共通重心が静止している時は静止したままである。」

重心はすべての質量が一点に集まったと仮定した点なので、外力がはたらかない状態（作用反作用のみの状態）では、加速度が0となり、等速運動をするのである。

<例題>

質量 m の2物体を長さ l の軽い棒につなぎ、水平に保ちながら自由落下させたところ、速さが v_0 になった瞬間一方の物体が、壁からの突起にぶつかり、逆向きの速度 v_0 になった。この物体は回転しながら落下し、半回転して、水平状態で地面に接地した。



運動量

この時、突起部分の地面からの高さを求めよ。

<解説>

重心は外力のみで運動するので質量 $2m$ の物体に重力のみがはたらいていると考えればよい。この場合重心の速度は0なので、重心が自由落下していると考えられることができる。

また、この物体自体は長さ l で周回速度 v_0 の等速円運動となるので、

$$\text{周期は } \frac{\pi l}{v_0} \text{ 半周するので、落下時間は } \frac{1}{2} \frac{\pi l}{v_0}$$

この時間の自由落下距離は

$$\frac{1}{2} g \left(\frac{1}{2} \frac{\pi l}{v_0} \right)^2 = \frac{\pi^2}{8} \frac{gl^2}{v_0^2}$$

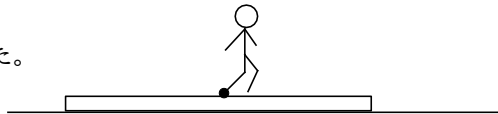
となる。

(2) 運動量保存則が成立する時の変位比、速度比、加速度比

滑らかな水平面上にある台の中央に

人が乗っており右に一定の加速度で動き始めた。

このときの人と台の質量比を



$m_1:m_2$ とする。このとき、人と台の変位の大きさの比 $x_1:x_2$ 、速度比を $v_1:v_2$ 、加速度比を $a_1:a_2$ を求めてみよう。

人と台との間に作用する力は摩擦力であり、互いに作用反作用の関係にあるため、その大きさは等しい。人と台の加速度をそれぞれ、 a_1 、 a_2 とすると、それぞれの物体に関する運動方程式が成立する。

$$F = m_1 a_1 \quad F = m_2 a_2$$

よって、 $m_1 a_1 = m_2 a_2 \quad \therefore a_1 : a_2 = m_2 : m_1$

それぞれの物体の速度を v_1 、 v_2 とすると、運動量保存則より、

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0$$

左辺が差になっているのは、速度が逆であるためである。よって、

$$v_1 : v_2 = m_2 : m_1$$

外力が加わっていないため、この人と、台の重心の位置は変わらない。(重心は静止している)人と台の動いた距離を、それぞれ x_1 、 x_2 とし、重心を回転の中心としたモーメントを考えれば、

$$x_1 m_1 g = x_2 m_2 g$$

よって、

$$x_1 : x_2 = m_2 : m_1$$

以上をまとめると、

$$x_1 : x_2 = v_1 : v_2 = a_1 : a_2 = m_2 : m_1$$

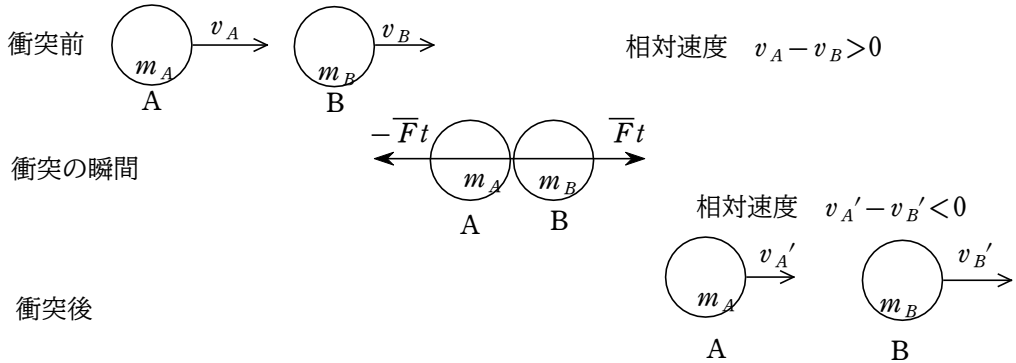
となる。

「運動量保存則が成立する時、二物体の変位比、速度比、加速度比は等しい」

運動量

5. 跳ね返り係数

物体が衝突する瞬間の物体に関する方程式は



$$A: m_A v_A' - m_A v_A = -\overline{F}t \quad \dots \textcircled{1}$$

$$B: m_B v_B' - m_B v_B = \overline{F}t \quad \dots \textcircled{2}$$

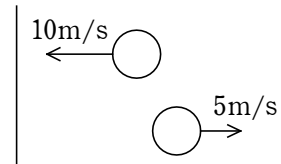
となる。方程式は2つあるのであるが、 $\overline{F}t$ を消去したため、運動量保存則では方程式がひとつになってしまう。ところが、衝突後の速度は v_A' と v_B' と二つあるので、未知数が二つあることが多い。つまり、方程式は二つ必要となる。運動量保存則以外にもうひとつ必要なことが多い。そこで登場するのが、跳ね返り係数である。

ある高さから物体を自由落下させた場合、地面にぶつかってから跳ね返ってくるが、その跳ね返る高さは、物体によって、あるいは地面の状態によってことなる。その跳ね返りの状態を表すにはどうしたらよいか考えてみよう。

(1) 跳ね返り係数の測定

ある物体が壁に10m/sの速さで、ぶつかって5m/sで跳ね返ったとすると、跳ね返った後速さが半分になっている。

このとき、跳ね返り係数が0.5であるという。跳ね返り係数は跳ね返った後は跳ね返る前の速さの何倍になったかで決められる数値である。



しかし、片方が壁ではなく、もうひとつの物体であった場合は、上の図のように衝突前の速度が v_A 、 v_B で衝突後が v_A' と v_B' とデータ量が4つあり複雑である。よって、相対速度を使うものとする。

物体Bの上に観測者が乗っていると考えると、この観測者から見ると、物体Aは自らに接近し、衝突後、離れていくように見える。

相対速度 = 相手の速度 - 自分の速度

であるから 衝突前は $v_A - v_B$ で、衝突後は $v_A' - v_B'$ となる。データ量が二つのなるので問題は簡単になる。しかし、その符号に注意する必要がある。衝突前は $v_A > v_B$ であるから、 $v_A - v_B > 0$ であるが、衝突後は $v_A' < v_B'$ であるから、 $v_A' - v_B' < 0$ となるのである。跳ね返り係数を、衝突前後の相対速度比で定義するのが良いが、その値は必ず負になる。負の値で定義すると後々不便であるから、正の数で定義をするのが普通である。そこで、跳ね返り係数 e を次のように定義する。

運動量

$$e = -\frac{v_A' - v_B'}{v_A - v_B}$$

これが跳ね返り係数である。

物理量の計算するとき差をとる必要があるときは通常（後－前）で計算される。同様にして商を計算するときは通常（後÷前）で計算される。この跳ね返り係数の定義はこれに沿っている。

(2) 衝突の種類

跳ね返り係数によって衝突の種類が分けられている。

① $e < 0$ の場合

跳ね返り係数が負になるということは衝突によって、物体の運動方向が変わらない場合であるから、物体にめり込むことを意味し、跳ね返るということに対してこういうことはありえない。

② $e = 0$ の場合

$e = -\frac{v_A' - v_B'}{v_A - v_B} = 0$ ということは、 $v_A' - v_B' = 0$ を意味している。衝突後が同じ速度とい

うことは衝突後に合体するということである。衝突によって二つの物体がくっついてしまった場合は $e = 0$ といえる。この場合の衝突を**完全非弾性衝突**という。

③ $0 < e < 1$ の場合

この場合は跳ね返る前よりも跳ね返った後の方が遅くなる場合である。通常の衝突はこの場合である。物体どうしが衝突するとき、衝突の瞬間音や熱が出る。このとき物体の持つ運動エネルギーが失われる。そのために、衝突後の速さが遅くなるのである。この衝突を**非弾性衝突**という。

完全非弾性衝突・非弾性衝突は力学的エネルギー保存則は成立していない。

④ $e = 1$ の場合

この場合は衝突によって速さが遅くならないことを意味し、衝突によって運動エネルギーが失われない。この場合はエネルギー保存則が成立している。この衝突を**弾性衝突**という。弾性衝突は分子・原子レベルの衝突のときに起こっている。

気体の分子どおしの衝突は、もし、衝突のたびに分子の運動エネルギーが小さくなっていけば、分子衝突は常に起こっているために、分子の運動エネルギーがたちまち無くなってしまい、すべての分子は静止し気体でなく固体になってしまう。これは現実には反しており、同時に分子衝突は弾性衝突であることを意味している。

分子衝突において、通常の非弾性衝突で失われる音や熱のエネルギーというものは、本来分子の運動エネルギーである。分子衝突では音や熱で失われるエネルギーがそのまま分子の運動エネルギーになっているために分子の運動エネルギーが失われないのである。

⑤ $e > 1$ の場合

この場合は衝突によってより速くなるということでも明らかにエネルギー保存則に反する。現実問題としてありえない。

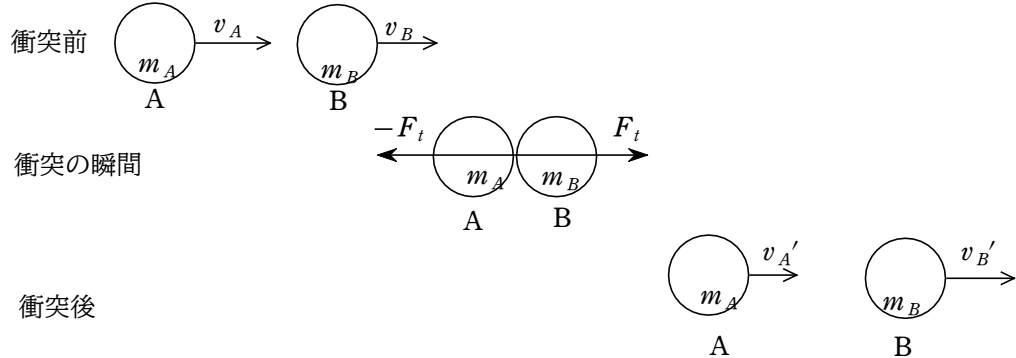
跳ね返り係数は $0 \leq e \leq 1$ の範囲にある数値である。

運動量

(3) 弾性衝突ではエネルギー保存則が成立している

<証明>

下のような衝突状態で跳ね返り係数が1のとき、エネルギー保存則が成立していることを証明してみよう。



運動量保存則は $m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A' + m_B v_B'$ …①

跳ね返り係数は弾性衝突であるから1である。よって、

$$1 = -\frac{v_A' - v_B'}{v_A - v_B} \quad \dots \textcircled{2}$$

①2乗すると、

$$m_A^2 v_A^2 + 2m_A m_B v_A v_B + m_B^2 v_B^2 = m_A^2 v_A'^2 + 2m_A m_B v_A' v_B' + m_B^2 v_B'^2 \quad \dots \textcircled{1}'$$

②を変形して $v_A - v_B = v_B' - v_A'$

2乗すると、 $v_A^2 - 2v_A v_B + v_B^2 = v_A'^2 - 2v_A' v_B' + v_B'^2$

両辺に $m_A m_B$ をかけると、

$$m_A m_B v_A^2 - 2m_A m_B v_A v_B + m_A m_B v_B^2 = m_A m_B v_A'^2 - 2m_A m_B v_A' v_B' + m_A m_B v_B'^2 \quad \textcircled{2}'$$

①'+②'で $m_A + m_B$ で因数分解する

$$(m_A + m_B)(m_A v_A^2 + m_B v_B^2) = (m_A + m_B)(m_A v_A'^2 + m_B v_B'^2)$$

これは

$$m_A v_A^2 + m_B v_B^2 = m_A v_A'^2 + m_B v_B'^2$$

両辺を $\frac{1}{2}$ すると、

$$\frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} m_A v_A'^2 + \frac{1}{2} m_B v_B'^2$$

となる。この結果は、衝突前と、衝突後の運動エネルギーの和は同じであることを意味し、あわせて、力学的エネルギーの保存則が成立していることを示している。

「弾性衝突をする時、エネルギーが保存されている。」

6. さまざまな衝突

運動量が保存されているさまざまな運動について考えてみよう。

(1) 滑らかな面への衝突

運動量

まず、滑らかな水平面に斜めに物体が衝突する場合を考えてみよう。衝突の瞬間、面が滑らかで摩擦がないために物体が受ける力積は面に垂直方向である。

そのため、水平方向の速度に変化はないよって、

$$v_0 \cos \theta = v \cos \phi \quad \dots \textcircled{1}$$

鉛直方向については力積の式が成立するが、 F_t が未知数であるためにその方程式は F_t を求める以外に使い道はない。跳ね返り係数を e とすると、

$$e = \frac{v \sin \phi}{v_0 \sin \theta} \quad \dots \textcircled{2}$$

これを解くと、

$$\tan \phi = e \tan \theta \quad v = v_0 \sqrt{\cos^2 \theta + e^2 \sin^2 \theta}$$

まとめると、

「滑らかな水平面に斜めに衝突する場合水平方向の速度は変わらない。鉛直方向は跳ね返り係数が使える」

が使える。

(2) 跳ね返る高さ

高さ H より物体を自由落下させた場合、どこまで

跳ね返るか考えてみよう。 $v^2 - v_0^2 = 2as$ より、

落下直前の速さは $V^2 = 2gH$ (g は重力加速度)

跳ね返った後の速度 v は $v = eV$ である。

この速度で上がる高さ h は $v^2 = 2gh$ である。

よって、

$$e = \frac{v}{V} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gH}} = \sqrt{\frac{h}{H}}$$

跳ね返り係数は高さの比の平方根であることがわかる。

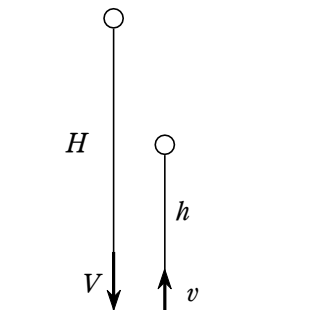
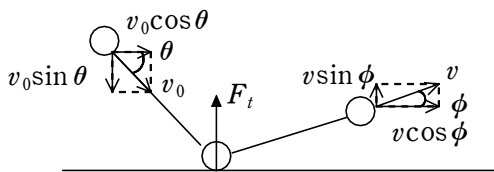
何回も繰り返し跳ね返る場合はどうであろうか？この式より最初 H の高さから落とした場合次に上がる高さは $e^2 H$ 、その次は、 $e^4 H$ となり、指数関数的に次第に跳ね返る高さが低くなっていく。

時間的にはどうであろうか？ 高さ H からの落下時間は $H = \frac{1}{2}gt^2$ より、 $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$

となる。次に最高点 $e^2 H$ まで上がる時間は $\sqrt{\frac{2e^2 H}{g}} = e\sqrt{\frac{2H}{g}}$ である。次に落下する時間

間は $e\sqrt{\frac{2H}{g}}$ である。これより、連続で跳ね返る場合の静止するまでの時間 T を求めると、

$$T = \sqrt{\frac{2H}{g}} + 2e\sqrt{\frac{2H}{g}} + 2e^2\sqrt{\frac{2H}{g}} \dots$$



運動量

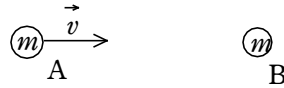
$$= \sqrt{\frac{2H}{g}} + 2e\sqrt{\frac{2H}{g}}(1+e+e^2+\dots)$$

$$= \sqrt{\frac{2H}{g}} + 2\frac{e}{1-e}\sqrt{\frac{2H}{g}} = \frac{1+e}{1-e}\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

有限時間で静止することがわかる。

(3) 等しい質量の静止した物体への弾性衝突

質量の等しい静止している物体Bに
物体Aが速度 \vec{v} で衝突した場合衝突後の
速度 \vec{v}_A 、 \vec{v}_B の関係について考えてみよう。



まずは、運動量保存則 $m\vec{v} = m\vec{v}_A + m\vec{v}_B$

簡単にして、 $\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{v}_B$...①

弾性衝突であるからエネルギー保存則が成立している。

$$\frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 = \frac{1}{2}m|\vec{v}_A|^2 + \frac{1}{2}m|\vec{v}_B|^2$$

簡単にして、 $|\vec{v}|^2 = |\vec{v}_A|^2 + |\vec{v}_B|^2$...②

①を2乗すると、 $|\vec{v}|^2 = |\vec{v}_A|^2 + 2\vec{v}_A \cdot \vec{v}_B + |\vec{v}_B|^2$

この式と②により、 $\vec{v}_A \cdot \vec{v}_B = 0$

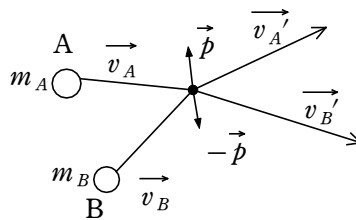
これは内積が0であるから、衝突後の速度は直角方向であることを意味している。

「等しい質量の静止した物体へ弾性衝突すると、衝突後の速度は互いに直角となる。」

」

(4) ベクトルを使った運動量保存則

質量 m_A の物体Aが速度 \vec{v}_A 、質量 m_B
の物体Bが速度 \vec{v}_B で飛んできて、ある点で
滑らかに衝突した。その結果Aが \vec{v}_A' 、Bが
 \vec{v}_B' の速度になった。このとき物体Aが受けた
力積を \vec{p} とする。



運動量保存則

$$\vec{v}_A + \vec{v}_B = \vec{v}_A' + \vec{v}_B'$$

が成立する。これで、ひとつの未知ベクトルは計算できる。

次に跳ね返り係数を計算する方法を考えてみよう。<これより発展>

力積は

$$\vec{p} = \vec{v}_A' - \vec{v}_A$$

である。滑らかな衝突なので、力積の方向での相対速度比が跳ね返り係数となる。

力積の方向での速度成分はベクトルの内積で計算できる。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \text{ なので,}$$

運動量

\vec{a} の \vec{b} 方向成分は $|\vec{a}|\cos\theta$ であり、 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ なので、 $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$ であらわされることになる。よって、

\vec{v}_A の力積 \vec{p} 方向成分は $\frac{\vec{v}_A\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}$ で計算できるので、衝突前の力積方向でのBから見たAの

相対速度は

$$v = \frac{\vec{v}_A\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|} - \frac{\vec{v}_B\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}$$

衝突後のBから見たAの相対速度は

$$v' = \frac{\vec{v}_A'\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|} - \frac{\vec{v}_B'\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}$$

よって、跳ね返り係数は

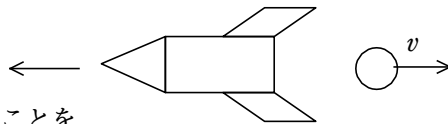
$$e = -\frac{v'}{v} = -\frac{\vec{v}_A'\cdot\vec{p} - \vec{v}_B'\cdot\vec{p}}{\vec{v}_A\cdot\vec{p} - \vec{v}_B\cdot\vec{p}} = -\frac{(\vec{v}_A' - \vec{v}_B')\cdot\vec{p}}{(\vec{v}_A - \vec{v}_B)\cdot\vec{p}} = -\frac{(\vec{v}_A' - \vec{v}_B')\cdot(\vec{v}_A' - \vec{v}_A)}{(\vec{v}_A - \vec{v}_B)\cdot(\vec{v}_A' - \vec{v}_A)}$$

であらわされる。

7. 例題

<例題1>

質量 $M[\text{kg}]$ のロケットが毎秒 $\rho[\text{kg}]$ の燃料をロケットに対する速さ $v[\text{m/s}]$ で反対方向に噴射する時、このロケットの加速度は $\frac{\rho v}{M}$ であらわされることを導け。ただし、 $M \gg \rho$ とする。



<解説>

運動量保存則の問題は速度で混乱を起こすことが多いので、速度に関して、条件を整理する必要がある。

整理するのは次の2点である。

a) 速度基準の統一

この問題の場合、ロケットの速度は地上基準であるが、燃料の速度はロケット基準である。統一された速度基準で方程式を立てる必要がある。速度基準は相対速度の式で変更可能である。

b) 速度方向の統一

速度はベクトルなので、どちらかの方向を正とすると、逆方向は負となる。速度に文字を当てはめるときは、正方向を正とするように文字設定すること。そうしないと、方程式を立てる段階、解く段階において混乱が起こりやすい。特に問題中で速さが負の方向に設定されているとき、マイナスの符号をつけて、正方向に書き換えるほうがよい。

運動量

この2点を重視してこの例題を解答してみよう。

まず、速度基準を地上基準とする。燃料噴射前のロケットの速度を V 、加速度を a とすると、燃料噴射後の速度は $V+a$ となる。

燃料の速度はロケット基準で、進行方向とは逆向きに v である。無理やりマイナスをつけて正方向にしておく。燃料は速度基準が違うので地上基準の燃料の速度を u とすると、運動量保存則は

$$MV + \rho V = M(V+a) + \rho u$$

これは、

$$\rho V = Ma + \rho u \dots \textcircled{1}$$

u と $-v$ の速度基準の変更は相対速度の式で可能である。

$$-v = u - (V+a)$$

これは、

$$u = V + a - v \dots \textcircled{2}$$

①②より u を消去して

$$\rho V = Ma + \rho(V+a-v)$$

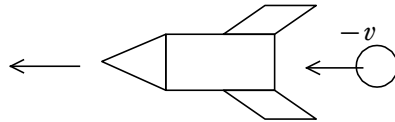
$$0 = Ma + \rho a - \rho v$$

これを簡単にすると、

$$a = \frac{\rho v}{M + \rho}$$

$$M \gg \rho \text{ なので、 } a = \frac{\rho v}{M}$$

ロケットの推進力は運動方程式より $F = \rho v$ となる。

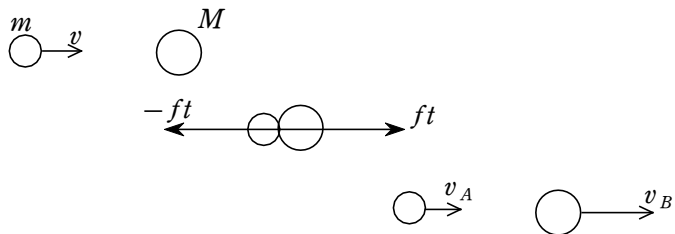


<例題2>

(2) 質量 m 、速度 v の物体が、静止している質量 M の物体と正面衝突した。この時の跳ね返り係数が e であるとした時、物体Bが受ける力積は

$$\frac{Mmv(1+e)}{M+m}$$

であることを導け。



<解説>

$$\text{運動量保存則より } mv = mv_A + Mv_B$$

$$\text{跳ね返り係数の定義より } e = -\frac{v_A - v_B}{v}$$

$$\text{これを解くと } v_B = \frac{mv(1+e)}{M+m}$$

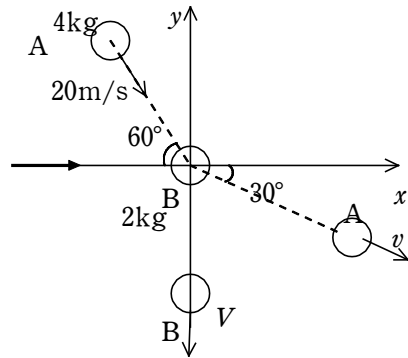
$$\text{力積は } Mv_B = \frac{Mmv(1+e)}{M+m}$$

運動量

<例題3>

xy平面上原点に質量2kgの物体Bが静止している。そこへ60°上方より質量4kgの物体Aが20m/sで移動してきて、物体Bに衝突し、物体Bはy軸負の方向に移動した。

Aは衝突後x軸から30°の方向に飛んで行った。このとき、衝突後の物体A、Bの速さ及び、跳ね返り係数を求めよ。



<解説>

Aの速さを v 、Bの速さを V とすると、

	A	B	運動量総計
衝突前x	$4 \times 20 \cos 60^\circ$	0	40
衝突前y	$-4 \times 20 \sin 60^\circ$	0	$-40\sqrt{3}$
衝突後x	$2v \cos 30^\circ$	0	$\sqrt{3}v$
衝突後y	$-2v \sin 30^\circ$	$-2 \times V$	$-v - 2V$

$$x\text{方向運動量保存則} \quad \sqrt{3}v = 40$$

$$y\text{方向運動量保存則} \quad -v - 2V = -40\sqrt{3}$$

$$\text{これを解くと、} \quad v = \frac{40}{3}\sqrt{3} = 23\text{m/s} \quad V = \frac{40}{3}\sqrt{3} = 23\text{m/s}$$

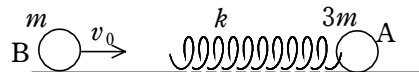
跳ね返り係数はBにかかる力積はy方向なので、y方向の速度変化で跳ね返り係数を計算する。

$$e = -\frac{-v \sin 30^\circ + V}{-20 \sin 60^\circ} = \frac{2}{3} = 0.67$$

<例題4>

質量3mの物体Aにはばね定数kの軽いばねを取り付け、滑らかな水平面上に静かにおいた。この物体に質量mの物体を速度 v_0 でぶつけた。

ばねが最も縮んだ瞬間のA,Bの速度及びばねにたまっているエネルギーを計算せよ。また、ばねが自然長に戻った時のA,Bの速度を求めよ。



<解説>

・ばねが最も縮んだ時

滑らかな水平面の問題なので運動量保存則が成立している。衝突ではないのでエネルギー保存則も成立する。

Aの速度を v_A 、Bの速度を v_B としたとき、 $v_A > v_B$ のとき、ばねは伸びている最中。 $v_A < v_B$ の時はばねが縮んでいる最中である。よって、最も縮んでいるのは $v_A = v_B$ の時となる。

ばねが最も縮んだ時の速度を v とする。

運動量

	A	B	運動量合計
衝突前	0	mv_0	mv_0
衝突中	$3mv$	mv	$4mv$

運動量保存則より $4mv = mv_0$

よって、 $v = \frac{1}{4}v_0$

	A	B	ばね	エネルギー合計
衝突前	0	$\frac{1}{2}mv_0^2$	0	$\frac{1}{2}mv_0^2$
衝突中	$\frac{3}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}kx^2$	$mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$

エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}kx^2 + mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{16}mv_0^2 = \frac{7}{16}mv_0^2$$

- ばねが自然長に戻った時

速度の方向は符号の混乱を避けるために、常に正方向に定義するとよい。

	A	B	運動量合計
衝突前	0	mv_0	mv_0
衝突中	$3mv_A$	mv_B	$3mv_A + mv_B$

運動量保存則は $3mv_A + mv_B = mv_0 \cdots \textcircled{1}$

未知数が二つに対して方程式が一つなので、この方程式は解けない。もう一つの方程式が必要である。この場合エネルギー保存則が成立しているので、エネルギー保存則で解けるが二次方程式になる。エネルギー保存則が成立している時は、跳ね返り係数1なので、跳ね返り係数を使う方が方程式が簡単になる。

$$1 = -\frac{v_B - v_A}{v_0} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{を連立させて解くと } v_A = \frac{1}{2}v_0 \quad v_B = -\frac{1}{2}v_0$$

となる。