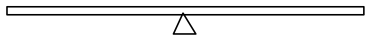
力のモーメント

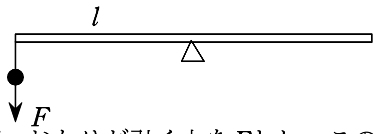
１．物体を回転させる力

形のある物体を空中に投げると、通常、物体は回転しながら飛んでいく。回転させずに投げることはきわめて難しい。これより、物体の運動は位置の移動（これを併進という）と回転があることが分かる。いままではすべて物体の併進についてのみ扱ってきた。ここでは物体の回転について考えてみよう。

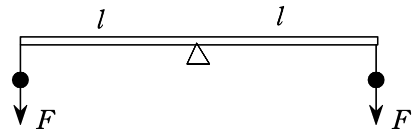
(1) 回転させる力はどのような力か



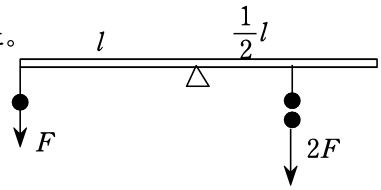
質量の無視できる軽い棒の中央に支えを置き、つりあわせた。この状態ではこの棒は回転しないから回転させる力はないといえる。



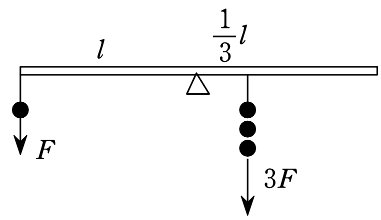
しかし、右図のように片方におもりをつるすとたちまち回転して左側が下がる。この場合は回転力が生じたことになる。このときの腕の長さをl、おもりが引く力をFとし、この回転力の大きさをMとする。



次に棒の反対側に同じ重さのおもりをつるすと、棒の回転は止まりつりあう。これは右側にも同じ大きさの回転力が生じたためである。この回転力も同じ大きさのMである。



図のように右側の腕の中点におもり2個をつるした。この場合もつりあう。これは、右側のおもりの回転力が左側と同じであるためであり、この場合の回転力もMとなる。



同じように腕の長さを$\frac{1}{3}l$、おもりを3個（$3F$）にしてもつりあう。この場合も回転力はMである。

ここまでをまとめると次のようになる。

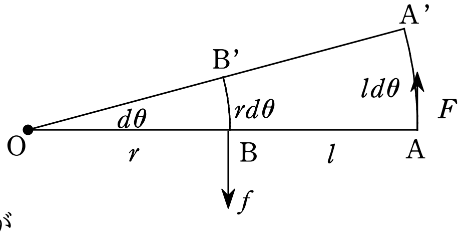
力	F	$2F$	$3F$
腕の長さ	l	$\frac{1}{2}l$	$\frac{1}{3}l$
回転力	M	M	M

この3例はいずれも回転力が同じとなる。力と腕の長さの積を求めると、同じ値になることから、回転力は力と腕の長さの積で表わせばよいことがわかる。よって、

$$M = Fl$$

この回転力のことを**力のモーメント**という。

⑵　仕事を使った力のモーメントの定義



　Oを回転中心とする棒ABを考える。点Aには力Fを上向きに、Oよりrの位置の点Bに下向きに力fを加えるものとする。ここで，OA＝lとする。

　この棒OAに力Fを加えて角度$d\theta$回転したとする。力Fで距離$ld\theta$移動しているのでこの力がした仕事は$Fld\theta$であり、この棒の回転運動エネルギーは$Fld\theta$増加する。このとき、点Bに力fが下向きにはたらいているとすると、この力がした仕事は$-frd\theta$となる。力Fと力fが同時にはたらくと、この棒の運動エネルギーは

　$Fld\theta - frd\theta$

だけ増加する。この運動エネルギーが増加するということは回転速度が速くなることを意味している。この運動エネルギーが0となるときは、回転速度が変化しないことを意味し、静止している棒であれば静止したままとなる。この状態を回転のつり合い状態という。

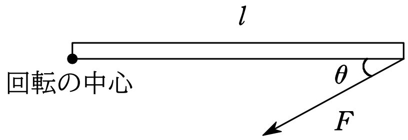
　$Fld\theta - frd\theta = 0$

　より、$Fl = fr$

が回転のつり合いの式である。

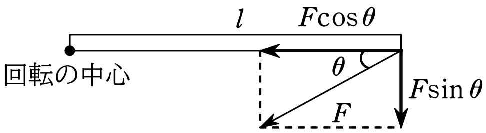
　以上のことよりFlが回転能力を表していることがわかる。これが力のモーメントである。

⑶　力が斜めにかかった場合（分解）



今までのモーメントは棒と力が直角になっている場合のみ考えた。次に直角でない場合を考えることにする。

　図のように回転の中心を黒点として、長さlの棒に対して角度θの方向に力Fを加えた場合の力のモーメントを求めてみる。力の合成･分解は自由であるから、棒の方向とその直角方向に分解して考える。



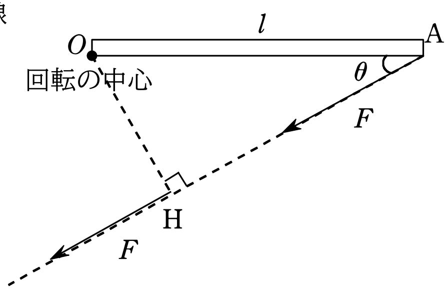
　このとき、力$F\cos\theta$は回転軸のほうに向いた力である。回転する物体の回転軸を押したり引いたりしても物体は回転しない。つまり**回転軸を作用線とする力は物体を回転させない**のである。

この場合、物体を回転させる力は$F\sin\theta$のみとなる。$F\sin\theta$は棒と直角であるから、⑴で定義した式が使える。よって、

$$M = Fl\sin\theta$$

となるのである。

⑷　力が斜めにかかった場合（作用線移動）



力は作用線上を動かしてもよい。力を作用線に沿って動かしてみる。力と腕が直角であれば、⑴の定義式が使えるので、直角になる位置まで動かす。

　この場合OH＝$l\sin\theta$であり、

OH⊥AHであるから、⑴の定義式を使うと

$M=Fl\sin\theta$

となり、⑵の分解した場合と同じ結論に達する。

この場合力は物体から離れた位置にあることになるが、導かれた式は分解した場合と同じ式であるので、力は物体から離れてもかまわないことになる。

よって、

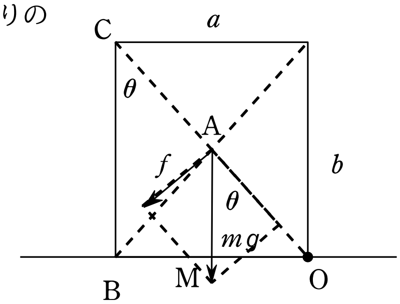
「力を作用線に沿って動かすとき物体から離れてもよい。」

といえる。

力が斜めに作用した場合の力のモーメントの計算は、分解する方法でも作用線に沿って動かす場合でもどちらでもよいことになる。

⑸　二つの方法の優劣。

　では実際の計算上どちらが有利であろうか。次の場合を例として考える。



高さb、幅aの一様な直方体があるとき、点Oの周りの重力による力のモーメントを計算してみる。

腕の長さAOは対角線の半分である。よって、

AO＝$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$となり、

対する直角方向の力fは、

$f=mg\sin\theta=mg\frac{BO}{CO}=mg\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

よって、力のモーメントは$M=AO\cdot f=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{mga}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{2}mga$

と計算が大変複雑となる。これに対し、作用線上を移動する方法で行なえば、重力mgをOBの中点まで下ろすだけでいいので、腕の長さが$\frac{a}{2}$、力の大きさがmgであるから、

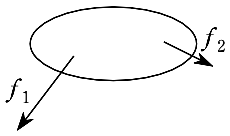
$M=\frac{1}{2}mga$となり、簡単に計算ができる。

　よって、モーメントの計算は分解法、作用線上を移動する方法どちらを使ってもいいが、作用線上を動かすほうが、よりベターだといえる。できれば両方使えるのがよい。

２．２力の合成

(1) 離れた平行でない２力の合成

同じ物体の離れた位置に2つの力を作用させたとき
この物体の速度は変化するが、その動く方向はひとつの方向であり、二つの方向に同時に動くことはない。



このことは1本の力で同じ動きをさせることができることを意味している。

「複数の力を加えた場合と同じ動きをさせる1本の力を求めることを力の合成という。」

力の合成に関して、可能なことをまとめてみると、

①　力は作用線上を自由に動かしてよい。

②　力の合成分解は自由にやってよい。

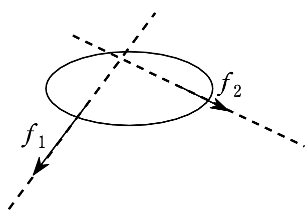
③　同一作用線上逆向き同じ大きさの力は、ペアで取り去っても付け加えてもよい。

以上の①②③はこの操作をしても物体の動きに変化が起こらない。そのために、力の合成の時に①②③の操作をしてもよいのである。ただしこれは変形しない物体について成り立つのであって、変形する物体に対しては成り立たないことがあるので注意を要する。高等学校の物理においては変形する物体はばねのみである。

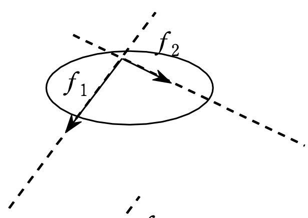
この４点に注意して、力を合成する方法を考えてみよう。

この2本の力を合成しようと思っても、作用点が異なるから合成できない。同じ作用点にするために平行移動することは許されていないのである。

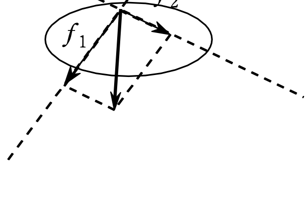
まず、2本の力の作用線を引いてみると、右図のようになる。力は作用線上を動かしてよいのであるから、



その交点まで動かすことができる。

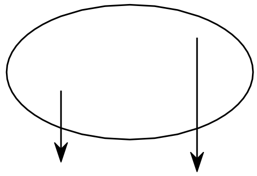


交点まで動かしてしまえば、力の合成が可能である。この状態で力を合成すると、右図のようになる。

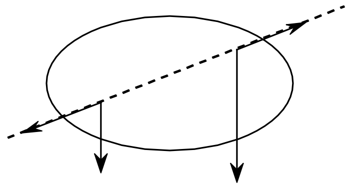


⑵　同じ向きに平行な２力の合成

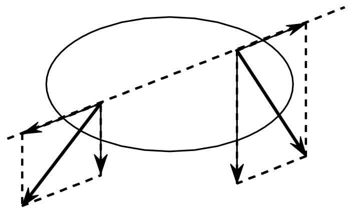
上の合成は作用線の交点に向けて力を動かすことにより合成ができたのであるが、平行な２力の場合はどうであろうか。この場合作用線の交点が存在しないので⑴のような合成はできない。しかし、物体はある方向に動くので合成は可能なはずである。



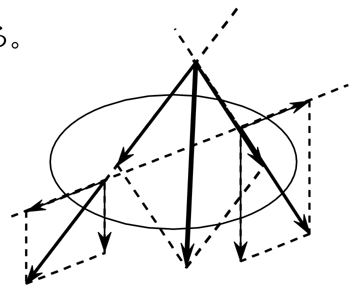
しかし、同一作用線上に逆向き同じ大きさの力を勝手に加えることはできる。



それぞれの2力の合成は当然可能である。

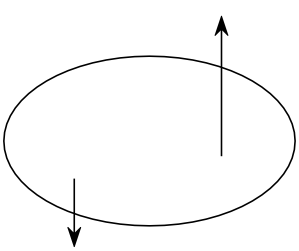


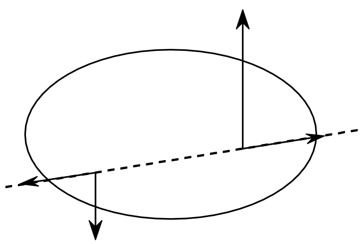
合成した力は平行でないので⑴の方法で合成可能である。



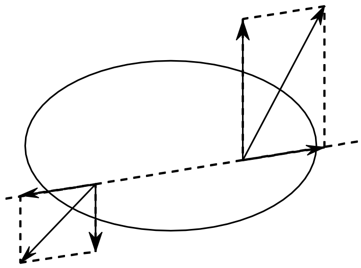
⑶　逆向きに平行な力の合成

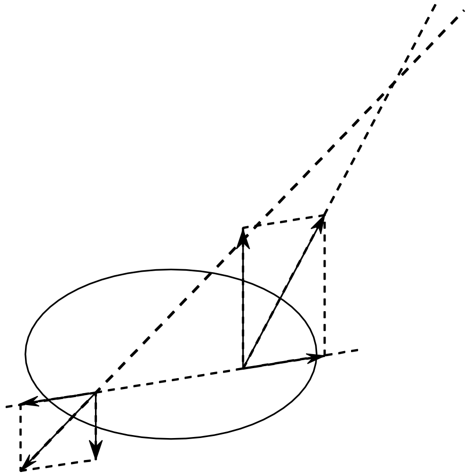
逆向きに平行な力の合成はどうすればよいであろうか。⑵と同じように考えてみる。



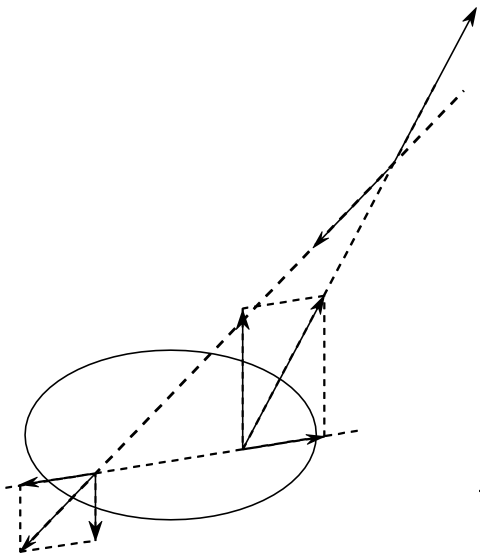


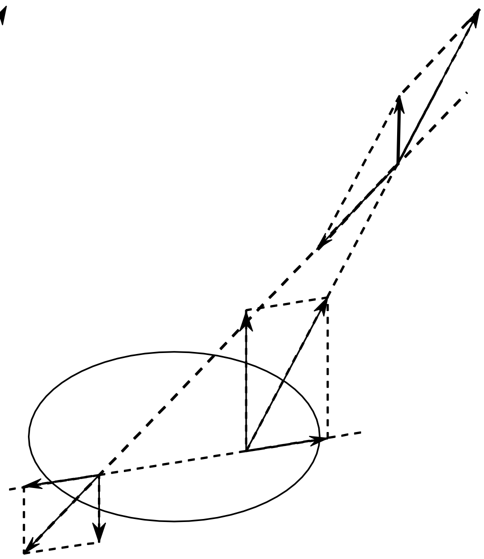
⑵と同じように同一作用線上に力を加えてみる。当然ながら合成は可能である。合成ししてみると、





作用線の交点が見つかる。その交点に向けて力を移動させると、その2力の合成は可能である。

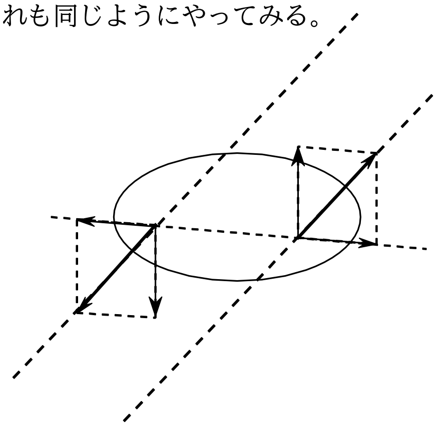


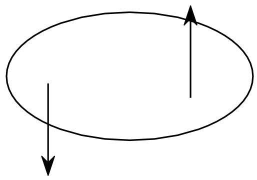


合成した力は物体から離れているが、別にかまわない。気になれば作用線上を動かしてもよい。

⑷　平行で逆向き、同じ大きさの力の合成

それでは、逆向きで長さが同じであればどうであろうか、これも同じようにやってみる。



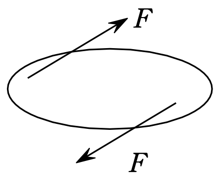


この場合、作用線が平行になってしまう。合成ができない。これはどういうことであろうか。こういった場合は実験を行なってみるとよい。物体を滑らかな机の上に置き、逆向きで同一直線上にない同じ大きさの力を同時に加えてみる。すると、物体は同じ位置で回転を始めることがわかる。言い換えれば、平行で逆向き同じ大きさの力を物体に加えると、物体はその場で回転を始めるのである。つまり、移動なしの回転のみである。このような力を**偶力**と呼んでいる。偶力は回転させるのみで移動させる能力はない。

もし、物体に1本のみ力を加えたならば、物体は必ず移動する。偶力は移動がないから合成できないのである。

３．偶力のモーメント

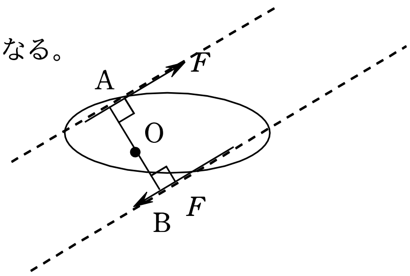
ひとつの物体に同一作用線上にない逆向き同じ大きさの力が作用した場合は以前証明したとおり、この物体は移動せず、その場で回転を始める。移動しないために合力を求めることはできないが、回転するためにモーメントはあることになる。偶力のモーメントを求めてみよう。

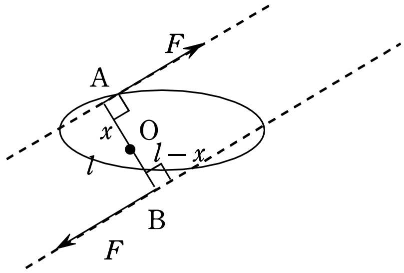


モーメントを求めるには回転の中心が分からなければならないが、回転の中心が不明である。そのために、任意の位置を回転の中心とする。左下の図の黒点の位置を回転の中心

とし、点Oとする。

2本の力の作用線を描くと、その作用線は平行となる。この2本の作用線と垂直で、回転の中心を通る線分を引く。その垂線の足をA、Bとし、線分ABの長さをlとし、OAの長さをxとする。2本の力の作用点がA、Bにくるように作用線上を動かすと右下の図のようになる。





A点に作用点を持つ力の点Oを中心とする力のモーメントはFxで、点Bを作用点に持つ力の点Oを中心とする力のモーメントは$F(l-x)$である。この力はともにこの物体を同じ方向に回転させようとするので、全体のモーメントはその和となる。

よって、力のモーメントMは

$$M=Fx+F(l-x)=Fl$$

となる。

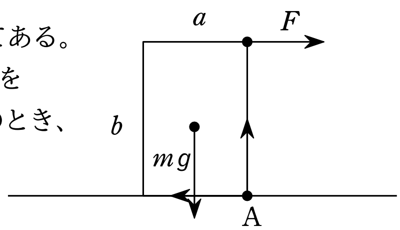
回転の中心を任意に決めたためにxの値は任意となる。しかし、この式にxが含まれていない。これはxがどのような値であっても、力のモーメントは同じであることを意味している。すなわち、回転の中心はどこでもよいということである。

「偶力の回転の中心は任意に決めてよい。その大きさはFlである。」

＜例題＞

荒い面上に高さb、幅a、質量mの直方体が置いてある。この物体の上端から水平に力Fを加えた。加える力を次第に大きくしていくと、物体は傾き始める。そのとき、物体はA点のみで平面と接触している。

この瞬間水平に加えた力Fを求めよ。物体は滑らないものとし、重力加速度の大きさをgとする。



＜解答＞

力Fと同じ摩擦力がはたらいているので、Fと摩擦力は右回転の偶力となっている。

大きさはFb。垂直抗力は重力mgと等しい。垂直抗力と重力で左回転の偶力となっている。大きさは$\frac{1}{2}mga$である。

回転のつり合いが成立しているので、$Fb=\frac{1}{2}mga$

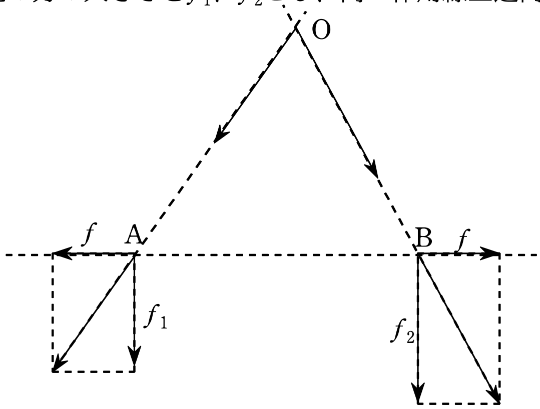
よって、　$F=\frac{mga}{2b}$

４． 平行力の合成

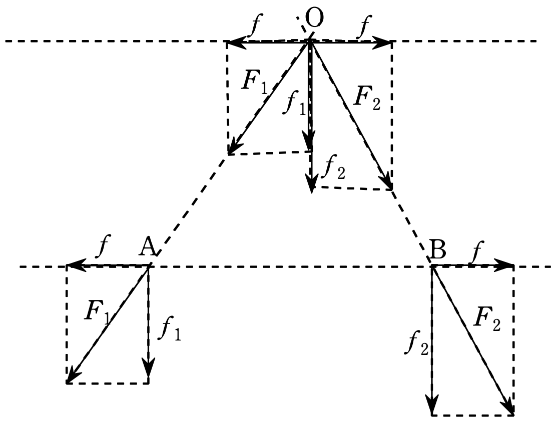
⑴　同じ向きの平行力の場合

力の作用点が物体上にあっても離れていても差し支えないので、以後、物体は書かないことにする。

先ほどの作図手順に沿って力を合成してみると下の図のようになる。元の力の大きさをf_1、f_2とし、同一作用線上逆向きに加える力の大きさをfとする。



力f_1、f_2の作用点をA、Bとし、おのおの合成した力F_1、F_2の作用線の交点をOとする。O点に合成した力F_1、F_2を移動する。次にO点に移動した力をfに平行な力と、f_1、f_2に平行な力に分解すると下の図のようになる。



各分解した力の大きさは、力がA点、B点にあったときと同じであるから、水平方向がf鉛直方向がf_1、f_2である。

力F_1、F_2をO点で合成するということと、O点にあるf、f、f_1、f_2を合成するということは同じことである。二つの力fとfは同一作用線上逆向き同じ大きさの力であるからペアで取り除くことができる。結局、F_1、F_2を合成するということは、O点でf_1、f_2を合成することと同じである。

このO点でf_1、f_2は、同一作用線上にかかっている力であるから、その合成した力も同

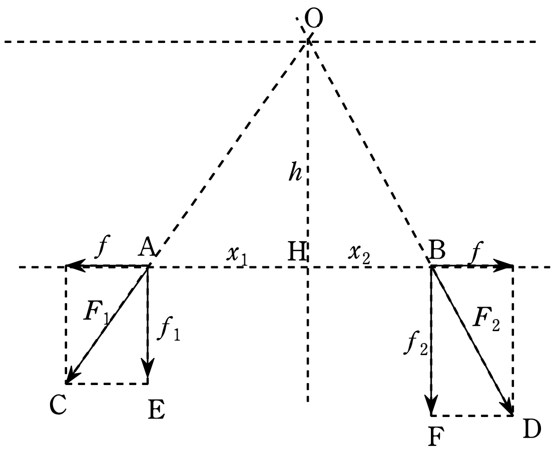
じ作用線上にあり、この作用線は元のf_1、f_2と平行である。よって、次のことが言える。

「平行力を合成した力は元の力と平行である。」

　また、f_1、f_2は、同一作用線上にかかっている力であるから、その合成した力の大きさはf_1+f_2である。よって、次のことが言える。

「平行力を合成した力の大きさは、元の力の大きさの単純な和である。」

次に作用線の位置について考えてみよう。



　上の図は分かりやすくするために余分な力は取り除いてある。点Oから合力の作用線の向きに延長し、線分ABとの交点をHとする。AH$=x_1$、HB$=x_2$とする。

　図において、△ACE∽△OAHであるから、

$$f:f_1=x_1:h \quad \text{で、これは、} \quad f_1x_1=fh \quad \text{となる。}$$

　また、△BDF∽△OBHより、

$$f:f_2=x_2:h \quad \text{で、これは、} \quad f_2x_2=fh \quad \text{となる。}$$

　この2式において、右辺のfhは共通であるため、

$$f_1x_1=f_2x_2$$

　が成立する。この式の両辺はモーメントを表わしている。このことより、合力の作用線上の点では、合成前の力のモーメントの和が0（モーメントの大きさが等しい）になることを意味している。

　この式は、また、次のように変形もできる。

$$f_1:f_2=x_2:x_1$$

この結果をまとめると、次のことが言える。

「平行力を合成した力の作用線の位置は$f_1:f_2=x_2:x_1$となる位置で、この位置では各元の力のモーメントの和が０になる位置である。」

平行力の合成に関して次のことが言える。

①　**平行力を合成した力は元の力と平行である。**

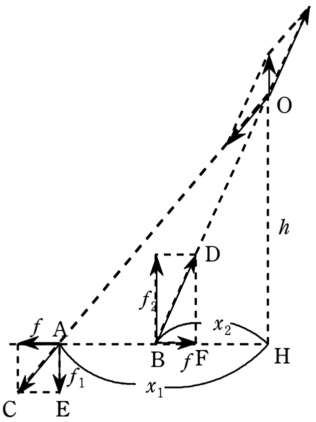
②　**平行力を合成した力の大きさは、元の力の大きさの単純な和である。**

③　平行力を合成した力の作用線の位置は$f_1 : f_2 = x_2 : x_1$となる位置で、この位置では各元の力のモーメントの和が０になる位置である。

　平行力の問題はこの3点に注意して解くと良い。

⑵　逆向きに平行な力の場合

　この場合も同じ向きの場合と同じように作図する。



　AH＝x_1、BH＝x_2、OH＝hとする

　△ACE∽△OAHより、$f : f_1 = x_1 : h$

　△DBF∽△OBHより、$f : f_2 = x_2 : h$

これより、$f_1 x_1 = f_2 x_2$が成立し、同じ向きの場合と同じである。

同じ向きの合成が内分になるのに対して、逆向きの力の合成は外分になる。

⑶　力が直角方向でない場合

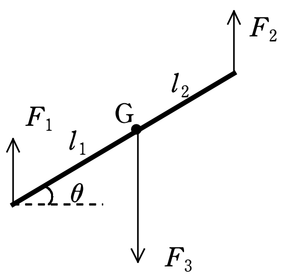
　水平方向と角度θ傾いている棒に平行力F_1、F_2、F_3がつり合っている時、回転中心を重心Gとした時のモーメントのつり合いの式は

　$F_1 l_1 \cos\theta = F_2 l_2 \cos\theta$

これは、

　$F_1 l_1 = F_2 l_2$

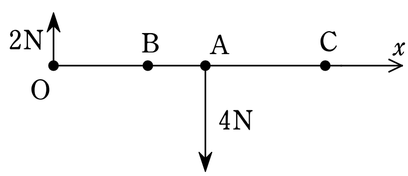
となる。



　これは、**角度θに関係なくモーメントのつり合いの式が成り立っている**ことを意味している。

＜例題＞

原点Oに上向きに2Nの力がはたらいている。横方向にx軸をとり、座標6の位置Aに下向き4Nの力がはたらいている時、この2力の合力の作用点と大きさを答えよ。



＜解答＞

① 大きさは単純和である。

$4-2=2$N　で合力は下向き2Nである。

② 合力は元の力と平行である。　合力は下向き。

③ 作用点はモーメントのつり合いの位置である。

作用点をC(x)とすると、CA＝$x-6$、CO＝xなので、モーメントのつり合いより

$4(x-6)=2x$　これを解くと　$x=12$　　よって、作用点は$x=12$の位置Cである。

Bもモーメントが等しい位置である。この座標をsとすると、AB＝$6-s$、BO＝s

モーメントが等しくなるようなsは　$4(6-s)=2s$　$s=4$

この位置もモーメントが等しいがCとは違って同じ方向に回転するモーメントが同じ大きさの位置である。これはつり合いとは言わない。つり合いは逆向きで同じ大きさのモーメントでなければならない。

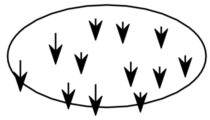
５． 重心

(1) 重心とは

物体には重力が作用して落下運動がおこる。物体の重力は物体を構成するすべての原子に作用している。このすべての重力の作用した運動と同じ運動をする1本の力を作用させたときの作用点を**重心**という。すなわち、重心に作用する1本の力はすべての原子に作用している重力の合力といえる。

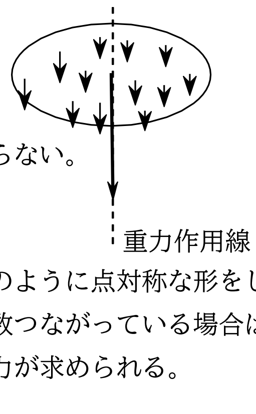
(2) すべての原子に作用する重力の合成

すべての原子に作用する重力は、原子の数だけ存在するが、すべて鉛直下向きで平行な力となる。そのため、平行力の合成が行なえる。



平行力を合成した場合、合成した力は元と平行な力で大きさは元の力の和と等しい。そのため、合成した1本の重力は鉛直下向きでその大きさはすべての原子に作用する重力の大きさの和となる。すなわちその物体の重さである。これを一般に重力と呼んでいる。

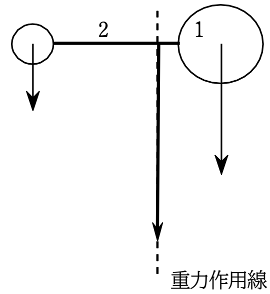
合成した重力は、作用線の位置は決まるが、力は作用線上に沿って動かすことができるため、作用点は決まらない。この作用線を重力作用線と呼ぶことにする。



(3) 重力作用線の決め方１（平行力の合成で求める）

物体が一様な材質でできており、しかも球や立方体などのように点対称な形をしていれば、重心は明らかにその中心となる。このような物体が複数つながっている場合は、**それぞれの物体に作用する重力の合成**をすれば、全体の重力が求められる。

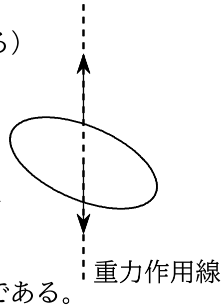
たとえば、右図のように重さ１の物体と重さ２の物体が軽くて質量の無視できる棒でつながれている場合。全体の重力はその2物体に作用する重力の合力で求められる。



この場合の重力はそれぞれの重力の作用点を結ぶ線分を2:1に内分した点を通り、元の重力に平行な方向に合成した重力の作用線が存在している。しかし、あくまで重力作用線が分かるのみで、これだけでは作用点すなわち重心はわからない。

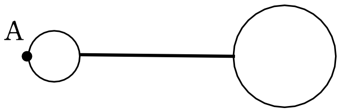
⑷　重力作用線の決め方２（力のつりあいを利用する）

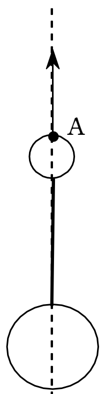
右図のように物体にひもをつけてつるすと、重力との釣り合いが起こる。つりあっている力は同一作用線上に逆向きに作用するため、**張力の作用線と同一作用線**となる。このようにして重力作用線を求めることが可能である。



この方法は物体が線対称な形をしているときに有効である。

例として、下図のような⑶と同じ物体を考えてみる。この場合点Aにひもをつけてつるすと、右図のようになって



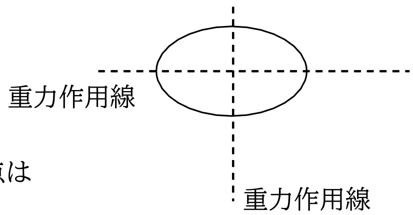


つりあう。これはこの張力の作用線が重力作用線であることを意味している。

⑸　重心の決め方

⑶⑷で重力作用線の決め方を二つ述べた。次はいよいよ重心を決めよう。重心は重力の作用線上にあり、しかも重力が1本である限り重力の作用点すなわち重心はひとつしかない。

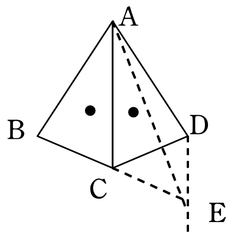
平行力の合成あるいは力のつりあいを利用して重力作用線を2本引くと、重力はそのどちらの重力作用線上にも作用点を持たなければならない。この場合、共通の作用点はその交点しかない。



「重心は2本の重力作用線の交点」

ということができる。

(6)　三角形の重心



右のように左右対称の一様図形ABCDを考えてみる。
左右対称なので、中央の対象軸ACが重力作用線であることは明らかである。左右面積が同じなので、左右の図形の重心の位置も対象と考えてよい。

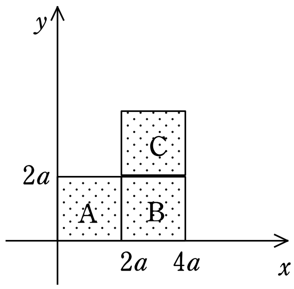
△ADCの頂点Dを鉛直線DEに沿って、BCの延長線上に移動させると、△ADCと△AECの重心は同一円直線上にある。
ACは△ABEの中線であり、同時に重力作用線であることになる。三角形の3中線の交点が数学上の重心である。これは、重力作用線の交点でもあるので数学上の三角形の重心は力学上の重心でもあることになる。

「一様な三角形の重心は力学重心と同じである。」

６．重心例題

重心座標を求める方法は基本的に二通りある。一つは分割する方法、もう一つは穴埋めする方法である。

＜例題１＞　分割して重心座標を求める方法



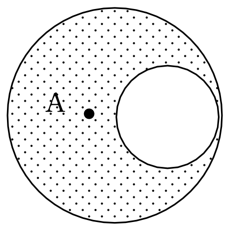
右図のように座標平面上に一様な材質でできた一辺$2a$の正方形の板A,B,Cを設置した。
板ABCの重心の座標を答えよ。

- Aの重心
  板Aの対角線の交点が(a,a)なので、これがAの重心である。
- BCの重心
  板BCの対角線の交点$(3a,2a)$が重心である。
- ABCの重心
  点(a,a)に重力1、点$(3a,2a)$に重力2がはたらいているとして、その合力の作用点の位置が共通重心の位置である。これは、この2点を2:1に内分する点である。
  数学の内分公式より

$$\left(\frac{2a+3a}{3},\frac{2a+2a}{3}\right)=\left(\frac{5}{3}a,\frac{4}{3}a\right)$$

となる。

＜例題２＞　穴埋めして重心座標を求める方法



半径$2r$の一様な円盤から半径rの円を切り抜いたのが下の図である。この板切れの重心の位置Aを求めよ。

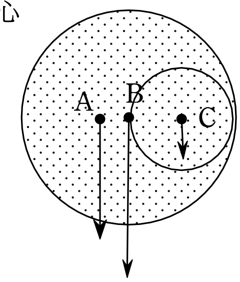
- まずこの板の面積と切り抜いた部分の面積を求める。
  半径比が2:1なので大円と小円の面積比は4:1となるので板切れと穴の部分の面積比は3:1となる。

この板の切り抜いた部分を穴埋めした。Cは埋めた円盤の重心Bは全体の重心である。

元の板切れと穴埋めした板切れの面積比は3:1なので、重力の大きさの比は3:1である。

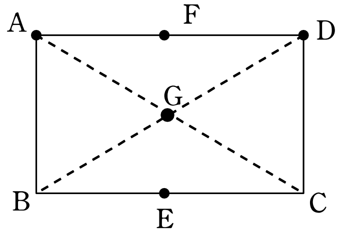
BはAとCの合力と考えられる。よってAB：BCは1:3となる。

よって、AはBより$\frac{1}{3}r$左の点である。



＜例題３＞　平面上の重心

一様な材質でできた質量mの長方形ABCDの板を点A、D及びBCの中点Eの3点で水平に支えた。このとき、A,D,Eの3点にかかる垂直抗力を求めよ。

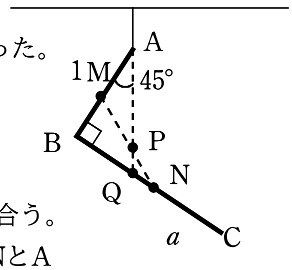


＜解説＞

全体の重心は対角線の交点Gである。このGにmgの重力がはたらいていると考える。ADの中点をFとすると、EとFの中点がGである。よって、E,Fに同じ垂直抗力がかかることになる。よって、Eにかかる垂直抗力は$\frac{1}{2}mg$となる。Fにも$\frac{1}{2}mg$がかかっているが、この点はADの中点であり、Fにはたらく垂直抗力はAの垂直抗力とDの垂直抗力の合力の$\frac{1}{2}mg$とならねばならない。よってA、D共に垂直抗力は$\frac{1}{4}mg$となる。

＜例題４＞　重心を利用したつり合い

AB⊥BCのL型の金具のA端をひもでつるすと、右図のように45°の状態でつり合った。このとき、ABの長さを1とするとき、BCの長さaを求めよ。



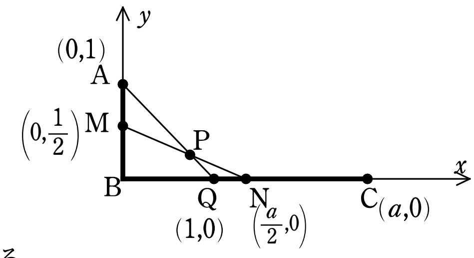
＜解説＞

重心がAを通る円直線AQ上にあればつり合う。AB、BCの中点をそれぞれM,Nとする。MNとAを通る鉛直線との交点をPとすると

MP：PN＝a:1

となる。

ここから先は数学で計算する。直線の方程式を利用する方法、ベクトルを利用する方法、相似比を使う方法などさまざまな方法があるが、ここでは最も一般的な直線の方程式を使うことにする。



直線AQの方程式は　$y=-x+1$

点PはMNをa:1に内分する点なので、$P\left(\frac{a^2}{2(a+1)},\frac{1}{2(a+1)}\right)$

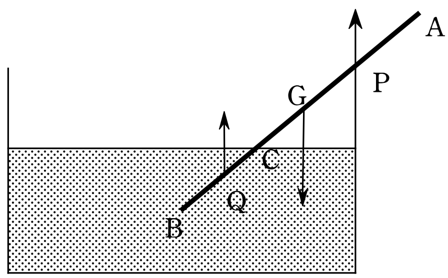
これが直線AQ上にあるので、

$$\frac{1}{2(a+1)}=-\frac{a^2}{2(a+1)}+1$$

これを解くと　$a=1+\sqrt{5}$

＜例題５＞　浮力の作用点（浮心）

太さ、材質が一様な長さlの棒を$AP=\frac{1}{5}l$となる点Pが、水槽の淵に接触し水中部分が$BC=\frac{2}{5}l$となるように水中に沈んでいる状態でつり合っている。この時、この棒の密度は水の密度の何倍（比重）か。



＜解説＞

質量をmとすると、重心Gにはたらいている重力はmg。点Pにはたらいている抗力は浮力と重力が鉛直方向なので、抗力も鉛直方向である。上向きにNとする。浮力も上向きで、大きさをFとする。

$$GP=\frac{1}{2}l-\frac{1}{5}l=\frac{3}{10}l$$

浮力の作用点（浮心Q）は水中部分の物体を水と置き換えた時のこの水の重心であるので、QはBCの中点となる。

$$GQ=CQ+CG=\frac{3}{10}l$$

回転中心をGとした時のモーメントのつり合いの式は

$$F\cdot\frac{3}{10}l=N\cdot\frac{3}{10}l \quad \cdots\cdot①$$

また、鉛直方向のつり合いの式より　$F+N=mg$　····②

①②を連立させると

$$N=\frac{1}{2}mg \quad F=\frac{1}{2}mg$$

この棒の断面積をS、棒の密度をρ、水の密度をρ_0とすると、

重力は　$mg=\rho Slg$

浮力は　$F=\frac{3}{10}\rho_0 Slg=\frac{1}{2}mg=\frac{1}{2}\rho Slg$

$$\frac{\rho}{\rho_0}=0.6$$

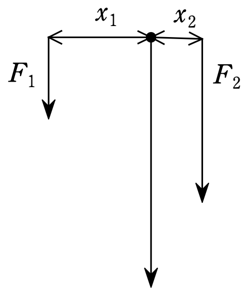
７． 力の移動と回転について

⑴ 作用線上に重心を含む力を加えたときの物体の運動。

以前に平行力の合成をしたとき、その合力の作用線は、元の力のモーメントの和が0になる位置であった。すなわち、右図において

$$F_1x_1=F_2x_2$$

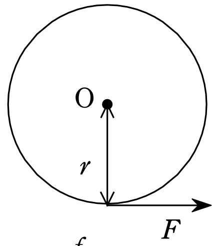
が成立しているということである。このことは重心を作用点とする力を加えても、他に力がかかっていないならば、この物体は回転しないことを意味している。すなわち、

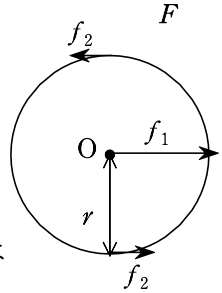


「重心を作用線上に含む力はその物体を回転させない。移動のみである。」

といえる。

図のような回転の中心を円の中心とする半径rの回転円盤において、その円周上に力Fを加えた。そのとき、この回転円盤は回転しながら併進（移動）する。この力を移動させる力と回転させる力に分解してみよう。今までの学習により、移動のみさせる力は重心を作用線とする力で、回転のみさせる力は偶力である。この2種類の力に分解するとことする。合成した平行力は元と同じ方向であるから、図のようにすべて同じ方向とする。



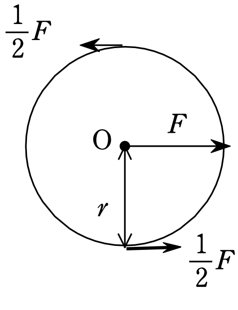


重心にかかる力の大きさをf_1、偶力の力の大きさをf_2とする。平行力の合成において大きさは単純和であるから、この3力の大きさの和は$f_1+f_2-f_2$となり、これは合力のFと大きさが等しくなる。よって、$f_1=F$

また、偶力のモーメントはFlであるから、この場合は$f_2\times 2r=2f_2r$となる。

分解前のモーメントはFrであるから、両者は等しくなる。よって、$f_2=\dfrac{1}{2}F$

となる。図に描けば右図のようになる。



物体にこの3つの力が作用するということと最初にひとつの力が作用するということは、物体の速度変化はまったく同じである。つまり、同じ力と考えてよい。以上より分かることは、移動させる力は元の力と同じ大きさで同じ方向であるということである。つまり、重心に力を加えた場合は回転せずに移動のみであるが、周辺に同じ大きさ同じ方向の力を加えた場合は移動は同じで、回転が異なるということになる。言い換えれば、回転を考えないで移動のみ考えるときは、この二つの力は同じと見てよいということになる。

「物体の回転を考えないときは作用線を外れて力を平行移動してもよい。」

８． 物体のつり合い

物体がつりあっているということ

物体がつりあっているということは、物体が移動しないことに加え、回転しないことも考えなければならない。物体の大きさを無視できる場合、あるいは明らかに回転しない場合においては、回転の釣り合いを考える必要はないが、物体の大きさを無視できない場合物体の回転のつりあいも考えなければならない。

モーメントのつり合い問題の解き方は一般的に二通りある。

⑴ モーメントのつり合いの解き方[必殺技]

① 力の作図

つり合いを計算する物体にはたらいている力をすべて作図する。

重力…物体の重心から真下に大きさmgで引く。

張力…ひもとの結び目からひもに沿って引く。

摩擦力…物体どうしの接点から滑ろうとする逆向きに引く。

垂直抗力…物体どうしの接点から摩擦力と垂直で、対象物体のある向き。

垂直抗力と摩擦力はペアで存在し、物体どうしの接点に必ず存在する。物体とた物体のすべての接点をチェックすること。

② すべての力を水平方向と鉛直方向に分解する

③ 鉛直方向の力のつり合いの式を立てる。

回転を考えないために力の平行移動は可能である。

④ 水平方向の力のつり合いの式を立てる

これも回転を考えていないために力の平行移動は可能である。

⑤ 回転のつり合いの式を立てる。

この場合は回転を考えるので力を平行移動してはならない。力は作用線上のみ移動可能である。

物体が回転していないので回転中心をどこにしてもモーメントはつり合っているはずである。そのために、**回転中心はどこでもよい。**

回転中心はどこでもよいのであるが、計算を少しでも楽にするために、力の作用線の交点を利用することを勧める。作用線の交点を回転中心とすると、その作用線を持つ力のモーメントは0となるので、方程式が簡単になるのである。

さらに、楽に計算するためには、未知の力の作用線の交点が最良である。③④⑤と三つの方程式の連立になるために通常未知力は3つ存在する。未知力の作用線の交点を回転中心として回転のつり合いの方程式を立てると、未知数が一つになるので、その方程式を解くのが楽になる。

「未知力の作用線の交点を回転中心とするとよい」

⑵ 作用線を集める方法

力は作用線上に動かしてもよい。もし、作用線上に動かして1点で交われば合成することが可能であり、合成の結果0になってしまえば力がはたらいていないのと同じになる。

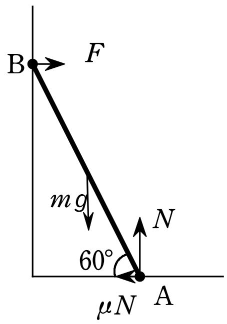
もし、一点に交わらないとすれば、合力が存在しないことになる。この時は偶力が存在しているので物体は回転する。

物体の運動は並進運動と回転運動に分けられる。物体の運動する方向は一つしかないので、同じ並進運動をさせる重心にはたらく1本の力が存在し、回転のみの運動は偶力である。重心にはたらく力が0でなければ、偶力と合成できるので、同じ動きをさせる1本の力が必ず存在する。これは、すべての力は1本に合成できることを意味している。

よって、

「力が釣り合っている以上必ず力を作用線上に動かすと1点に集まり、その合力は0である。」

９． 例題１[必殺技]



長さl、質量mの一様な棒を静止摩擦係数μの床と摩擦のない壁に立てかけた。床からの角度を小さくしていくと60°になった時に滑り出した。重力加速度の大きさをgとしてF、μ、Nを求めよ。

棒に床から作用する垂直抗力をN、最大摩擦力をμN

壁から棒が受ける垂直抗力をFとする。

＜解答＞

① 力の作図

棒の重心（中心）より、真下に重力mg

張力はひもがないので存在しない。

物体どおしの接点はA,Bなので、この2か所に摩擦力と垂直抗力が存在している。

A点の垂直抗力をN、最大摩擦力をμN、B点の垂直抗力をFとする。（B点は摩擦がないので摩擦力は存在しない。）

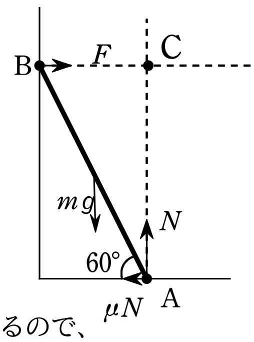
② すべての力を水平方向と鉛直方向に分解する。

斜めの力がないので分解の必要はない。

③ 鉛直方向のつり合いの式を立てる。$F=\mu N$

④ 水平方向のつり合いの式　$N=mg$

⑤ 回転のつり合いの式。



未知力はF、μN、Nなので、この力の作用線の交点を考える。未知力の作用線の交点は右図のA,Cである。

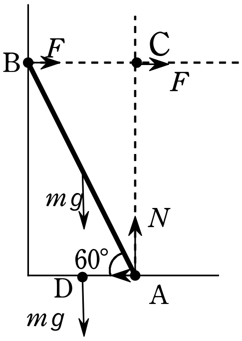
Aを回転中心とすれば回転のつり合いの式の未知力はFのみ、Cを回転中心とするとμNのみであるが、これは、未知数二つとなるので、回転中心はAが最適である。

よって、

力FをC点に力mgをD点に移動させてモーメントのつり合いの式を立てると、　$Fl\sin 60° = mg\cdot\frac{1}{2}l\cos 60°$

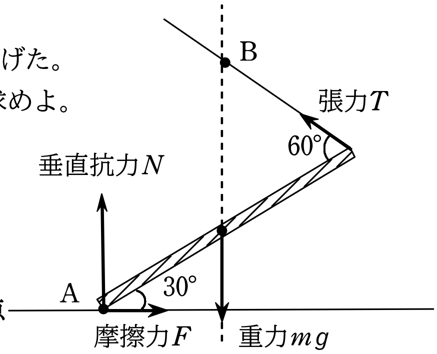
これは、$F=\frac{\sqrt{3}}{2}mg$

③に代入して　$\mu=\frac{F}{N}=\frac{\sqrt{3}}{2}$



10.　例題２[力の合成で解く方法]

摩擦のある水平面上に、長さl、質量mの棒を置き
一端をひもで結んで右図の角度になるように引き上げた。
この時、張力T、垂直抗力N、摩擦力Fの大きさを求めよ。

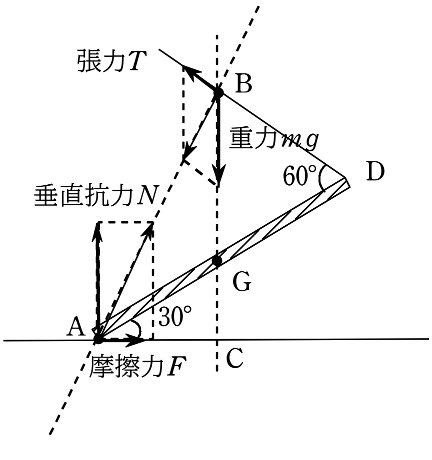


＜解答＞

例題１のように必殺技で計算することもできるが
力を合成する方法で解くことを考える。

物体が静止状態にある時は、すべての力は一点に集まりその合力は0である。

もし力が一点に集まらない時は偶力が存在して物体は回転することになる。
4本の力の作用線はそのままでは1点に集まらない。
そこで、まず、2点に集めることを考える。
摩擦力と垂直抗力の作用線の交点Aと
重力と張力の交点Bである。



A点とB点に力を移動させて合成させると
右図のように2本の力になる。すべての力が
１点に集まるためには、この2本の力は
同一作用線上逆向き同じ大きさの力の関係に
なければならない。

ABが同一作用線となる。∠AGC＝60°なので、
∠DGB＝60°となり、△DBGは正三角形
重心GはADの中点なので、△AGBは二等辺三角形。

よって、∠GBA＝∠DAB＝30°、AB⊥BD

三角比を使うことにより、$T=\frac{1}{2}mg$となる。

そして、張力と重力の合力の大きさは　$\frac{\sqrt{3}}{2}mg$。

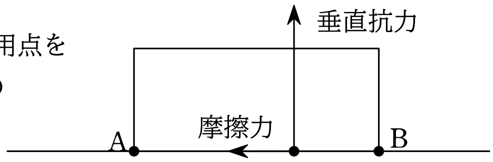
これは、垂直抗力と摩擦力の合力と等しい。

よって、摩擦力は　$\frac{\sqrt{3}}{4}mg$、垂直抗力は　$\frac{3}{4}mg$

11. 物体が倒れるかすべるかの判断

(1) 垂直抗力、摩擦力の作用点

ある物体が、面ABで接しているとする。摩擦力、垂直抗力は面上のすべての点に作用点を持っているが、1本の力に合成できる。その合成した摩擦力、垂直抗力の作用点はどこであろうか。



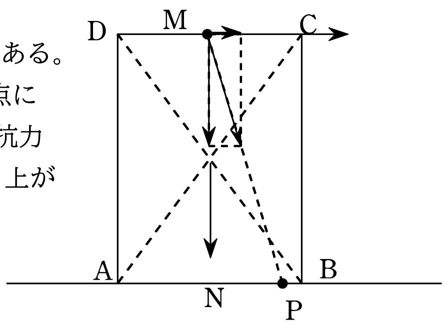
物体が回転していない場合は、摩擦力、垂直抗力を含めてモーメントのつり合いが成立している。モーメントが釣り合っている位置に垂直抗力、摩擦力の作用点があると考えられる。摩擦力の場合、面に沿うので面上のどこにあっても矛盾はないが、垂直抗力と同じ作用点と考えておくとよいであろう。

垂直抗力･摩擦力共に物体どおしが接触しているその接触面にはたらいている。垂直抗力の作用点は上の図では接触面AB間にあるはずである。

AB$=a$、BC$=b$、質量mの直方体を静止摩擦係数μの水平面に置き、点Cに水平方向にFの力を加えたとする。このFを次第に大きくしていった時、物体はどのような動きをするであろうか。

CDの中点をMとする。F及び重力mgの作用線の交点がMなので、Mで二力を合成し、その合力の作用線と面ABとの交点をPとする。この物体が釣り合い状態にある限り、この合力は同一作用線上逆向き同じ大きさの力で打ち消されなければならない。そのためには、垂直抗力、摩擦力の作用点はPでなければならない。そして、垂直抗力と摩擦力の合力はFと重力の合力と同じ大きさである。

Fが次第に大きくなれば、点Pは少しずつB点に近づいていく。P点とB点が一致した時、垂直抗力摩擦力共に一点で接することになりA側が浮き上がる。



P点がB点より右側に来た時、その点には物体が存在していない。そのため、垂直抗力をはたらかせることができなくなり、この物体は倒れる。

点PがB点と重なる時のFを求めてみよう。ABの中点をNとすると、P＝Bとなったとき、△BNM≡△PNMである。よって、

$\frac{a}{2}:b=F:mg$　より、　$F=\frac{amg}{2b}$

一方、摩擦力の大きさはFと等しく、最大摩擦力はμmgなので、$F<\mu mg$のときに滑らない。そのため、Fを次第に大きくしていった時、$\frac{amg}{2b}>\mu mg$であれば、P点がBに達する前に最大摩擦力を超えるので、倒れる前にすべることになる。

また、逆に$\frac{amg}{2b}<\mu mg$であれば、すべる前に倒れることになる。