仕事とエネルギー

１． 仕事とエネルギー

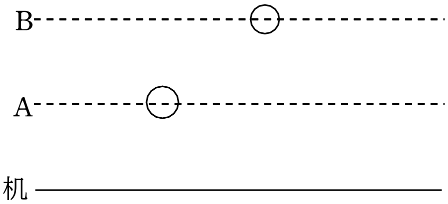
⑴ エネルギーとは何か

我々は「自動車のエネルギー源は何か？」と聞かれると、即座に「ガソリン」と答える。「ガソリンを抜いた自動車は動くか？」の問いに「動かない」と答える。エネルギーがないと車は動かないことを我々は理解しているのである。それでは「エネルギーとは何ですか」の問いにどう答えるか。エネルギーがなければ物体は動かないのであるから、
「エネルギーとは物体を動かす能力である」といえる。

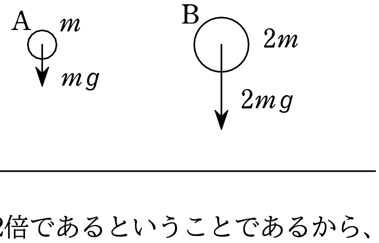
この考え方に立つと、机の上においている物体はそのままでは永久に動かない。このことから、机の上の物体にはエネルギーがないことが分かる。また、机上より上の空中にある物体は、重力の影響を受けてたちまち動き始める。これは、空中にある物体はエネルギーを持っていることを意味している。また、我々人間も手足を自由に動かせるのでエネルギーを持っているといえる。

机の上にある物体が、もし燃える材質でできた物体であれば、火をつけることにより燃える。このときに熱を出すが、この熱は周りの空気を膨張させ、その空気の流れで、プロペラを回すことも可能である。机の上の物体にはエネルギーがないと言ったが、燃やすことまで考えると、エネルギーを持っていることになる。このようなエネルギーを**内部エネルギー**という。

⑵ エネルギーの大小はどのようにすれば測定できるか



机上より少し高いA点にある物体と、その2倍の高さのB点にある同じ質量の物体ではB点にある物体の方が動きが大きい。よって、エネルギーには大小（量）があることが分かる。A点にある物体を机上まで落としたとすると、B点にある物体はA点まで落ちれば、Aが机まで落ちたのと同じ速度を持ち、そこから、Aまでさらに落ちるのであるから、B点にある物体はA点の物体より2倍動く能力を持つことになる。すなわち、B点にある物体の持つエネルギーはA点にある物体がもつのエネルギーの2倍であることになる。よって、この場合のエネルギー量は距離に比例することが分かる。（注…この場合は内部エネルギーは考えていない。）



次に同じ高さにある質量mの物体Aと、質量が$2m$の物体Bでエネルギー量を比べてみると、物体Bを二つに割って片方を落としたときと、物体Aのエネルギー量が同じであるから、物体Bのエネルギー量は物体Aのエネルギー量の2倍といえる。質量が2倍であるということは重力が2倍であるということであるから、エネルギー量は動かすのに必要な力に比例するということになる。

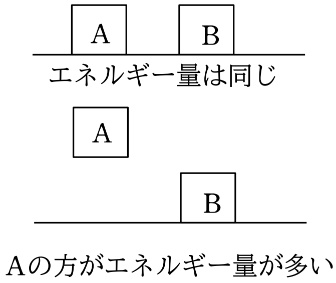
ここまでをまとめると、物体が動くときのエネルギー量は物体に作用する力の大きさと

その動かした距離の積に比例することになる。すなわち、力×距離に比例することになる。この**力×距離**で表されたものを**仕事**という。力を[N･ニュートン]、距離を[m･メートル]で表わしたときの仕事量を[J･ジュール]という単位で表わすものとする。

⑶　仕事の意味

机上にある静止している本は火をつければ燃える。燃えるということは内部エネルギーを持っているということである。燃えた後の灰はエネルギーがないと考えるかもしれないが、核反応させればまだエネルギーが出てくる。或いは反物質と呼ばれている物質を反応させるとすべて光になってエネルギーが出てくるのである。すべて光になって物質が消滅した後も真空のエネルギーがあると言われている。つまり、**エネルギーは0の状態が不明**なのである。よって、エネルギー量そのものを計算することができない。

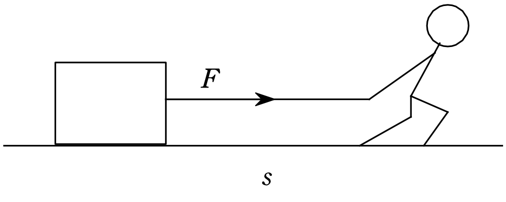
それでは力×距離というものはエネルギー量でなければ何を意味しているのであろうか。同じ物体A,Bを同じ所に置くと、エネルギー総量はいくらか分からないが、そのエネルギー量は同じという事だけははっきりとしている。Aだけ持ちあげると、Aの方がエネルギー量は多くなる。力×距離は持ちあげた分だけのエネルギー増加分である。すなわち、力×距離はA,Bのエネルギー量の差を意味していることになる。仕事はエネルギーの差ということができる。



仕事とは世間一般には労働のことを指している。労働とは人のために自分のエネルギーを使って給料を受け取ることである。言い換えれば、「**仕事とはエネルギーを使うこと**」といえる。

前述のように**仕事＝力×距離**と定義されている。この仕事とエネルギーの関係は具体的にどのような関係にあるのだろうか？

図のように人が物体に力Fを加えて物体をs動かしたとき、人はその分エネルギーを消費し、人の持つエネルギーは減少している。人は仕事Fsをしているのだから、エネルギーをFsだけ失ったことになる。

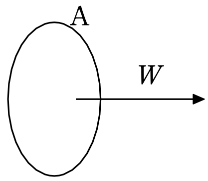


よって、仕事とはエネルギーを失うこと、あるいはエネルギーを使うこと、となる。

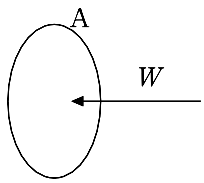
では、失ったエネルギーはどこに行ったのであろうか。この物体が最初静止していて、摩擦などのそのほかの力が作用していないものとすると、力Fにより、この物体は加速することになる。この物体をs動かした後は、この物体は速度を持つことになる。動いている物体は他の物体と衝突することにより、他の物体を動かす能力を持っているので、この物体はエネルギーを持っているといえる。この様なエネルギーを**運動エネルギー**という。この物体が最初、静止しているときはエネルギーを持っていなかったわけであるから、この物体はエネルギーをもらったことになる。この人が仕事をすることにより失ったエネル

ギーはこの物体がもらったといえる。
よって**「仕事とはエネルギーの移動を表わしている。」**といえる。
　ここまでを図にまとめてみると次のようになる。

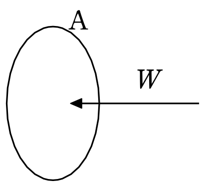
「AがWの仕事をした。」という表現は右図のように
AからエネルギーWが出て行ったことを意味する。



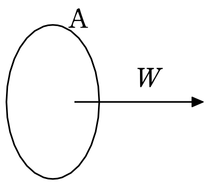
「AがWの仕事をされた。」という表現は、誰かに仕事をしてもらったことになり、Aは得をしている。表現を変えれば、Aがエネルギーをもらったことになる。



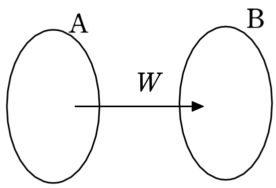
「Aが$-W$の仕事をした。」という表現について、マイナスの符号は逆向きであることを意味するから、Aが$-W$のエネルギーを放出したこととWのエネルギーをもらったことと同じことであるから、右図のようになる。



「Aが$-W$の仕事をされた。」という表現は、Aは$-W$のエネルギーをもらったことになり、流れを逆にしてWのエネルギーを放出したことになる。



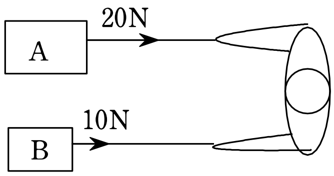
「AがBに対してWの仕事をした」という表現は物体Aから物体BにエネルギーがW移動したことを意味し、AのエネルギーがW減少し、BのエネルギーがW増加したことになる。



　物体を動かすということは仕事をすることに他ならないから、物体を動かす能力とは仕事をする能力と同じことである。そのために、エネルギーの表現を整理すると、教科書では、**「エネルギーとは仕事をする能力」**と書かれている。

２．物がした仕事と力がした仕事

　ある人が右手に20N、左手に10Nの力を加えて同時に10m動かした場合を考えてみよう。
　20Nの力がした仕事は、200Jで、10Nの力がした仕事は100Jである。それに対してこの人がした仕事は300Jとなる。



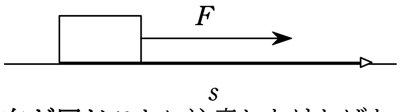
これより、力がした仕事はその力のみの仕事で、物体や人がした仕事は、その物体や人が出した力のした仕事の総計となる。

３． 仕事の性質

簡単のために静止している物体に力を加える場合について考えることにする。

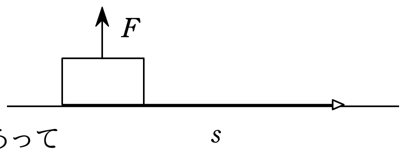
(1) 力の方向と動かす方向

① 力Fを加えて物体をs動かしたとき、その仕事は$W=Fs$である。静止物体に力Fのみ加えると、物体の速度は力を加えた方向に変化するため動く方向と力を加えた方向は同じ方向である。



よって、$W=Fs$を使うときは**力の方向と動く方向が同じ**ことに注意しなければならない。

② 静止物体に動く方向と直角方向に力を加えた場合について考えてみよう。

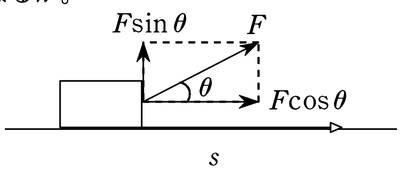


力はその加えた方向に速度変化を起こすのであってその直角方向には速度変化させることはできない。もし、この物体が水平方向に動き始めたとすれば、力F以外の力が水平方向にはたらいていることを意味しており、仕事をしたのはその力ということになる。この場合、力Fは一切仕事をしていない。力はその直角方向に速度変化させる能力はない。能力のない仕事はできないので、**「動く方向と直角方向に力を加えた場合、その力のした仕事は0である。」**

（この場合、力Fを加えても物体の速度が変化していないわけであるから、Fと逆方向に同じ大きさの力がかかっているはずである。この力が邪魔をしたためにFは仕事ができなかったと解釈する）

③ 動く方向に対して斜めに力を加えたらどうなるか。

力の合成分解は自由に行なうことができる。水平方向及び垂直方向の仕事が分かっているのであるから、力をその方向に分解すると良い。



そうすると、水平方向に$F\cos\theta$、鉛直方向に$F\sin\theta$の力が作用したことになる。このうち、鉛直方向の力は仕事をしていないため、仕事をしたのは、水平方向の$F\cos\theta$の力である。よって、

$$W=Fs\cos\theta$$

となる。これはベクトルの内積である。ベクトルを用いて

$$W=\vec{F}\cdot\vec{s}$$

として計算してもよい。

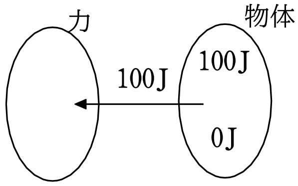
④ 動く方向と逆方向に力を加えると仕事はどうなるか。

静止している物体に力を加えると、力を加えた方向に物体は移動する。ところが、この物体が初速度を持っている場合は、力を加えた方向と移動方向が異なるということが起こる。

動いている物体に逆方向に力を加えた時の仕事はどうなるのであろうか。この場合物体

は減速し，やがて静止する。

最初物体が100Jの運動エネルギーを持っていたとすると、静止した時の運動エネルギーは0なので、物体はエネルギーを失ったことになる。



力はエネルギーを受け取ったことになる。これは負の仕事である。

また、$W = Fs\cos\theta$ で計算すると、力と動く方向が逆なので間の角度θは180°となる。

$W = Fs\cos 180° = -Fs$

「動く方向と力が逆向きの場合は仕事は負となる。」

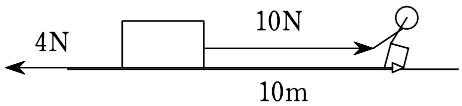
仕事をベクトルの内積で計算する場合は、特に注意する必要はないが、ベクトルを使わずに計算するときは、必ず力の向きと動く方向を確認した後で符号をつけなければならない。

仕事はエネルギーの流れ図を描いて考えると理解しやすい。

⑵　仕事はエネルギーの流れである。

＜例題＞

ある物体を荒い水平面上に静かに置き、ある人が10Nの力を加えて10m動かした。そのとき、逆向きに摩擦力が4Nはたらいていたとすると、10m動かした後、この物体が持っている運動エネルギーはいくらか。



＜解答＞

・　エネルギーの流れ図の描き方

①　力の作用点を持っている物体に注目

物体を中央に〇印で描く。

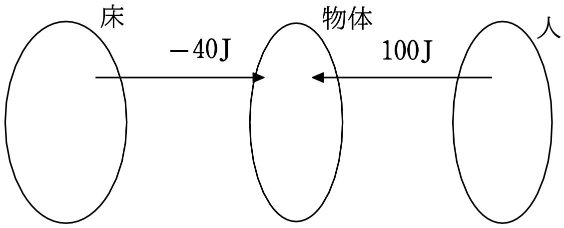
②　その物体にはたらいている力の本数だけ仕事が存在するので、力の本数だけ相手を描く。

この場合は力は張力と摩擦力の2本である。よって、仕事をする相手は二つある。張力を出したのは人で、摩擦力を出したのは床である。物体の〇の両側に床と人の〇を描く。（この場合重力と垂直抗力は同一作用線上逆向き同じ大きさの関係にあるので、無視してよい。）

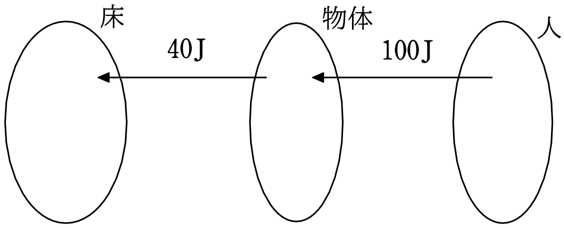
③　物体に力を加えている相手のした仕事を矢印で描きこむ。

人（10N）の力がした仕事は100Jなので、人から物体に向けて100Jの矢印を描く。

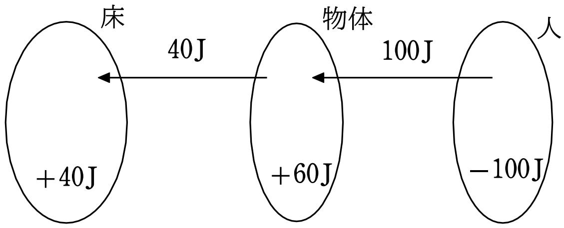
床（摩擦力＝4N）の力がした仕事は－40Jなので、物体から床に向けて－40Jの矢印を描く。



負の仕事はエネルギーの流れが逆なので、矢印を逆向きにする。
この関係を図に表わすと下のようになる。



この図を見ると物体は人からエネルギーを100Jもらい、床にエネルギー40J渡したことになる。よって、床はエネルギーが40J増加し、物体は60Jのエネルギーが増加したことになる。

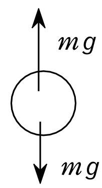


この物体には10Nの力と、逆向きの4Nの力が作用しているので、差し引き6Nの力で加速している。そのため、10m運んだ後は速度を持っていることになる。よってこの物体の運動エネルギーが60Jということになる。

床は40Jのエネルギーをもらったが，このエネルギーは何であろうか。摩擦力に対抗して物体を動かしているわけであるから、その摩擦面は摩擦により加熱して温度が上がっている。温度が上がると、周りの空気を膨張させ、その上昇気流でプロペラを回すことができる。すなわち、熱もエネルギーである。床は確かにエネルギーを受け取っているのである。

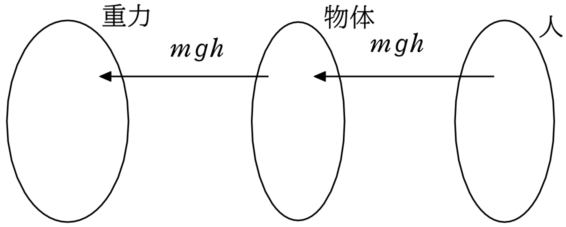
⑶　ゆっくりと動かす仕事

重力mgがはたらいている静止物体を上向きに等しい力mgでは物体を運ぶことができない。しかし、最初動かす時に若干大きい＋αの力を一瞬加え、若干の初速を与える。後は重力と等しい一定の力で動かし、最後に－αの力を加えて静止させる。＋αと－αで打ち消し合うと考えてもよい。このような動かし方を一般的に**ゆっくりと運ぶ**という。



最初静止しており、目的地に着いた時も静止していれば、運動エネルギーの変化がない

わけであるから、重力mgがh上向きにした仕事は$-mgh$、上向きに運ぶ力mgがした仕事はmghである。

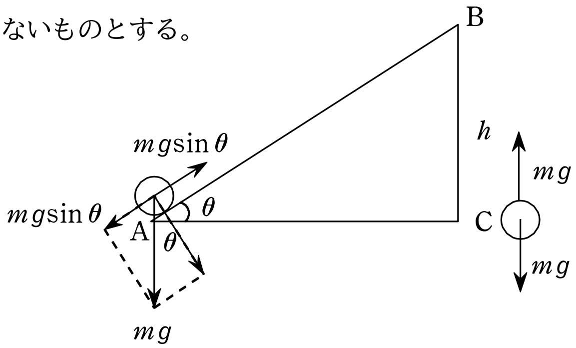


流れ図を描くと上のようになる。重力とした仕事と運ぶ力がした仕事の和が0となるので、物体の持つ運動エネルギーに変化がなくなる。このようにしてゆっくりと運ぶ仕事を考える。

４．仕事の原理

(1) 運ぶ経路に関係なく仕事は同じ

傾角θ、高さhの斜面の下端Aより上端Bにゆっくりと運ぶ仕事を求めてみる。摩擦は一切ないものとする。



① 斜面上をAからBに運ぶ場合

距離AB$=\dfrac{h}{\sin\theta}$

斜面方向にゆっくりと運ぶ力の大きさ　$mg\sin\theta$

なので、AからBに運ぶ仕事は

$W=mg\sin\theta\cdot\dfrac{h}{\sin\theta}=mgh$

仕事に角度θが含まれていない。斜面の角度に関係なく仕事は同じといえる。

② A→C→Bと運ぶ場合

AC間には水平方向の力がはたらいていない。そのため、AC間を運ぶには力が要らない。よって、AC間の仕事は0である。

CB間は重力mgがはたらいているので、上向きmgの力でh運ぶことになり、この場合の仕事はmghとなる。

①②より、どのような角度の斜面でも垂直に運んだ仕事と同じであることが分かる。

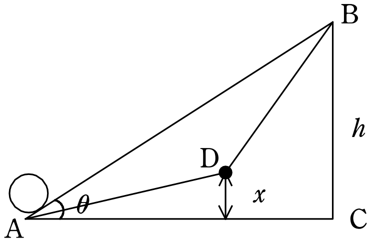
③ 途中を経由した場合

AからBに運ぶ時任意の点Dを経由するとする。Dの高さをxとすると、AD間を運ぶ仕事はmgx

DB間の高さは$h-x$なので、DB間を運ぶ仕事は$mg(h-x)$である。

よって、AB間を運ぶ仕事は

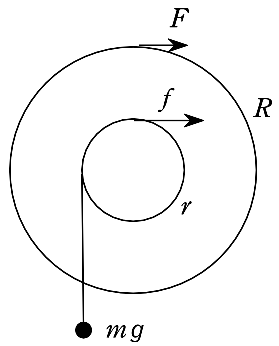
$mgx+mg(h-x)=mgh$



となる。このことは、最初と最後の点がはっきりしていれば、途中でどのような経路であろうが、すべて仕事が同じことを意味している。

「摩擦がなく最初と最後の位置が同じであれば、途中の経路に関係なく仕事はすべて同じである。」
といえる。

⑵　どのような道具を使っても仕事は同じである。



回転軸が同じ同心円状の滑車が二つある。
小さい滑車は半径r、大きい滑車は半径Rである。軸は固定されており、二つの滑車は常に同じ角度だけ回転するようになっている。
（このような装置を輪軸という）

この輪軸の内側の滑車にロープを通して質量mのおもりをつるした。

内側の滑車にロープを通しておもりを引き上げた場合と外側の滑車にロープを通しておもりを引き上げた場合の仕事量を求めてみよう。

①　内側の滑車でゆっくりとh持ちあげる場合。

滑車を引っ張る力は$f=mg$となるので、仕事はmghである。

②　外側の滑車でゆっくりとh持ちあげる場合

この滑車を引く力Fはモーメントのつり合いより、$FR=mgr$　なので、$F=\dfrac{mgr}{R}$

おもりをh持ちあげるための回転角θは高さh分だけ回転させる必要があるので

$h=r\theta$　の関係が成り立つ。　よって，　$\theta=\dfrac{h}{r}$

外側の滑車の回転した距離（弧の長さ）lは　$l=R\theta=\dfrac{Rh}{r}$

仕事は　$Fl=\dfrac{mgr}{R}\cdot\dfrac{Rh}{r}=mgh$

①②より回転半径に関係なく仕事が同じであることが分かる。

「道具に関係なく仕事量は同じである。」

⑴⑵を合わせて**仕事の原理**という。

５．仕事率

仕事率とは単位時間の仕事量である。単位はW[ワット]である。
500Jの仕事を10sでこなせば1秒間あたりの仕事は50Jなので、仕事率は50Wとなる。この数値が大きいほど激しい仕事をしていることになり，単位時間のエネルギー消費が大きいことを意味している。

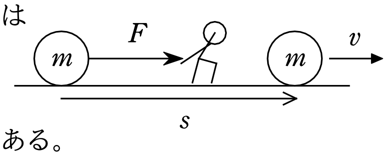
ある物体に力Fを加えて一定の速度vで動かした時、力Fは1秒間あたりv移動しているので1秒間あたりの仕事はFvとなる。　よって、この場合の仕事率は　Fv
（この場合，力を加えても速度は変化していないので，逆向きに同じ大きさの力が働いていることに留意すること）

６． 運動エネルギー

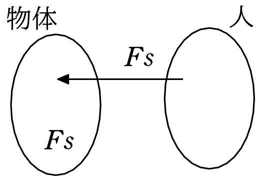
(1) 運動エネルギーの大きさ

動いている物体は衝突することによってほかの物体を動かすことができるので，エネルギーを持っていることになる。このように運動している物体が持っているエネルギーを運動エネルギーという。

静止している物体に力Fを加えてs動かしたとき、この物体にした仕事はFsであるから、この物体はFsのエネルギーをもらっている。このエネルギーは物体が動くことによって持っているエネルギーであるから、Fsは運動エネルギーである。



ところが、F,s共にすでに動いている物体の運動エネルギーを求めるには共に不明である。



動いている物体で分かる量は質量m及び速度vである。このm,vでを用いて運動エネルギーを計算してみよう。

運動エネルギーをKとおくと

$K=Fs$

この物体がs動く間の加速度がaで加速時間がtであるとすると、

運動方程式は　$F=ma$　なので，　$K=mas$

加速度aは1秒間の速度変化なので、$a=\dfrac{v}{t}$

移動距離sは平均速度×時間で表される。平均速度は$\dfrac{0+v}{2}=\dfrac{v}{2}$なので、$\dfrac{v}{2}t$となる。

よって、

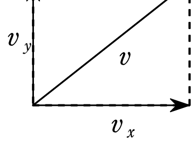
$$K=mas=m\frac{v}{t}\frac{v}{2}t=\frac{1}{2}mv^2$$

となる。

運動エネルギーは$\dfrac{1}{2}mv^2$で表される。

(2) 平面運動と運動エネルギー

図より、三平方の定理が成立。



よって、$v_x{}^2+v_y{}^2=v^2$

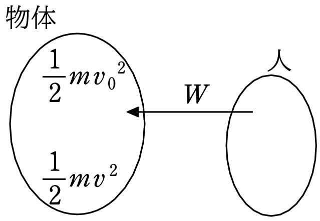
両辺に$\dfrac{1}{2}m$をかけると、

$$\frac{1}{2}mv_x{}^2+\frac{1}{2}mv_y{}^2=\frac{1}{2}mv^2$$

これは、運動エネルギーは水平方向の運動エネルギーと鉛直方向の運動エネルギーの和であることを意味している。

(3)　運動エネルギーと仕事との関係

質量mの物体が速度v_0で動いている時、この物体に仕事Wをした時、この物体の持つ運動エネルギーはいくらになるのであろうか。



最初の運動エネルギーは$\frac{1}{2}mv_0^2$であったが、

仕事Wにより、エネルギーWを受け取りその分だけ運動エネルギーが増加したと考えることができる。

よって、

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv_0^2+W$$

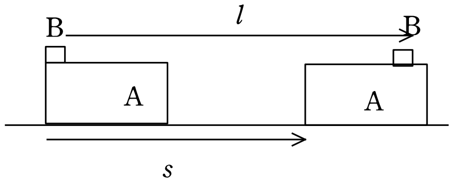
となる。

「物体が動いていようと静止していようと仕事した分だけエネルギーが移動する」

といってよい。

(4)　仕事と運動エネルギーと発熱

静止していた物体A（質量M）上で物体B（質量m）に初速v_0を与えると、物体Bに対して摩擦力がした仕事は摩擦力をFとする。この時、仕事と運動エネルギー、発熱量との関係を調べてみよう。

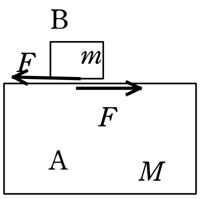


A,Bの加速度をそれぞれa、bとし、力が物体A、Bに関して運動方程式を立てると、

A:　$F=Ma$

B:　$-F=mb$

となる。



これを解くと、$a=\frac{F}{M}$、$b=-\frac{F}{m}$

物体A,Bのt秒後の速度は$v=v_0+at$より、

$$v_A=0+\frac{F}{M}t、\ v_B=v_0-\frac{F}{m}t$$

t秒間の移動距離は$s=v_0t+\frac{1}{2}at^2$より

$$x_A=s=0\cdot t+\frac{1}{2}\frac{F}{M}t^2=\frac{1}{2}\frac{F}{M}t^2、\quad x_B=l=v_0t-\frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2$$

物体Bの運動エネルギーの差より、Bが失った運動エネルギーは

$$W_B=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{1}{2}mv_B^2=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{1}{2}m\left(v_0-\frac{F}{m}t\right)^2=Fv_0t-\frac{1}{2}\frac{F^2}{m}t^2$$

また、物体Bが仕事によって失われたエネルギーは

$$Fl=Fx_B=F\left(v_0t-\frac{1}{2}\frac{F}{m}t\right)=W_B$$

となり両者は等しい。つまり、物体Bは仕事によって運動エネルギーが失われたことに

なる。

物体Aが得た運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}M{v_A}^2=\frac{1}{2}\frac{F^2}{M}t^2$$

物体Aがされた仕事は

$$Fs=F\cdot\frac{1}{2}\frac{F}{M}t^2$$

となり、この両者も等しい、よって、Fsは物体Aの運動エネルギーになっている。

物体Bが失った運動エネルギーと物体Aが得た運動エネルギーは等しくない。その差を求めると、

$Fl-Fs=F(l-s)$となる。

これが発熱によって失われたエネルギーである。

「実際に摩擦で滑った距離と摩擦力の積が発熱量となる」

これをエネルギーの流れ図で書くと

Bは，左向きにFの摩擦力を受けて右にl動いているので，F（A）がBにした仕事は$-Fl$。これを流れ図で表すと右図１のようになり，BからAにFlのエネルギーが移動していることになる。

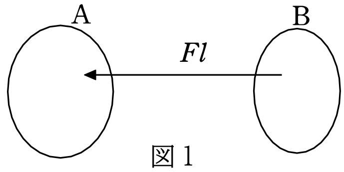


図１

また，Aは，右向きにFの摩擦力を受けて右にs動いているのでF（B)がAにした仕事はFsである。これを流れ図にすると右図２のようになる。実際に摩擦で滑った距離をxとすると，

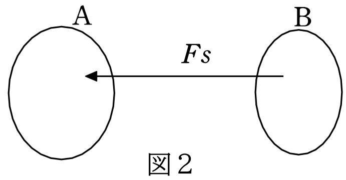


図２

$l=s+x$

なので，この図をわかりやすく編集すると，右図３のようになる。

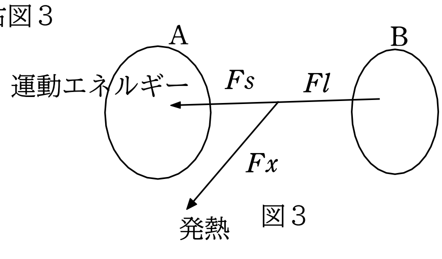


図３

Bが失った運動エネルギーはFlで，そのうちFsがAの運動エネルギーになり，Fxが発熱で失われているのである。

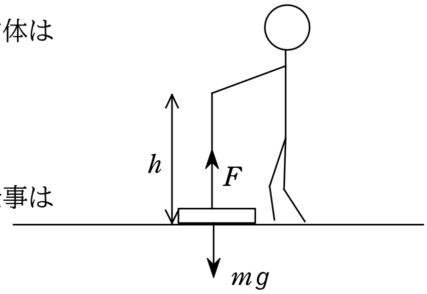
これをよく理解しておくと，作用反作用の法則と仕事の関係がよくわかるようになる。

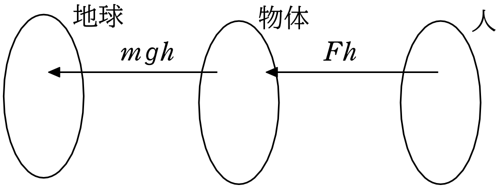
７． 重力による位置エネルギー

⑴ 重力による位置エネルギー

地上から高さhにある物体は重力の影響を受けて動き始める。これより、高い位置にある物体はエネルギーを持っているといえる。

この場合，どれだけのエネルギーを持っているのであろうか。今、力Fで物体をhの高さまで持ち上げる場合を考える。このとき、人のした仕事はFhである。重力も仕事をしている。重力は地球が出す力であるから、重力のした仕事すなわち地球がした仕事は$-mgh$となる。この関係を図に表わすと、





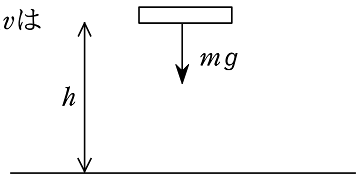
最終的に地球にエネルギーがmgh移ったことになるが、このエネルギーは一体なんであろうか。

図のようにh持ち上げた後、物体の手を離すと、重力の影響を受けて加速する。h落下した後の速度vは

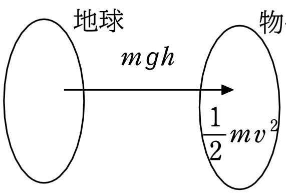
$v^2-v_0{}^2=2as$より、$v^2=2gh$

となる。両辺に$\dfrac{1}{2}m$をかけると、

$\dfrac{1}{2}mv^2=mgh$となり、



地球（重力）のした仕事mghは物体の運動エネルギーになっていることが分かる。
この関係を図に表わすと、



地球から物体にmghのエネルギーが移動していることがわかる。このmghのエネルギーは物体が持っているのではなく地球が持っていることになる。この地球が持っていたエネルギーとは、地球のどこにあるエネルギーであろうか？

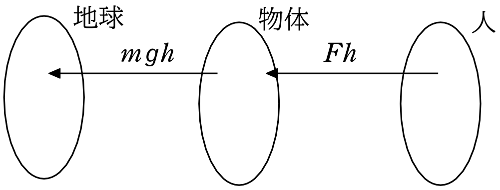
物体が床の上にあるときはエネルギーがなくて高いところに持ち上げたときにはエネルギーが存在する。この2箇所の違いは前者は物体の下に空間がなく、後者は物体の下に空間がある（地球とは固体球及びその周辺の空間を言う）。このエネルギーはこの空間にた

まっているエネルギーといえる。このように空間にたまるエネルギーを位置エネルギーと呼んでいる。物体にたまるエネルギーが運動エネルギーで、空間にたまるエネルギーを位置エネルギーという。世の中には空間と物体以外にはないからすべてのエネルギーは運動エネルギーか位置エネルギーかどちらかであることになり，この場合の重力による位置エネルギーはmghであるといえる。

位置エネルギーとは位置を動かした時に生じた空間にたまっているエネルギーといえる。

⑵　位置エネルギーの定義

もう一度物体を持ち上げる仕事の場合を考えてみる。図に表わせば下の図である。



この場合、地球がした仕事は負である。負の数で定義するといろいろと複雑な面が出てくるので、定義はあくまでも正の仕事にしたい。そこで、人のした仕事にすれば正の仕事になるのである。人のした仕事と、地球にたまったエネルギーを等しくするには、$F=mg$でなければならない。そのようにすると、人がした仕事と地球に移動したエネルギーは等しくなる。人が出した力は重力以外の力すなわち「外力」である。また、地表（基準の位置）から目的地まで運ぶのである。

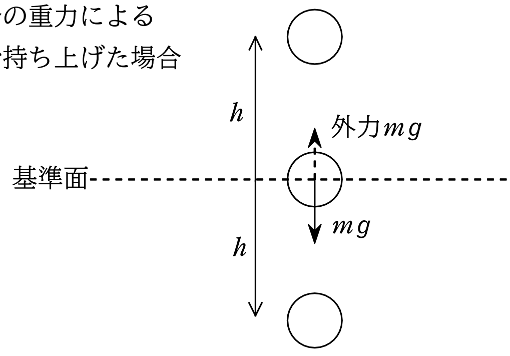
まとめると、重力による位置エネルギーの定義は次のようになる。

「（重力と）等しい大きさで逆向きの力が基準の位置からゆっくりと運ぶ仕事」

クーロン力、ばねの弾性力による位置エネルギーは上の（重力と）というところを書き換えればよい。

⑶　位置エネルギーの符号

この定義に沿って、位置エネルギーの符号を考えてみよう。



質量mの物体が基準面よりh上にある場合の重力による位置エネルギーは、基準面から外力mgで持ち上げた場合を考えればよい。位置エネルギーは外力がした仕事であるから、力の方向と動かす方向が同じである。

外力mgがした仕事は

$U=+mgh$

となる。

この物体が基準面よりh下にあるときの位置エネルギーは、外力mgを上向きに加えて下に下ろす外力mgの仕事である。外力の向きと動かす方向が逆向きなので、外力mgのする仕事は

$U=-mgh$

となる。エネルギーは基本的に0が不明なので，基準面は問題で指定されていなければ、各自で勝手に決めてよい。上の方を基準とするとそれより下が負になるので、最下点を基準とすると、負の位置エネルギーはなくなる。

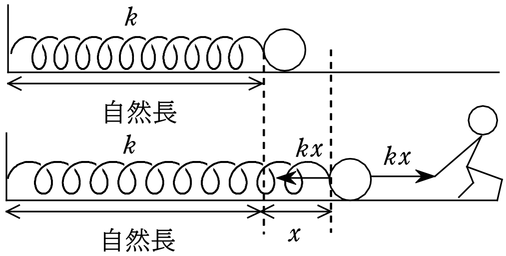
⑷　エネルギーがマイナスになる意味

エネルギーが負になることに対してイメージがわきにくいが、これは、エネルギー0の状態がわからないから生じるのである。運動エネルギーがなくても内部エネルギーが存在し、何もないと思われるところからエネルギーが生じることがあるので、エネルギー0が不明である。この場合、任意の状態を0とするので、その状態よりエネルギーが低い状態を負のエネルギー状態とするのである。

たとえば、A君の所持金が15000円、B君の所持金が8000円だったとする。所持金が負であるということは考えられないが10000円を0（基準）と決めると、A君は5000円、B君は−2000円持っていることになる。このように0の位置を高く決めると負のエネルギーが出てくるのである。負のエネルギーといってもエネルギーを持っているので負のエネルギー状態のものからエネルギーを取り出すことは可能である。

８．ばねによる位置エネルギー

⑴　ばねの弾性力による位置エネルギーとは

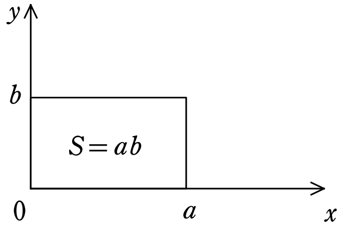


ばね定数kのばねにおもりを取り付けばねをx伸ばしたところ、ばねを引く力はkxであった。このときのばねの弾性力による位置エネルギーを求めてみよう。

ばねの弾性力は左向きにkxであるから、外力は右向きにkxである。この右向きの力のした仕事がばねの弾性力による位置エネルギーとなる。

⑵　力が変化するときの注意事項

単純に考えると、外力がした仕事は$F=kx$、$s=x$を$W=Fs$に代入して$W=kx^2$としたいところであるが、これは間違いである。一般に積の公式$S=a\times b$というものは、グラフ上において長方形の面積を求めることである。



このグラフにおいて$y=b$というようにyの値が$0<x<a$の範囲にあるすべてのxに対して一定でなければ長方形の面積の公式は使えない。

このように積の公式は片方（x）が変化する間にもう一方（y）が変化しないことを確認の上で使わなければならない。

例として$x=vt$という公式であるが、物体が動くt秒の間に物体の速さが一定であれば$x=vt$で移動した距離を求めることができるが、もし、t秒の間に物体の速さが変化すれば$x=vt$で移動した距離を求めることはできない。

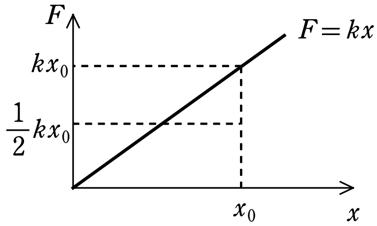
ばねによる仕事の場合$F=kx$とxが変化する（ばねが伸びる）間に力Fは変化していることになる。それゆえ、$W=Fs$の公式をそのままでは使うことができない。

「変化する量に対して積の公式は使えない。」

このことは肝に銘じておかなければならない事項である。・

このような場合，どうやって仕事を計算すればよいのだろうか？その方法は3通りある。次にその3つの方法を考えてみよう。

⑶　平均値を使う方法



先ほどの$x=vt$の例であるが、vが変化してもvの替わりに平均の速さ$\overline{v}$を使えば、正しく移動距離xを求めることができる。

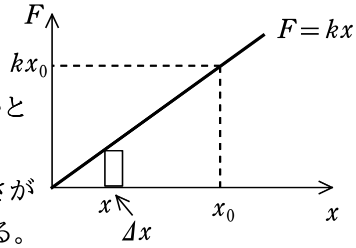
すなわち、$x=\overline{v}\,t$である。

これと同じようにばねを0からx_0まで伸ばす間の力の平均値を使えば$W=Fs$を、$W=\overline{F}s$の公式として使うことができる。

一様の変化（直線関係）をしている場合の平均値の求め方は、最初と最後を足して2で割るという方法が使える。この場合の力の平均値は$\dfrac{0+kx_0}{2}$より、平均値は$\overline{F}=\dfrac{1}{2}kx_0$であるから、$W=\overline{F}s=\dfrac{1}{2}kx_0{}^2$となる。

よって、ばねの弾性力による位置エネルギーは$\dfrac{1}{2}kx_0{}^2$となる。

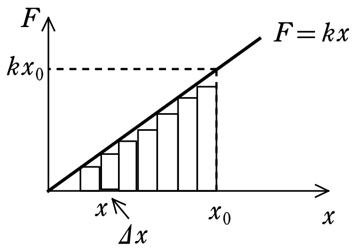
⑷　分割して求める方法



ばねを伸ばすときにある長さからほんのわずかだけ伸ばす場合はその力の変化はほとんど無視される。

ばねの伸びxの位置からΔxだけ伸ばす場合Δxが大きいと伸ばす間にばねの力の大きさが変化して$W=Fs$の公式が使えないがΔxが小さいと動かす間に力の大きさが変化しないと考えてよいので、$W=Fs$の公式が使える。

しかし、この場合もごくわずかながら力の大きさが変化しているので、ごくわずかなずれはある。そこで、Δxを限りなく0に近づけるようにすると、このずれは限りなく0に近くなり、真実の仕事量に限りなく近づいていく。この方法で仕事量を求めることができる。



この場合はグラフの下の長方形の面積がそのわずかに動かす間の仕事になる。

これを自然長の位置からx_0の位置まで小刻みに行なうとよい。その結果長方形の面積の総和はΔxを限りなく0に近づけるとグラフ下の三角形の面積に近づく。

結論として、

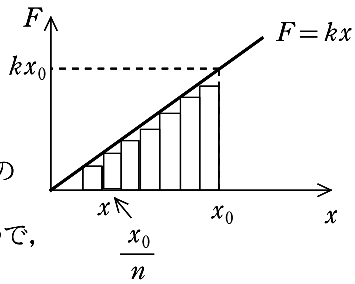
「値が変化する場合の積の公式はグラフ下の図形の面積を求めれば良い」

ことになる。

よって、この場合は$W=\frac{1}{2}kx_0{}^2$

この考え方は数学における区分求積法である。

次に区分求積法で求めてみよう。



ばねの伸びが0からx_0までの区間をn等分する。一区間の長さは$\frac{x_0}{n}$となる。i番目の区間のばねの伸びは$\frac{ix_0}{n}$なので，ばねの弾性力の大きさは一定であるとして，$k\frac{ix_0}{n}$とする。この区間で外力がした仕事は

$$k\frac{ix_0}{n}\cdot\frac{x_0}{n}=\frac{kx_0{}^2 i}{n^2}$$

ばねの伸びが0からx_0までの仕事の合計は，$\sum_{i=1}^{n}\frac{kx_0{}^2}{n^2}i=\frac{kx_0{}^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i=\frac{kx_0{}^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}$

ここで，nの数を増やせば増やすほど真実に近くなるので$n\to\infty$とする。

よって，

$$W=\lim_{n\to\infty}\frac{kx_0{}^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}=kx_0{}^2\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}kx_0{}^2$$

(5)　数学を用いて

上の考え方を数学の積分を用いて求めてみる。

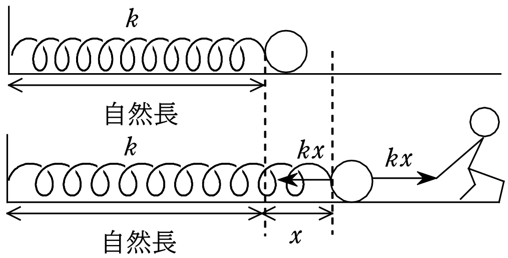
Δxを限りなく0に近づけた状態を記号でdxと書くことにすると、物体をxの位置から$x+dx$の位置まで運ぶ仕事は$kxdx$となる。この微小な仕事量を$0<x<x_0$まですべて加えると良い。これは次のように書ける。

$$W=\int_0^{x_0}kxdx$$

積分すると、$W=\frac{1}{2}kx_0{}^2$となる。

「値が変化する場合の積の公式を使うときは、①平均値を使う、②面積を求める、③積分する、のいずれかの方法を用いると良い。」

(6)　ばねに仕事をするときのエネルギーの流れ



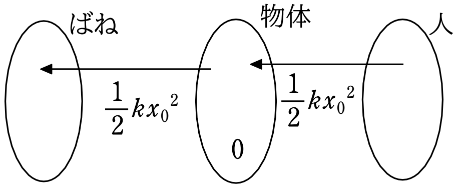
次に、人がばねをx_0伸ばしたときのエネルギーの流れを調べてみよう。

人がした仕事は$\frac{1}{2}kx_0{}^2$であるから、

人から物体に$\frac{1}{2}kx_0{}^2$のエネルギーが移動していることになる。

ところが、この物体は伸ばした後、静止しているので、物体の運動エネルギーは以前と変わらない。そのため、物体に移ったエネルギーはすべてばねに移動したことになる。図に

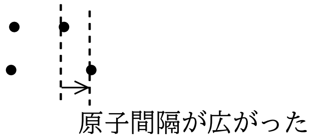
表わせば下のようになる。



よって、人のした仕事はすべてばねにたまっていることになるのである。

(7)　ばねにたまった位置エネルギーはばねのどこにたまっているか

　ばねが伸びた場合、ばねを構成する原子と原子の間隔が広がったことになり、ばねの位置エネルギーはこの広がった空間にたまっていることになる。

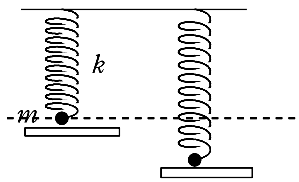


原子はいずれも静止したままであるから、原子の運動エネルギーにはなっていない。空間にたまっているエネルギーであるからこのエネルギーは位置エネルギーである。

９．力の大きさが変化する場合の仕事＜例題＞

＜例題１＞

　ばね定数kのばねに質量mのおもりを取り付け、自然長の位置から板で支えてゆっくりと降ろすとやがて、おもりが板から離れて静止した。このとき、板がした仕事を求めよ。



＜解答1＞

　おもりが板から離れる位置を計算する。つり合いの位置で離れるので、x降ろしたところで離れたとすると、この位置でばねの弾性力と重力が釣り合っている。

よって、　$kx=mg$　　$x=\frac{mg}{k}$

　自然長の位置での板の垂直抗力はmgで、つり合いの位置での垂直抗力は0である。

平均の力は$\frac{mg+0}{2}=\frac{1}{2}mg$　　動かしたした距離は$x=\frac{mg}{k}$　動く方向と力の方向は逆なのでこの仕事は負である。

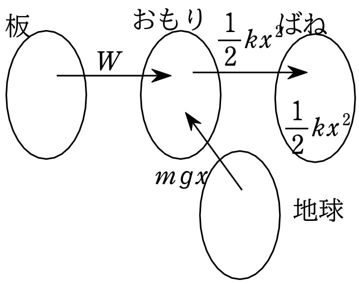
　よって、　$W=-\frac{1}{2}mg\cdot\frac{mg}{k}=-\frac{m^2g^2}{2k}$

＜解答２＞

　エネルギーの流れ図で解くこともできる。

　おもりにはたらく力は3つある。重力、ばねによる弾性力、板の垂直抗力である。力を出しているものはそれぞれ、地球、ばね、板である。

　地球（重力）がした仕事はmgxなので、地球からおもりの方にmgxのエネルギーが移動。



　ばねには位置エネルギー$\frac{1}{2}kx^2$がたまっているので、ばねに$\frac{1}{2}kx^2$のエネルギーが流れ

ている。おもりからばねに$\frac{1}{2}kx^2$のエネルギーが移動。おもりの運動エネルギーは最初も最後も0なので、上の図より　　$W+mgx=\frac{1}{2}kx^2$

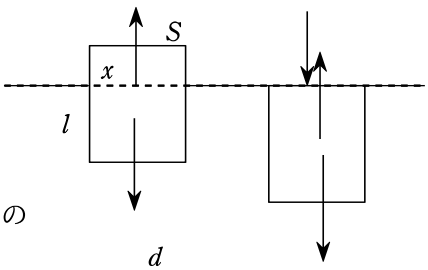
$$W=-mgx+\frac{1}{2}kx^2=-\frac{m^2g^2}{2k}$$

となる。

＜例題２＞

断面積S、高さlの角柱が密度dの水に浮いている。水面より高さxだけ出ているとする。

この角柱に下向きに力を加えて水面が隠れるまで沈めた。この時、この加えた力のした仕事を求めよ。



＜解答＞

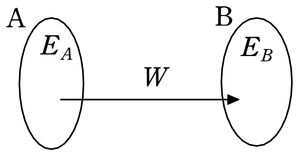
静かに浮いている状態の浮力は$dS(l-x)g$。これは同時にこの物体にはたらいている重力でもある。最初に加える力は角柱が釣り合っているので0。最後の状態の浮力は$dSlg$なので、最後の状態の時加えている力は$dSlg-dS(l-x)g=dSxg$となる。

この力は一様な変化をするので、平均の力は$\frac{1}{2}dSxg$となる。

よって、仕事は　$\frac{1}{2}dSgx^2$

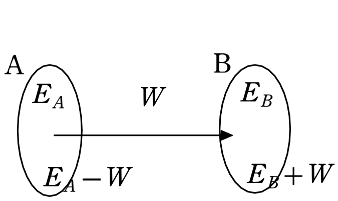
10．エネルギー保存則

物体AとBを考える。最初に物体AがE_Aのエネルギーを物体BがE_Bのエネルギーを持っていたとする。この場合両方のエネルギーの総和はE_A+E_Bである。



次に物体Aが物体Bに対し何らかの力を加えて仕事Wをしたとすると、エネルギーが物体Aから物体BにWだけ移動する。仕事をした後、Aの持つエネルギーは$E_A'=E_A-W$となり、Bの持つエネルギーは$E_B'=E_B+W$となる。

仕事をした後の両物体のエネルギーの総和は$E_A'+E_B'=E_A-W+E_B+W=E_A+E_B$となり、仕事をする前のエネルギーの総和と等しい。



よって次のことがいえる。

「状態が変化する前後の全体のエネルギーの総和は一定である。」

これを**エネルギー保存則**という。

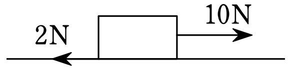
仕事とエネルギー

特に運動エネルギーと位置エネルギーに限って考えた場合を**力学的エネルギー**という。Aは$+W$の仕事をしエネルギーはW減少している。Bは$-W$の仕事をし、エネルギーはW増加している。これより、仕事の符号とエネルギーの増減は逆であることがわかる。

「仕事とエネルギーの増減は逆符号である。」

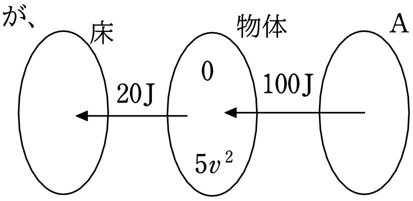
＜例題＞

粗い水平面上に10kgの物体を静止させていた。A君が10Nの力を加えて10m運んだ時、摩擦力が2Nはたらいていた。10m運んだ後のこの物体の速度を求めよ



＜解答１＞　仕事による計算

エネルギーの流れ図は下の図のようになる。



物体の持つ運動エネルギーは最初は0であったが、最後にvになったとすると、

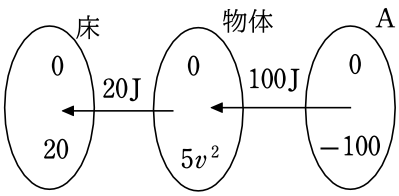
$$K=\frac{1}{2}mv^2=5v^2$$

となる。物体は100JのエネルギーをA君からもらい、20Jのエネルギーを床に渡した結果、運動エネルギーが0から$5v^2$に増加したことになる。よって、　$100-20=5v^2$

という方程式が成立し、$v=4\mathrm{m/s}$となる。

＜解答２＞　エネルギー保存則による計算

上の図においてAと床のエネルギーを追加すると右図のようになる。



この時、エネルギーは0が分からないので最初のエネルギーは適当な数値を使ってよい。よって、床の最初のエネルギーを0、Aのエネルギーを0Jとした。

仕事をした後のエネルギーは、Aが100J減って-100J、床が20J増えて20Jとなる。エネルギー保存則より、仕事する前のエネルギーの合計と仕事をした後のエネルギーの合計は等しくなる。よって、

床＋物体＋A$=0+0+0=20+5v^2-100$

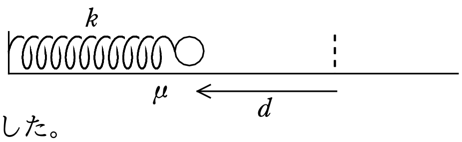
これがエネルギー保存則である。これを解くと　$v=4\mathrm{m/s}$となる。

床のした仕事は-20Jで仕事した後の床のエネルギーは$+20$J、Aのした仕事は100JでAの仕事した後のエネルギーは-100Jである。仕事とエネルギーの増減の符号が逆であることに注意。

11．エネルギー保存則例題

＜例題１＞

　ばね定数kのばねに質量mのおもりを取り付け、動摩擦係数μの水平面におき、片方を固定し自然長からd押し縮めて手を離した。自然長の位置に戻ったときのこのおもりの速さはいくらか。



＜解答＞

　エネルギーは4種類である。運動エネルギー$\frac{1}{2}mv^2$、重力による位置エネルギーmghばねによる位置エネルギー$\frac{1}{2}kx^2$、摩擦による発熱Fxである。この問題の場合、$\frac{1}{2}mv^2$、$\frac{1}{2}kx^2$、Fxが対象となる。鉛直方向の動きがないのでmghは考慮しなくてよい。

　表にまとめると以下のようになる。

	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}kx^2$	Fx	合計
最初	0	$\frac{1}{2}kd^2$	0	$\frac{1}{2}kd^2$
最後	$\frac{1}{2}mv^2$	0	μmgd	$\frac{1}{2}mv^2+\mu mgd$

　最初

　運動エネルギーは静止しているので0、ばねによる位置エネルギーはd縮んでいるので$\frac{1}{2}kd^2$、摩擦による発熱はまだ動いていないので0である。

　最後

　運動エネルギーは$\frac{1}{2}mv^2$、ばねによる位置エネルギーは自然長なので0、摩擦による発熱は摩擦による仕事$-\mu mgd$の逆符号でμmgdである。

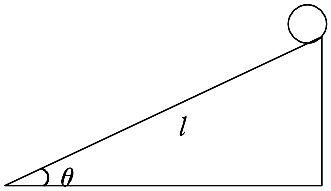
　最初のエネルギー合計と最後のエネルギー合計は等しいので、

$\frac{1}{2}kd^2=\frac{1}{2}mv^2+\mu mgd$　　　これを解けばよい。

$$v=\sqrt{\frac{kd^2-2\mu mgd}{m}}$$

＜例題２＞

動摩擦係数μ、角度θ、斜面長lの斜面の上端に質量mの物体を静かに置いた。この物体が下端に達した時の速さを求めよ。



＜解答＞

この場合関係しているエネルギーは

運動エネルギー$\frac{1}{2}mv^2$、重力による位置エネルギーmgh、摩擦による発熱Fxである。

表にまとめると

	$\frac{1}{2}mv^2$	mgh	Fx	合計
最初	0	0	0	0
最後	$\frac{1}{2}mv^2$	$-mgl\sin\theta$	$\mu mgl\cos\theta$	$\frac{1}{2}mv^2-mgl\sin\theta+\mu mgl\cos\theta$

最初

運動エネルギーは静止しているので0、重力による位置エネルギーは最初の位置を基準にして0、最下点を基準にすると$mgl\sin\theta$となる。基準は指定がない限りどこにしてもよいが、上にすると位置エネルギーが負になるので注意を要する。摩擦による発熱はまだ動いていないので0

最後

運動エネルギーは$\frac{1}{2}mv^2$、重力による位置エネルギーは$-mgl\sin\theta$、摩擦による発熱は摩擦による仕事の逆符号で$\mu mgl\cos\theta$となる。

表よりエネルギー保存則は

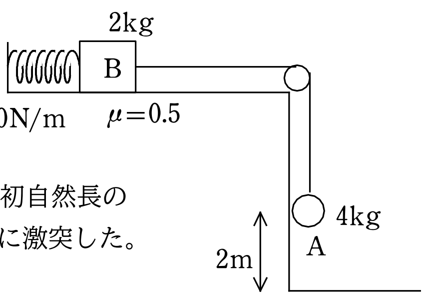
$$\frac{1}{2}mv^2-mgl\sin\theta+\mu mgl\cos\theta=0$$

これを解けばよい。

$$v=\sqrt{2gl\sin\theta-2\mu gl\cos\theta}$$

＜例題３＞　複数物体のエネルギー保存則

動摩擦係数0.5の台上に質量2kgの物体Bをおき，ばね定数10N/mのばねを取り付け他端を固定する。この物体Bに軽いひもを取り付け滑車を通して質量4kgの物体Aを下面から2mの高さにつるし，手で静止させた。ばねは最初自然長の長さであり,静かに手を離すと，物体Aは加速し,下面に激突した。物体Aが下面に激突する瞬間の速さを求めよ。



＜解答＞

エネルギーの種類は通常次の4種類である。

運動エネルギー$\frac{1}{2}mv^2$、重力による位置エネルギーmgh，ばねによる位置エネルギー$\frac{1}{2}kx^2$、摩擦による発熱Fxである。

物体Aに関係するエネルギーは，$\frac{1}{2}mv^2$，mgh

物体Bに関係するエネルギーは，$\frac{1}{2}mv^2$，$\frac{1}{2}kx^2$，Fx

である。

最初の状態…

物体A，B共に静止しているので，A,B共に運動エネルギーは0。物体Aの重力による位置エネルギーは$mgh=4\times10\times2=80$J。ばねは自然長なので位置エネルギー0J。摩擦による発熱はまだ動いていないので0Jである。

最後の状態…

物体Aの運動エネルギー$=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\times4v^2=2v^2$。物体Bの運動エネルギーは同様にして$v^2$。最下点に達したので重力による位置エネルギーは0J。ばねは自然長より2m伸びているので，$\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}\times10\times2^2=20$J。摩擦力による仕事は，$-\mu mgx=-0.5\times2\times10\times2=-20$J。摩擦による発熱量は仕事の逆符号なので,20J。

これを表にまとめると，

	A	A	B	B	B	
	$\frac{1}{2}mv^2$	mgh	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}kx^2$	Fx	合計
最初	0	80	0	0	0	80
最後	$2v^2$	0	v^2	20	20	$3v^2+40$

エネルギーの合計は等しいので，

$$3v^2+40=80$$

これを解けばよい。

$$v=\frac{2}{3}\sqrt{30}=3.7\text{m/s}$$