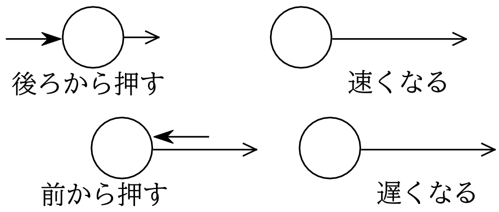
力の原理について

１． 力とは何か

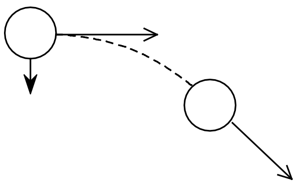
1. 物体の前後から力を加えると？

静止している物体に力を加えると動き出す。また、動いている物体に後ろから力を加えると速くなり、前方から力を加えると、遅くなる。そして、静止させることができる。



2. 動いている物体の横から力を加えると？

動いている物体に横から力を加えると、その物体の動く方向が変わる。



まとめると次のようになる。

① 後ろから力を加えると速くなる。

② 前から力を加えると遅くなる。

③ 横から力を加えると動く方向が変わる。

速度とは速さと方向を兼ね備えたベクトルであるから、①、②、③いずれも速度が変化したことになる。このことから**「力とは速度を変化させるものである」**といえる。

速度と同一方向に力を加えた場合は①、②に該当しこの場合は方向は変わらずに速さのみが変わる。速度と直角方向に力を加えた場合、物体の速さが変わらずに、動く方向のみが変わる。このことから、**「力を加えた方向に速度変化する」**といえる。

２． 力は作用線上を動かすことができる。

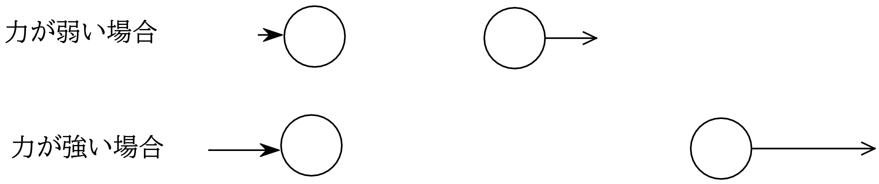
力は目に見えないものである。目に見えないものを正しく判断するのは難しい。そのために、速度変化でその物体に働いている力を判断するようにするとよい。速度が変化した方向に力が働いているのである。また、大きな速度変化が起これば大きな力が、少ない速度変化であれば小さな力が作用していることになる。よって、次のことが言える。

「物体に力を加えたとき、その物体の速度変化が同じであれば同じ力がはたらき、速度変化が異なれば別の力がはたらいたといえる。」

これを原則として力の性質を考えてみよう。

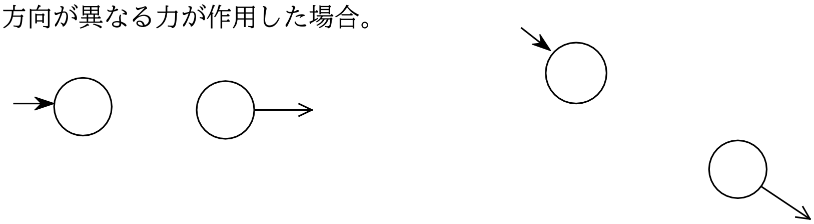
力の原理について

⑴　物体に強い力が作用した場合と弱い力が作用した場合



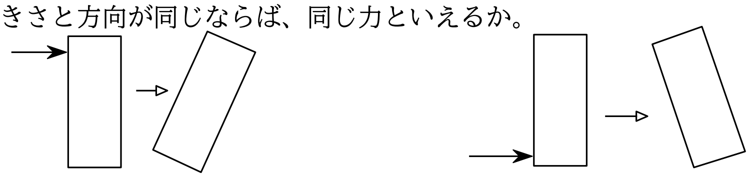
　力が強い場合と弱い場合では静止している物体に力を加えた場合の速度変化が異なる。強い力を加えたほうが大きな速度を持つ。このことから力の大きさが違えば、それは別の力と考えることができる。

⑵　方向が異なる力が作用した場合。



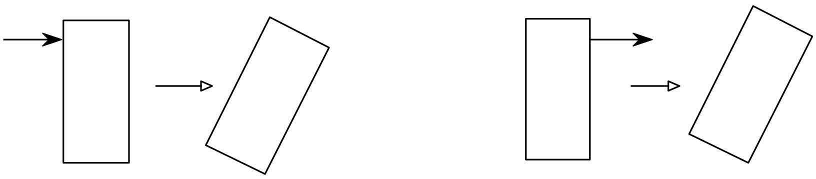
　異なる方向から力を加えた場合は上の図のように動く方向が違う。そのために、方向が違う力は別の力であるといえる。

⑶　大きさと方向が同じならば、同じ力といえるか。

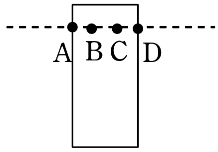


　図のように物体の上端と下端に力を加えた場合、物体の傾き方が異なる。これも速度変化が違うということになる。よって、大きさと方向が同じであっても別の力であるといえる。

⑷　同一直線上を押す場合と引く場合では速度変化は同じか



　図のようにこの場合は同じ倒れ方をする。よって同じ力であるといえる。また、同一直線上のどの点に同じ方向同じ大きさの力を加えても物体の倒れ方は同じである。よって、これらは同じ力であるといえる。同一直線上の力はすべて同じ力であるということは同一直線上を任意に動かしてもよいことになる。この直線を**作用線**という。



注…この場合物体の変形の仕方が異なるので、物体の変形までを考える場合は別の力ということになるが、物体の変形を伴う場合は高等学校では扱わない。

まとめると次のようになる。

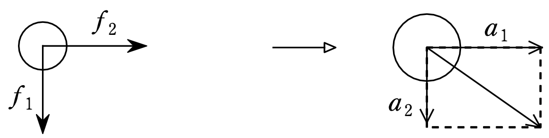
「力は同一作用線上を自由に動かしてよい。」

３． 力の合成･分解について

⑴ 物体に同時に複数の力を加えた場合

　力とは速度を変化させるものであり、物体は力を加えた方向に速度変化が起こる。物体に複数の力を加えても物体の動く方向はひとつである。その場合その方向に同じ速度変化をするひとつの力を加えることができる。複数の力を同じ速度変化をさせるひとつの力を求めることを**力の合成**といい、この力を**合力**という。また、逆にひとつの力を複数の力に分けることもできる。これを**力の分解**という。力を合成あるいは分解しても物体の速度変化は同じであるから、合成あるいは分解した力は元と同じ力であるといえる。よって、**「力の合成･ 分解は自由に行なってよい」**といえる。

⑵ 物体に同時に力を加えた場合。

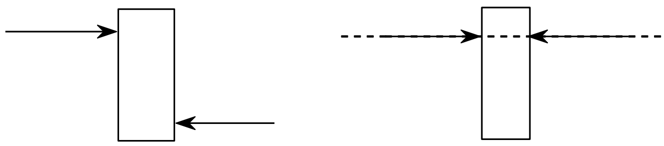


　上図のように水平方向にf_1、鉛直方向にf_2の力を加えたときに、水平方向にa_1、鉛直方向にa_2の速度変化をしたとすると、実際の物体の動きはそのベクトル合成の方向で大きさは$\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$になっている。速度変化（加速度）はベクトル合成可能であるから、力もベクトル合成で表わすことが可能である。

４． 物体が動かないとき

　空中にある物体は支えがないと下に向けて加速（速度変化）する。これは、空中にある物体に力が働いていることを意味している。この力を**重力**という。しかし、水平面上に置いた物体は動かない（速度変化しない）。明らかに重力は作用しているのに動かないのである。この場合重力を打ち消す逆向きの力が，はたらいていると考える。

　一般に物体に力を加えても逆方向から同じ大きさの力を加えると、その物体は動かない。この状態を**力がつりあっている**という。



逆向きに同じ大きさの力を加えても、左上のように作用線が違えば物体は回転を始める。つまり、速度変化するのである。作用線が同じであれば物体の速度変化はない。これは力が作用していないのと同じである。力は物体の速度変化のみに注目して考えるために、互いに相手の力を打ち消したと考えてよい。そのため、

「同一物体に同一作用線上逆向きに同じ大きさの力が作用した場合、互いに相手の力を打ち消す。そのため、同一作用線上逆向き同じ大きさの力は勝手に付け加えて

もよいし取り去ってもよい。」
といえる。

５．力についての基本事項

以上のことにより力に関しては以下のことが言える。

① **「力は同一作用線上を自由に動かしてよい。」**

② **「力の合成・分解は自由に行なってよい」**

③ **「同一物体に同一作用線上逆向きに同じ大きさの力が作用した場合、互いに相手の力を打ち消す。そのため、同一作用線上逆向き同じ大きさの力は勝手に付け加えてもよいし取り去ってもよい。」**

ここにあげた3つの力に関する操作は，実行してもしなくても物体の運動状態に全く変化を及ぼさない。そのため，力に関してはいつでも上記3つの操作を自在に行うことができる。

それに対し，これ以外の操作をすると，物体の運動状態に変化を及ぼすのでやってはならないことになる。

６．力の大きさ

⑴ 力の大きさはどのようにして測定するか。

力の大きさはどのようにして決められているのだろうか。当然ながら，力そのものを見ることはできない。そのために，何らかの見えるもので力の大きさを測定することになるのである。

力とは物体の速度を変化させるものである。速度の変化すなわち加速度は，見ることができる。よって，力の大きさは，物体に生じた加速度でもって測定可能である。

ところが質量が大きな物体と小さな物体では同じ力を加えても加速度の大きさは異なる。そこで，1kgの物体に生じる加速度の大きさで力の大きさを測ることができるのである。

力の大きさの定義

「1kgの物体に1m/s²の加速度を生じさせる力を1Nとする。」

このようにして力の大きさの単位[N：ニュートン]が決められている。

⑵ 運動方程式

1kgの物体に1m/s²の加速度を生じさせる力は1Nである。同じ物体に2倍の加速度を生じさせる力の大きさは2倍である。よって，1kgの物体に2Nの力を加えれば2m/s²の加速度が生じる。同様にして1kgの物体にa[m/s²]の加速度を生じさせる力はa[N]である。

「1kgの物体に生じる加速度の大きさと力の大きさ（N）は等しい」

質量が2倍にあると同じ加速度を生じさせるには2倍の力が必要である。つまり2kgの物体にa[m/s²]の加速度を生じさせる力は$2a$[N]である。質量がm倍（m[kg]）になると、a[m/s²]の加速度を生じさせる力はma[N]となる。

これを表にまとめると下のようになる。

質量[kg]	1	1	1	2	m
加速度[m/s^2]	1	2	a	a	a
力[N]	1	2	a	$2a$	ma

m[kg]の物体にa[m/s²]の加速度を生じさせる力はma[N]で表わされる。すなわち、

$$ma = F$$

が成り立つ。これを運動方程式という。

この式を基にして，力の大きさが計算される。

⑶　重力の大きさ

地球表面において空中に物体を置くと,すべての物体は加速度9.8m/s²で加速される。ここに速度変化が生じているために，地球上にあるすべての物体には，下向きに力がはたらいていることがわかる。この力を重力という。1kgの物体に生じている加速度の大きさが9.8m/s²なので，運動方程式より，重力の大きさは9.8Nとなる。

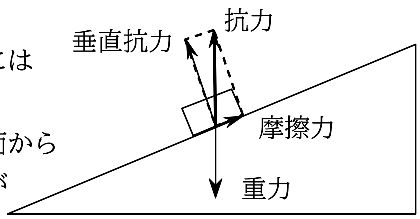
一般的に質量m[kg]の物体に重力加速度の大きさg[m/s²]の加速度を生じさせる力がはたらいていることになる。その大きさWは運動方程式より

$$W = mg$$

これが重力の大きさを求める式である。

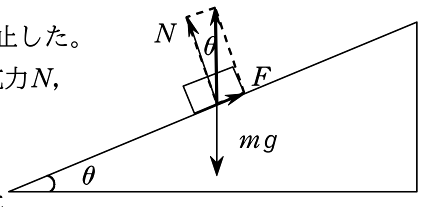
７．力のつりあい

⑴　抗力と垂直抗力･摩擦力



斜面上に物体が静止している場合、この物体には重力が作用している。しかし、この物体は静止したままである。この場合この物体は斜面から重力と同一作用線上に逆向き同じ大きさの力が作用しているためと考える。このように斜面から受ける力を**抗力**という。抗力は面に垂直な方向と面に沿った方向に分解することができる。このとき、面に沿う方向の力を**摩擦力**といい、面に垂直な方向の力を**垂直抗力**という。このため、摩擦力と垂直抗力は、必ずペアで考えることになる。

⑵　大きさの計算＜例題＞



斜面の傾角θの斜面上に質量mの物体を置くと静止した。このとき，この物体にはたらいている重力，垂直抗力N,摩擦力Fの大きさを求めよ。

この物体にはたらく重力の大きさは，運動方程式よりmgである。

重力mgがはたらいていながらこの物体は静止しているので,，重力と逆向きにmgの大きさの力がはたらいている。これが抗力である。抗力の大きさはmgとなる。

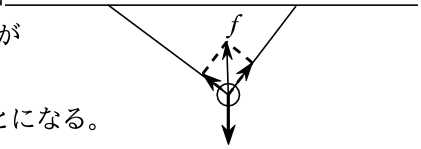
この抗力を斜面と直角方向と斜面方向に分解したのが垂直抗力と摩擦力である。抗力と垂直抗力とのなす角度はθなので,

垂直抗力　$N=mg\cos\theta$　摩擦力　$F=mg\sin\theta$

となる。

(3)　物体に複数の張力が作用した場合

天井から2本のロープで物体をつるした場合

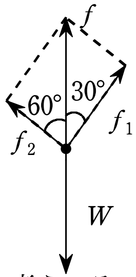


この物体は動かない。この場合明らかに重力が作用しているので、この重力は同一作用線上逆向きに同じ大きさの力fが作用していることになる。

（力は目に見えないためにこのようにして存在を探るとよい。）

この力fはロープに沿った方向に分解することができる。

重力の大きさがWだった場合、力fもWの大きさを持っている。



それを図のように分解すると、$f_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}W$、$f_2=\dfrac{1}{2}W$

というように力の大きさを求められる。

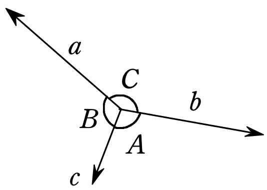
このように力の釣り合いを考える場合は、物体の速度変化がないなら、同一作用線上逆向きに同じ大きさの力が作用していると考えてその力を必要な方向に分解して考えるとよい。

＜例題＞

右図のような3力がつりあっているとき、

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

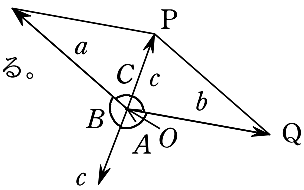
が成立していることを証明せよ。



＜解説＞

3力はつりあっているのであるから

aとbを合成した力はcと逆向きで同じ大きさのはずである。よって、図のようなΔOPQが出来上がる。



$\angle$OPQ$=\pi-B$

$\angle$OQP$=\pi-C$

$\angle$POQ$=\pi-A$

であることを考慮に入れて△OPQに関して正弦定理を用いると、

$$\frac{a}{\sin(\pi-A)}=\frac{b}{\sin(\pi-B)}=\frac{c}{\sin(\pi-C)}$$

となる　$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ の関係を用いると、

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

の関係式が導かれる。（これをラミーの定理という。）

もちろん三角形であるから余弦定理も使用可能である。

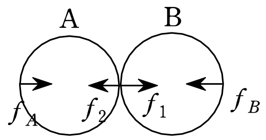
$$a^2=b^2+c^2+2bc\cos A$$

$$b^2=c^2+a^2+2ca\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2+2ab\cos C$$

８． 作用反作用の法則

図のように物体Aと物体Bを接触させて、両端から同一作用線上逆向きに同じ大きさの力f_A，f_Bを加えるとこの物体は動かない。



このとき，物体Aのみについて考えると,Aには右向きに力f_Aがはたらいているのにこの物体は動いていない。このことから，物体Aにはf_Aと同一作用線上逆向きに同じ大きさの力f_2がはたらいていることが分かる。

同様にして物体Bにもf_Bと同一作用線上逆向き同じ大きさの力f_1がはたらいていることになる。

このとき，f_Aとf_2およびf_Bとf_1は力のつりあい関係にある。それに対してf_1とf_2の力の関係が作用反作用の関係である。f_Aとf_2は共に物体Aに作用点を持つ力（Aにはたらく力）で，f_Bとf_1は共に物体Bに作用点を持つ力である。それに対してf_1とf_2は，はたらいている物体がAとBで異なっているのである。

同一作用線上逆向き同じ大きさの力が同一物体にはたらいていれば，力のつり合いで，別物体にはたらいていれば作用反作用の関係にある力ということになる。

作用と反作用の関係にある力は

①　同一作用線上

②　逆向き

③　同じ大きさ

という関係がある。この法則を**作用反作用の法則**という。

力のつりあい関係も同一作用線上逆向き同じ大きさの関係であるが、力のつりあい関係が同一物体に作用しているのに対して、作用･反作用の関係は別物体であることに注意を要する。

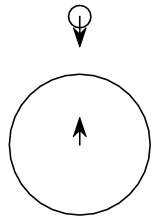
力ははたらいた物体にのみ速度変化を生じる。そのため、力のつりあい関係にある力は両方の力を同時に用いて方程式を立てる必要があるが、作用反作用の関係にある力は、必ず、片方の力のみを用いて方程式を立てることになる。両方同時にひとつの方程式に用いることはありえない。

力f_1は物体Bにはたらいているが物体Aにははたらいていない。これは，力f_1は物体Bの速度を変化させるがAには全く関係のない力である。力f_2も同様である。複数物体に力がはたらいている問題を考えるとき，その物体間で作用反作用を使えば，相手の物体のことは一切考えずに方程式を立てることができる。

複数の物体が絡み合って運動するような複雑な問題は作用反作用を使って，各物体ごとに方程式を立てれば,どのように複雑な問題でも解くことができるようになる。

力の簡単な問題は解けるが複雑になると解けないという人は作用反作用の法則を理解していないと考えてよい。複雑な問題になればなるほど作用反作用の法則は威力を発揮する。簡単な問題で作用反作用を積極的に使う訓練をしよう。

⑵　いろいろな力の作用反作用の関係

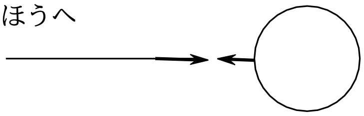


　重力

　重力は地球が物体を引く力であるから、反作用は図のように地球の中心にある。

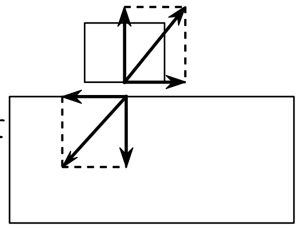
　張力

　糸で物体を引く場合は物体から糸に沿って張力が作用しているが、反作用が糸から物体のほうへ作用している。右図はわざと糸と物体を離して描いている。



　抗力

　物体どうしが接触しているとき、摩擦力と垂直抗力，すなわち抗力が作用している。互いの物体に図のような関係で作用している。この場合も作図の都合上二つの物体をわざと離して描いている。



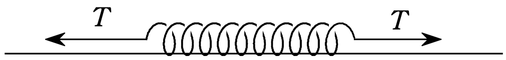
９．ばねについて

⑴　ばねにはたらく力

　手元においてあるばねに片方だけ力を加えても、ばねは伸びずに動くだけである。ばねを伸ばすには両方から引っ張らなければならない。

高等学校物理ではばねに質量はないことになっているため、常に軽いばねを扱う。

　質量を0として扱う場合，運動方程式で，$m=0$とおいて，



　$f=ma=0$

$f=0$となるということは，ばねには力がはたらかないことを意味している。唯一はたらく力は，力がはたらいていないのと同じ同一作用線上同じ大きさの力のみである。

そのため、ばねの両端にかかる力は常に等しくなる。

「ばねの両端には常に大きさの等しい力がはたらいている。」

この場合，ばねにはたらいている力は片方の力で持ってあらわす。上の図の場合，ばねにはたらいている力の大きさはTである。

⑵　ばね定数

　ばねには、硬いばねや軟らかいばねがある。ばねの硬さはどのようにして表わすとよいであろうか。硬いばねは伸ばすのに大きな力が必要であり、軟らかいばねは小さな力でもすぐに伸びる。このことから同じ長さだけばねを伸ばすのに必要な力でばねの硬さを知ることができる。そこで、ばねを1m伸ばすのに必要な力をばね定数と定義する。

　「ばねを1m伸ばすのに必要な力がk[N]のばねの、ばね定数をk[N/m]とする。」

ばねの伸び[m]	1	2	3	x
延ばすのに必要な力[N]	k	$2k$	$3k$	kx

ばねを2倍伸ばそうとするとそのとき必要な力は2倍であり、3倍伸ばそうとすると3倍の力が必要である。つまり、x倍伸ばすにはx倍の力が必要となる。よって、ばね定数k[N/m]のばねをx[m]伸ばすにはkx[N]の力が必要となる。

「ばね定数k[N/m]のばねをx[m]伸ばすのに必要な力Fは$F=kx$で表わされる。」

また，ばねは伸ばすのと同じ力を内向きに加えるとばねは同じだけ縮む。伸ばすのに力が必要だが縮めるのに力がいらないようなばねはない。

「ばねは伸ばすときも縮めるときも同じ大きさの力である。」

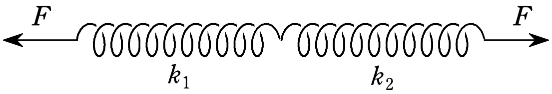
(3)　ばねの弾性範囲

長さが10cmのばねを1m縮めることはできないし，1m伸ばすこともできない。

$F=kx$（フックの法則）が成立するのは，当然ながらある範囲においてのみである。実際に出題される問題で弾性範囲を超えることはないので，この点は気にしなくて良い。

(4)　ばねの合成

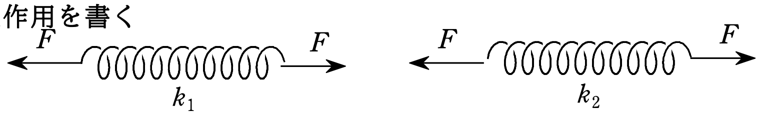
・　直列の場合



ばね定数k_1，k_2の二つのばねを直列につないでひとつのばねにした。この連結ばねのばね定数を計算してみよう。この連結ばねに力Fを加えたときの連結ばねの伸びを計算すればよい。複数物体であるので作用反作用の法則を利用する。以下は作用反作用の法則の活用方法である。

①　物体を離して書く

②　連結部に作用反作用を書く



それぞれのばねは力がつりあっているので，加わっている作用反作用は共に大きさFである。

③　各物体について計算する。

ばね定数k_1のばねの伸びをx_1，ばね定数k_2のばねの伸びをx_2とすると，

$F=k_1x_1$，$F=k_2x_2$が成立する。よって，全体のばねの伸びは

$$x=x_1+x_2=\frac{F}{k_1}+\frac{F}{k_2}$$

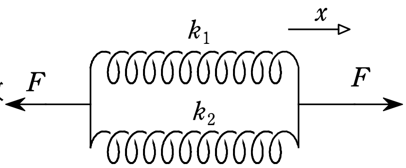
連結ばねの式は　$F=kx$なので，

この式に代入すると　$F=k\left(\frac{F}{k_1}+\frac{F}{k_2}\right)$

よって，　$\frac{1}{k}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$　が成立する。

・ 並列の場合

右図のように，ばね定数k_1，k_2のばねを並列につないだ。この時，１本のばねと考えた時のばね定数（合成ばね定数）を求めてみよう。



ばね定数はx伸ばすのに必要な力（1m伸ばす力）から求めることができる。

ばね定数k_1のばねをx伸ばす力はk_1x，ばね定数k_2のばねをx伸ばす力はk_2xなので，両方のばねをx伸ばす力は

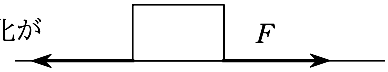
$F=k_1x+k_2x=(k_1+k_2)x=kx$

よって，合成ばね定数は　　　　　$k=k_1+k_2$

10．摩擦力について

(1) 静止摩擦力

粗い水平面上にある物体に力Fを加えたがこの物体は動かなかった。これは、速度変化がないわけであるから、同一作用線上･逆向きに同じ大きさの力が作用しているためである。この力は面と水平方向にはたらく力である。この力を**摩擦力**と呼んでいる。この場合は静止している物体にはたらく摩擦力であるから特に**静止摩擦力**という。



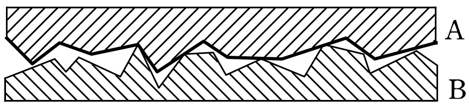
静止摩擦力は常に静止しているのであるから、

「加えた力と逆向きで大きさが等しい力が静止摩擦力である。」

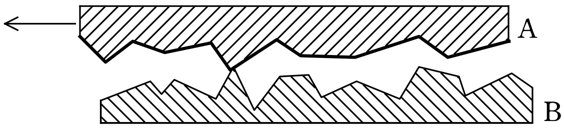
といえる。

(2) 最大摩擦力

上の物体に加える力Fを次第に大きくしていくと、ある力になったときに急に物体は動き始める。これは、ある値を最後に摩擦力が急に小さくなるためである。この動き出す直前の摩擦力が静止摩擦力の最大値である。この摩擦力を**最大摩擦力**と呼んでいる。



物体の表面はなめらかなように見えても拡大してみると凸凹している。互いの凸と凹がかみ合って摩擦力を生じているのである。物体が静止している場合は、互いの凸と凹がじっくりとかみ合うために、力を加えても物体は動かない。しかし、ある力を加えると凸を乗り越えて動き出すようになる。このときの摩擦力が最大摩擦力となる。図のように物体が動き始めるためには、物体がある程度浮き上がらなくてはならないために、



動き始めるのに必要な力は物体Aの重さ（垂直抗力）に比例することになる。

重さ(垂直抗力N)	100	200	300	400
動かすのに必要な力F	50	100	150	200

今重さ（垂直抗力）100Nの物体に50Nの力を加えたときに動き始めたとすると、最大摩

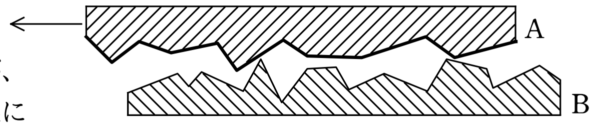
擦力は50Nである。垂直抗力（重さ）を2倍の200Nにすると、最大摩擦力も2倍となり100Nの力となる。つまり、垂直抗力と最大摩擦力は比例している。このとき、上の表の例はいずれも垂直抗力を0.5倍しても、その時の最大摩擦力を求めることができる。0.5は比例定数である。この係数を静止摩擦係数という。静止摩擦係数をμとすると、

$$F = \mu N$$

が成立する。最大摩擦力は静止摩擦力の最大値であるために加えた力と等しい大きさで作用する。

「最大摩擦力は物体が動き始める直前に作用し、力の釣り合いが成立しており、同時に$F = \mu N$も成立している。」

(3)　動摩擦力について



重い物体に力を加えて動かすときに動き始めるまでは大きな力が必要だが、一度動き始めてしまえば、比較的に楽に（小さい力）で動かし続けることができる。物体を動かし続ける力は最大摩擦力よりも少し小さい力となる。物体を動かし続けるには一定の力を加え続けなければならない。この場合も一定の速度で動かしているならば、加えた力と摩擦力は等しい。このように物体が動いているときにはたらいている摩擦力を**動摩擦力**という。

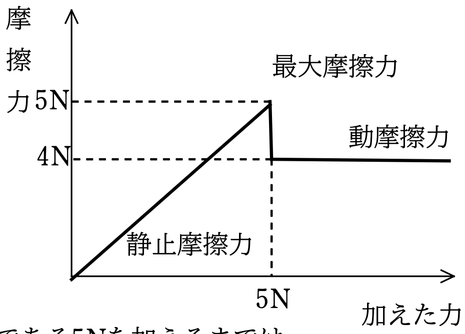
物体が動いているときは、上の図のように少し浮いた状態になっていて、凸と凹が完全にはかみ合っていない。そのために最大摩擦力よりも少し小さくなる。この場合も重い（垂直抗力が大きい）ほど物体が浮きにくいため動摩擦力が大きくなる。すなわち、動摩擦力は垂直抗力に比例する。

重さ(垂直抗力N)	100	200	300	400
動かし続けるのに必要な力F	40	80	120	160

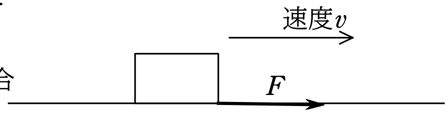
重さ（垂直抗力）が100Nの物体に力を加えたとき、50Nの力で動き始め、40Nの力でゆっくりと動かし続けることができたとする。この場合加えた力と動摩擦力はつりあい関係にあることになる。動摩擦力の大きさは加えた力と等しいので，動摩擦力が40Nとなる。重さ（垂直抗力）が2倍になると、動かす力（動摩擦力）も2倍になるため、200Nの重さの物体を動かし続けるには80Nの力が必要となる。これは、垂直抗力を0.4倍して求めることもできる。この0.4を**動摩擦係数**という。動摩擦係数をμ'とすると、$F = \mu' N$が成立している。

「物体が滑っているときは常に一定の動摩擦力が作用する。その大きさは$F = \mu' N$である。」

(4)　摩擦力の判別について



　右のグラフは静止している物体に面と水平に力を加えたときの加えた力と摩擦力との関係を表わしたものである。
このグラフでは最大摩擦力が5Nで動摩擦力が4Nである。
この場合、物体に加える力を徐々に大きくしていった場合、最大摩擦力である5Nを加えるまでは静止摩擦力が加えた力と同じ大きさで作用し物体は動かない。加えた力が5Nを超えたとき、摩擦力が5Nまでしか作用しないため、物体は急に動き始め、以後動摩擦力が4N作用することになる。



　次に動いている物体に動いている方向と同じ方向に力を作用させる場合を考える。最大摩擦力より大きい6Nの力を加えた場合この物体は動いているので動摩擦力4Nが作用している。最大摩擦力と同じ大きさの5Nの力を加えた場合も物体は滑っているのであるから、動摩擦力4Nが作用している。これらは、加えた力の方が動摩擦力よりも大きいので物体は次第に速くなる。動摩擦力と同じ4Nの力を加えたときも物体が滑っているので作用する摩擦力は動摩擦力4Nである。この場合は力がつりあっているので、物体の速度は一定である。動摩擦力よりも小さい力である3Nを加えた場合も、作用している摩擦力は動摩擦力4Nである。この場合は摩擦力よりも小さい力であるから、だんだん遅くなり、そのうちに物体は静止する。静止した後は静止摩擦力になるので、加えている3Nと等しい3Nの摩擦力となる。

　まとめると

「接触面が滑っていない場合は静止摩擦力がはたらいている。滑り始める直前が最大摩擦力がはたらく瞬間である。接触面が滑っている場合に動摩擦力がはたらいている。」

＜例題＞

　水平面上に置いた静止物体に、水平に加える力を徐々に大きくしていくと、大きさ5.0Nの力を加えた瞬間この物体は動き始めた。この時の最大摩擦力が5.0Nであることを示せ。また、この物体に大きさ5.0Nの力を加えた時、動くのか動かないのか説明せよ。

＜解説＞

最大摩擦力は動き始める直前の摩擦力のことである。よって、5.0N。

　最大摩擦力は静止摩擦力の最大値であるから、最大摩擦力を加えた時は動かない。しかし、徐々に大きくして初めて動いたその瞬間は最大摩擦力を越えている。その力の大きさが5.01Nだったとすれば滑りはじめるのであるが，有効数字２桁では5.0Nと表現される。その越えた量は測定できない程小さい量だと判断できるので、動き始めた瞬間に加えた力

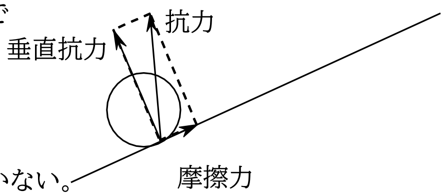
の大きさが最大摩擦力の大きさと考えても差し支えない。

最大摩擦力が5.0Nの時，5.0Nの力を加えた時は，動くとも,動かないとも両方の意味で考えることができる。

11．垂直抗力と摩擦力について

物体どうしが接触すると,その場所に抗力がはたらく。抗力は接触面に対して垂直方向と面に沿う方向に分解できる。面と垂直方向成分が垂直抗力，面の方向成分が摩擦力である。

摩擦がない滑らかな面では，摩擦がないので抗力は面に対して直角方向にはたらくので，抗力は垂直抗力と等しくなる。



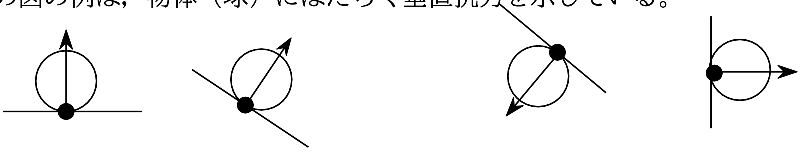
⑴　垂直抗力

物体が面から離れると，垂直抗力ははたらかない。これを利用して物体どうしが接触しているかどうかを判断することができる。

「物体どうしが接触している⇔垂直抗力＞0」

といえる。

下の図の例は，物体（球）にはたらく垂直抗力を示している。



上の図において，黒点が物体どうしの接点である。作用点は球の方にあることに注意。これら図を見て分かるとおり,球に作用点を持つ垂直抗力は接点から球の側に矢印を描き，面の方にはたらいている垂直抗力は接点から，面のほうに矢印を描く。

「垂直抗力は物体どうしの接点から，面と直角で物体のある側に引く」

これが垂直抗力の作図方法である。面にはたらく垂直抗力の反作用も垂直抗力である。反作用は面の側にはたらき，上の垂直抗力と逆向きで同じ大きさである。

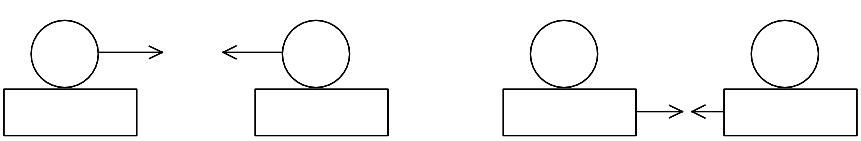
⑵　摩擦力

抗力を分解した面に沿う方向の力が摩擦力である。そのため，摩擦力は垂直抗力と同じ作用点で，方向は垂直抗力と直角となる。

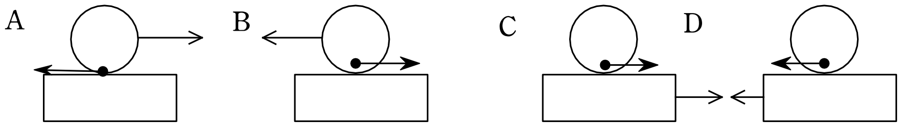
「摩擦力は垂直抗力と直角で同じ作用点である。」

判断が難しいのは摩擦力の向きである。

台の上に球が載っており,台および球を矢印の方向に動かした。



このときに球にはたらく摩擦力は下の図のようになる。



この図を見ることにより，自分（球）が動く場合（A,B)は自分の動きの逆に摩擦力がはたらき，相手（台）が動く場合（C,D）は，台の動きと同じ方向に摩擦力がはたらいている。

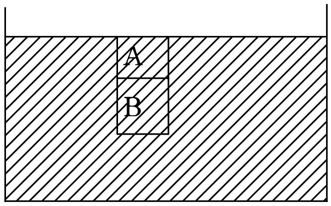
A,Bの場合球は減速し、やがて静止するために動く方向と逆向きに摩擦力がはたらき,C,Dの場合は台の動きと同じ方向に加速されるので，台の動く方向に摩擦力がはたらいているのである。

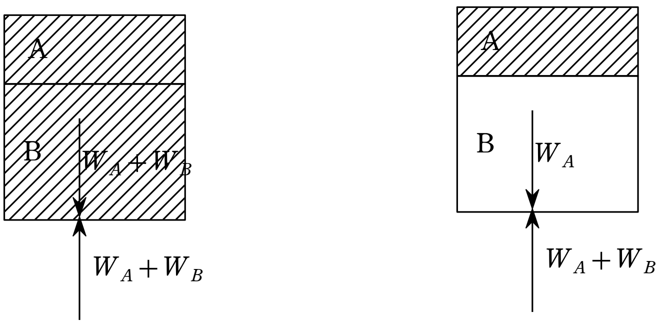
「摩擦力の方向はその物体の加速度の方向で判断する」

12．浮力

⑴　浮力について

図のように水中のある領域A、Bを考えることにする。この領域には重力が作用しているので、重さを持っている。その重さをW_A、W_Bとしよう。領域Bの下面にはA、B両方の重さがかかっているので、W_A+W_Bの重力がはたらいていることになる。このBの下面にある水分子は動かないことから、下からも同じ大きさの力がかかっていることがわかる。





ここで、領域Bの水を取り除いて変わりに質量の無視できる変形しない箱を入れたとしよう。この箱の下面に上からかかる力はA領域の重さだけとなり、その力はW_Aである。この場合下から押し上げる力は以前と同じ深さであるために変わらない。そのため、下からの力が上からの力よりもW_Bだけ勝ることになる。この力が**浮力**である。この浮力は上から押される力と下から押される力の差になるので元あった水の重さ（重力W_B）に等しくなる。

⑵　密度について

物体の密度は単位体積あたりの質量と定義されており、密度$=\dfrac{\text{質量}}{\text{体積}}$で表わされている。つまり、体積を同じにしたときの質量の違いを表わしている。

＜例＞　密度10kg/lとは1lの体積が10kgという意味なので、3lは30kg、40kgは4lである。

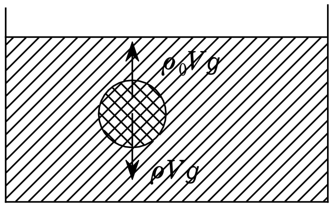
⑶　浮力の式

この水塊の密度をρ_0、体積をVとすると、密度の定義式より質量は$\rho_0 V$となる。よって、この水塊に作用する重力の大きさは$\rho_0 Vg$となる。この水塊は水中で静止しているため、この重力は上向きの浮力とつりあっていることになる。よって、浮力は$\rho_0 Vg$となる。

$$F=\rho_0 Vg \qquad （密度×体積×重力加速度）$$

⑷　水中に入れた物体の浮力

　水中に同じ体積で密度ρの物体を入れると、浮力はこの物体が水であったときの重力であるから、$\rho_0 Vg$である。また、この物体の質量はρVであるのでこの物体に作用する重力の大きさはρVgとなる。

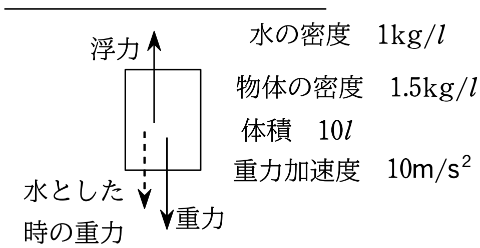


$\rho Vg > \rho_0 Vg$の時は重力のほうが大きいので物体は下がり、逆のときは上向の力のほうが大きいので浮く。また、$\rho Vg=\rho_0 Vg$のときは力がつりあうので、物体の速度は一定となる。よって、

$\rho_0<\rho$の時物体は沈み、$\rho_0>\rho$のとき物体は浮き、$\rho_0=\rho$のとき物体は水中に静止するといえる。

＜例題＞

　水中に密度1.5kg/l、体積10lの物体を沈めた。この物体にはたらく浮力を求めよ。水の密度1kg/l、重力加速度の大きさを10m/s^{2}とする。



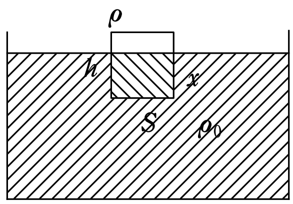
＜解答＞

　物体の密度が1.5kg/lなので、1lあたり1.5kgなので、10lの質量は15kgで重力の大きさは150Nとなる。

　もし、水でできていたらこの物体は動かない。つまり、水だとしたこの物体の重力と浮力は同じ大きさだということである。浮力を求めるためには水だとしたときの重力を求めればよいことになる。水の密度は1kg/lなので、10lは10kgとなる。10kgの物体にはたらく重力は100Nである。よって、浮力は100Nとなる。

⑸　水に浮いている物体の浮力

　密度ρ_0の水に断面積S、高さh、密度ρの物体を浮かべた。このとき、沈んだ長さxを求めてみる。



　この物体の体積は$V=Sh$であるから、質量はρShとなる。よって、重力はρShgである。

　また、もし、物体の水中に沈んでいる部分が水であるならば静止しているので、浮力はこの物体の水中に沈んでいる部分が水であったとしたときの重力と等しい。浮力は$\rho_0 Vg$であり、水中部分の体積はSxであるから、$\rho_0 Sxg$が浮力となる。

　物体は静止しているので、この浮力と重力はつりあっている。よって、

$$\rho_0 Shg = \rho Sxg$$

が成り立つ。

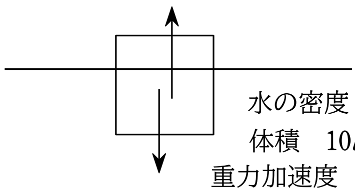
これを解くと、　$x = \dfrac{\rho_0}{\rho} h$　となる。

浮力に関して次のことがいえる。

「浮力は物体が押しのけた水の重力と等しい。」（アルキメデスの原理）

＜例題1＞

水に密度0.8kg/l、体積10lの物体を水に浮かべた。このとき、水面下に沈んでいる部分の体積はいくらか。



水の密度　1kg/l
体積　10l
重力加速度　10m/s^2
物体密度0.8kg/l

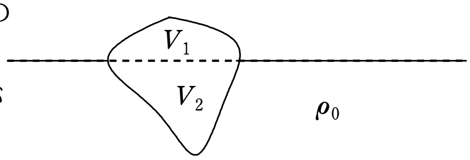
＜解答＞

密度0.8kg/lで体積10lなので、この物体の質量は8kg はたらいている重力は80Nとなる。この物体は浮いた状態で静止しているので、浮力とつりあっている。よって、浮力は80Nである。

浮力は水の重力と同じなので、水80Nの質量は8kgである。水1lが1kgなので、8kgは8lである。水80Nを生じるためには8lの体積が必要となる。つまり、水面下の体積は8lである。

＜例題2＞

密度ρ_0の液体上にある物体が浮かんでいる。液体上に出ている部分の体積がV_1、液面下の部分の体積がV_2であった。この時、この物体の密度ρが



$$\rho = \frac{V_2}{V_1 + V_2} \rho_0$$

であることを導け。

＜解説＞

この物体の密度をρとすると、この物体の質量は　$\rho(V_1 + V_2)$

重力は　$\rho(V_1 + V_2)g$　である。

一方浮力は水面下の部分が水だったとした時の重力である。よって、

$\rho_0 V_2 g$

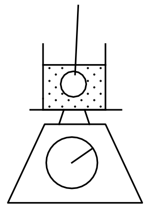
両者はつり合っているので　$\rho(V_1 + V_2)g = \rho_0 V_2 g$

よって、

$$\rho = \frac{V_2}{V_1 + V_2} \rho_0$$

が成立する。

＜例題3＞



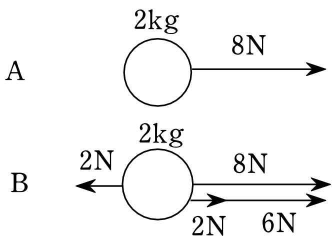
　はかりの上に乗せた水を入れた容器の中におもりを取り付けた糸を垂らしたところ、はかりの針は、浮力の分だけ増加することを説明せよ

＜解説＞

　作用反作用で考える。このおもりが、水から受ける力は浮力である。この浮力の反作用が水を押しているので、この分だけ針が動く。

13．運動方程式

⑴　複数の力がかかった場合。



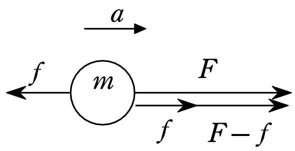
Aのように2kgの物体に8Nの力を加えた場合、加速度は$ma=F$より

$2a=8$　よって、$a=4\mathrm{m/s^2}$

Bの場合は、8Nの力は2Nと6Nの合成であり、2Nの力は同一作用線上･逆向きに同じ大きさで作用しているために打ち消す。

よって、物体の速度を変化させる力は6Nの力のみになる。よって、$2a=8-2$

加速度は$3\mathrm{m/s^2}$となる。

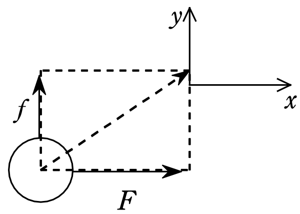


　質量mの物体の前方にF、後方にf（$F>f$）の力を加えたとき、前方に加速度aで加速したとすると、前方の力Fはfと$F-f$に分けられ、このうちfは後方のfと同一作用線上逆向き同じ大きさとなるので、打ち消される。そのため、$F-f$の力で、この物体は加速度aを生じることになる。よって、

$$ma=F-f$$

が成立する。

⑵　直角方向に力がはたらいた場合



　質量mの物体にx方向にF，y方向にfの力がはたらいた場合を考える。

　力の合成分解は自由であるから，Fとfの合成力の方向に加速されるのであるが,この場合合成して方程式を立てると複雑になる。

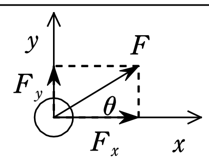
　x方向に加えた力でy方向に加速することはなく，y方向に加えた力でｘ方向に加速することはありえない。そのため，x方向はx方向だけ，y方向はy方向だけで方程式を立てることができる。x方向の加速度の大きさをa_x，y方向の加速度の大きさをa_yとすると，

　x方向の運動方程式は　$ma_x=F$

　y方向の運動方程式は　$ma_y=f$

これを連立させて解けばよい。

⑶　斜め方向に力がはたらいた場合



x方向より角度θ斜めの方向に力Fがはたらいた場合を考えよう。当然力の方向に加速されるわけであるが,x方向とy方向は互いに全く影響を与えないので，x方向とy方向で別々に方程式を建てて解いてもよい。

x方向の力の大きさ　$F\cos\theta = F_x$

y方向の力の大きさ　$F\sin\theta = F_y$

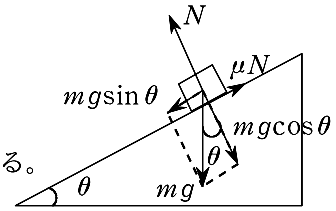
x方向の加速度の大きさをa_x，y方向の加速度の大きさをa_yとすると，

　x方向の運動方程式は　$ma_x = F_x$

　y方向の運動方程式は　$ma_y = F_y$

これを連立させて解けばよい。

⑷　斜面上の物体の運動方程式



角度θの動摩擦係数μの斜面上に質量mの物体を静かに置いたら滑り出した。このときの加速度の大きさを求めてみよう。

以下は物体がひとつの場合の運動方程式の立て方である。

①　力の作図

すべての力を作図すること。

重力‥‥‥重心（中心）より真下に引く

張力‥‥‥結び目からひもに沿って引く

摩擦力‥‥物体どうしの接点から滑ろうとする逆向きに引く。

垂直抗力･物体どうしの接点から摩擦力と直角で加速物体のある向きに引く。

摩擦力と垂直抗力は必ずペアとなるので，すべての接点についてチェックすること。

②　各力の大きさを記入する。

重力‥‥mg

張力‥‥大きさが与えられていなければ，未知数となる。何か未知文字と置く。

垂直抗力‥‥大きさが与えられていなければ，未知数となる。何か未知文字と置く。

摩擦力‥‥静止摩擦力･最大摩擦力･動摩擦力のどの摩擦力がはたらいているかを見極める。

静止摩擦力なら何か未知文字で置き,最大摩擦力なら静止摩擦係数と垂直抗力の積で置き，動摩擦力なら動摩擦係数と垂直抗力の積と置く。

③　加速度の方向を確認し加速度方向かその直角方向に向いていない力はすべて分解し，分解した力の大きさを置く。

必ずしも加速度の方向を基準として分解しなくても良いが，加速度方向を基準に分解したほうが計算が楽になることが多い。

④　加速度方向と直角な方向は力の釣り合いの式を立てて，加速度方向は運動方程式を立てる。

このやり方に準じて，加速度を求めてみよう。

①　図のように，重力･摩擦力･垂直抗力を記入。張力はひもがないので存在しない。

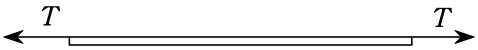
② 重力はmg，垂直抗力はNとおく。摩擦力はこの場合すべるので動摩擦力よって，μNとおく。

③ 加速度方向は斜面に沿って下向きである。その方向とその直角方向で考える。
垂直抗力，動摩擦力はその方向を向いているので，分解の必要なし。
重力は鉛直方向より角度θ傾いているので，斜面方向に$mg\sin\theta$，直角方向に$mg\cos\theta$と分解される。

④ 斜面と直角方向のつりあいの式　　$N=mg\cos\theta$
斜面方向の運動方程式　　$ma=mg\sin\theta-\mu N$
未知数は　a,Nで二つ，方程式も二つなので,この連立方程式を解けばよい。

14．張力と滑車について

⑴ 張力について



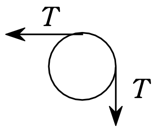
通常に出題される問題においては、
張力を生じている糸は、「軽い」とか「質量が無視できる」とかいう表現がしてある。
これは、糸の質量を0と考えてよいという意味である。運動方程式に入れると、
$F=ma=0\times a=0$　となり、力は0である。これは、合力が0であることを意味し、力が常につりあっていることになる。よって、

「質量の無視できる物体にはたらいている力は物体が加速していても力がつりあっている」

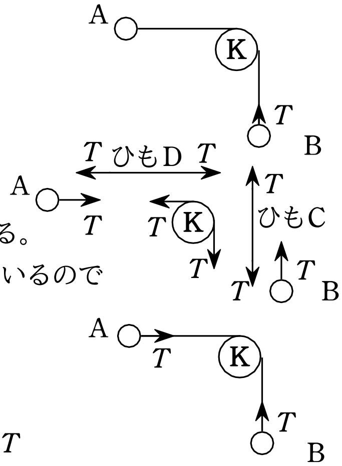
といえる。

「ひもにはたらく張力は必ず同一作用線上逆向き同じ大きさである。」

⑵ 定滑車



定滑車がらみの問題が出題されるときも「滑らかに回る」とか「軽い滑車」とかいった表現が使われている。
これは回転させるのに力が必要ないことを意味しており、力のモーメント（後述）の和は常に0となる。滑車の場合半径が等しいので、滑車に働く張力は常に等しくなる。



滑車Kを通して，物体Bが物体Aを張力Tで引張る場合を考える。
作用反作用を考えるために物体どうしを離して考えることにする。Bにはたらく張力の反作用はひもにかかっており，ひもCに下向きTがはたらいていることになる。ひもCには同一作用線上逆向き同じ大きさの力がはたらいているのでひもCに上向きTがはたらいている。この反作用が滑車Kに下向きにはたらいていている。大きさはTである。滑車を回すのに力がいらないので，滑車には逆向きに回す同じ大きさの力がはたらいている。大きさはT。この力の反作用TがひもDに右向きにはたらき,ひもDのつりあいでひもDの左端に左向きTの力がはたらき,その反作用が物体Aに張力Tとなってはたらいている。ひもや

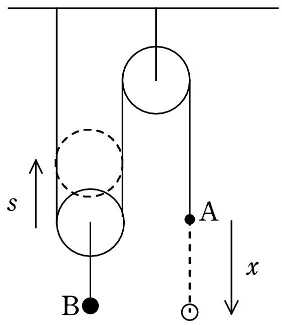
滑車は計算対称でないので,物体A，Bにはたらいている力のみ記入すればよい。よって，この場合上図のように描けばよいのである。

これまでの内容をまとめると、糸にかかる張力は常につりあいの関係にあり、滑車も力は常に同じとなる。よって、

「質量が無視される糸にかかる張力はすべての点で等しい」

といえる。

⑶　動滑車



動滑車は滑車自体が動きながら回転する滑車である。力の釣り合いとして出題されるときは質量を持つことがあるが,運動方程式として出題されるときは質量は無視できるものとして扱われる。質量のある物体の回転の加速度は高校の範囲ではないためである。

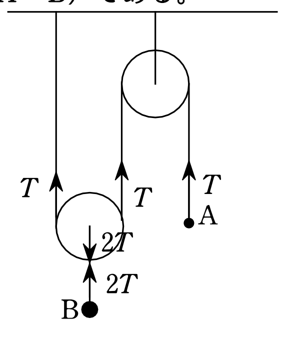
右図においておもりAがx下がると,おもりBがs上昇したとする。ひもの長さは変わらないため,Aの部分でx長くなっているので，sの部分ではx短くなっていなければならない。sの左右両方のひもがs短くなるので，全体として$2s$短くなる。よって，$2s=x$が成立し，

$$s=\frac{x}{2}$$

となる。つまり，AとBの変位の比は２：１となる。

A，Bは同時に動くので,単位時間に動く変位（速度）もおなじ比である。また，速度は常に２：１となるので,速度の変化（加速度）も２：１となる。

動滑車において，変位比＝速度比＝加速度比＝２：１（A：B）である。



＜証明＞

A，Bともに初速度0で，Aの加速度を$2a$，Bの加速度をaとすると，時刻tにおける速度はAが$2at$，Bがatとなり，

A：B＝２：１

時刻tにおける変位は，Aが$\frac{1}{2}\cdot 2at^2$，Bが$\frac{1}{2}at^2$となり，

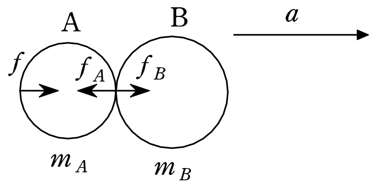
A：B＝２：１

動滑車につるしている物体Aにはたらいている張力をTとおくと,⑵の考え方により，動滑車に上向きTの張力が2本はたらくことになる。動滑車は質量が無視できるので加速状態にあっても力のつりあい状態にある。

よって，動滑車には下向き$2T$の力がはたらくことになり，物体Bには$2T$の張力がはたらく。　よって，**張力比は１：２（A：B）である。**

15．加速時の作用反作用の法則

　質量m_Aとm_Bの物体A、Bを接触させ、図のように物体Aに力fを加えたとき、この物体は加速度aで加速したとする。この物体A、Bをひとつの物体と考えれば運動方程式



　$f=(m_A+m_B)a$　…①

が成立する。

　次に各物体を別々に考えてみる。物体Bは加速しているはずであるから物体Aより、力を受けていることになる。この力をf_Bとすると、物体Bの運動方程式は、加速度は同じであるから、

　$f_B=m_Ba$　　…②

となる。もし、Aに力fのみが作用しているとすると、運動方程式

　$f=m_Aa$が成立するはずであるが、①と明らかに同時に成立することはない。別に力が加わっているはずである。そこで、物体Bからf_Aの力が作用していると仮定すると、運動方程式は、

　$f-f_A=m_Aa$　…③

となる。②と③をたすと、

　$f-f_A+f_B=(m_A+m_B)a$

となる。これと、①を比較することにより、$f_A=f_B$となる。

この力の関係は作用反作用の関係にある。これにより、物体が加速している場合でも作用反作用の法則が成立していることが分かる。

　作用反作用の法則を用いて力を作図すれば、物体の運動はその物体に作用する力のみを用いて方程式を立てることになる。そのため、別の物体の状況は一切考えなくて良い。

　複数物体が連動して動く運動方程式の問題は，すべて作用反作用を使って解くことになる。二つの物体を一つの物体と考えて解いた方が簡単に解けるが,作用反作用をマスターすることのほうが優先される。よって，練習時は複数物体の力の問題が出たら必ず作用反作用の法則を使って解くことを勧める。作用反作用の法則の使い方をマスターした後であれば各自自由な解き方で解いてよい。

　作用反作用の法則の使い方

①　対象物体を離して描く。

②　力を作図する。

・　重力

　対象物体の重心（中心）

　より真下に描く，大きさは$W=mg$より求める。

・　張力

　結び目からひもに沿って描く，必ず物体から離れる方向である。大きさは与えられて

いなければ未知数である。

- 摩擦力･垂直抗力

摩擦力，垂直抗力は物体どうしの接点に存在する。物体どうしのすべての接点に注目して描く。垂直抗力は作用点は接点で面に対して直角方向で物体のある向きで，大きさは与えられていない限り未知数である。摩擦力は垂直抗力と同じ点が作用点である。方向は面に沿うが向きは注意を要する。通常はすべる方向と逆であるが,相手の物体が動いている場合はそうでないこともある。**物体の速度変化に注目して摩擦力の方向を判断すること。**大きさは，静止摩擦力の場合未知数で，すべる直前なら$F=\mu N$，動摩擦力なら$f=\mu' N$となる。

③　作用と反作用が対応しているかどうかを確認する。

すべての物体の速度変化と力の方向との間に矛盾がないかを調べ，矛盾がある場合はあると思われる力を追加する。

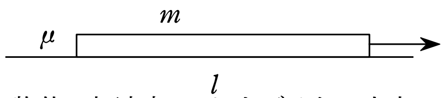
すべての力にその力の反作用がある。反作用は必ず別物体にある。その別物体が計算すべき物体であるなら,，反作用を必ず描き込んでいなければならない。描き込んだすべての力の反作用をチェックし，計算対象にはたらいている反作用を残らず確認する。

④　それぞれの物体に対して独立して運動方程式を立てる。

16．作用反作用の法則を利用した例題

＜例題１＞　質量のあるひもの張力

動摩擦係数μの粗い水平面上に長さl，質量mのひもが置いてある。



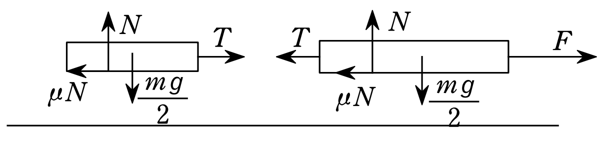
このひもに水平にFの力を加えたとき,この物体の加速度a，およびひもの中点での張力の大きさTを求める運動方程式をたてよ。

＜解答＞

張力を求めたい場所でひもを切断して，作用反作用の法則を使って解く。

①②

重力は質量が半分になるので下向き$\dfrac{mg}{2}$。



張力は全体を引く張力Fと，中点の張力Tである。共に物体から離れる方向である。この２本の張力が作用反作用である。

垂直抗力はNで面に対して直角上向き，摩擦力は垂直抗力と同じ作用点から，動く逆向きである。大きさはμNである。

③　垂直抗力N，摩擦力μNは反作用が下の面にあり，面は計算対象外であるので，反作用は考えなくて良い。重力の反作用は地球であり,地球も計算対象外なので反作用を考えない。Fは外力であり,人が引く力で反作用は人にあるが,人は計算対象外なので，これも反作用を考えなくてよい。張力Tのみ反作用を考えなくてはならないが，すでに書き込んでいるので，これで作図完了である。

④　鉛直方向のつりあいより　$N=\dfrac{mg}{2}$

　前の物体の運動方程式　　$F-T-\mu N=\dfrac{m}{2}a$

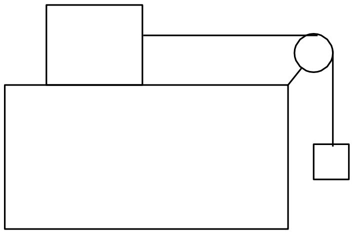
　後ろの物体の運動方程式　$T-\mu N=\dfrac{m}{2}a$

　未知数はN,T,aで方程式が３つなので，この連立方程式は解ける。

　$N=\dfrac{1}{2}mg$，$T=\dfrac{1}{2}F$，$a=\dfrac{F}{m}-\mu g$

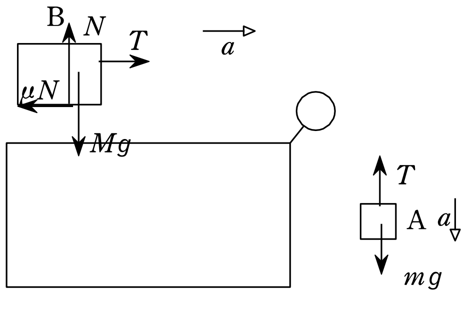
＜例題２＞　滑車による連結物体

　動摩擦係数μの固定された水平な台の上に質量Mの物体Bを置き、滑車を通して質量mの物体Aをつるしたところmの物体が下降した。このロープに作用している張力の大きさをT、加速度をaを求める運動方程式を作れ



＜解答＞

①②　物体を離して書いて
力を作図すると右図のようになる。
　ひもや滑車に反作用がはたらいているが
ひもと滑車は計算対象ではないので，
これらに作用点を持つ力は描かない。
A,Bの物体に作用点を持つ力のみで
運動方程式を立てる。



　A：　$mg-T=ma$

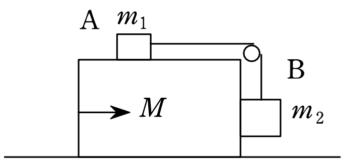
　B：　$T-\mu N=Ma$　　　　$N=Mg$

　未知数が三つ，方程式が三つなのでこの連立方程式は解ける。

　$a=\dfrac{m-\mu M}{M+m}g$，$T=\dfrac{(1+\mu)Mm}{M+m}g$，$N=Mg$

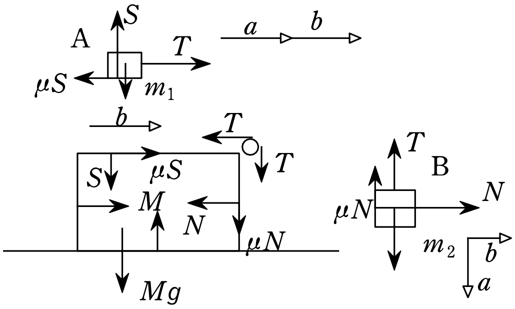
＜例題３＞　土台が動く場合の運動方程式

滑らかな水平面上に質量Mの直方体を置く。
この直方体に滑車を取り付け，その上に
質量m_1の小物体Aを置き,滑車を通して
質量m_2の小物体Bをひもで連結した。
台と物体A,Bとの動摩擦係数をμとして，
この台に水平方向にFの力を加えたとき,A,Bおよび台の運動方程式を立てよ。



＜解答＞

①②　物体を離して描き，すべての力を描くと右図のようになる。



物体間にはたらく張力，垂直抗力，摩擦力はすべて反作用を確認すること。

この場合は土台が計算対称なので，土台に作用点を持つ反作用を確認すること。

反作用を考慮しなくて良いのは水平面との間にはたらいている力と重力のみである。後の力はすべて反作用が必要である。

・　加速度の記入

土台が動く問題では加速度の記入が大切である。加速度は次のようにして記入すると良い。

1)　土台上に乗っている人が見た加速度（相対加速度）aを記入する。

2)　土台の加速度bを記入する。

3)　合成した加速度で運動方程式を立てる。

A　鉛直方向　$S=m_1g$　　水平方向　$T-\mu S=m_1(a+b)$

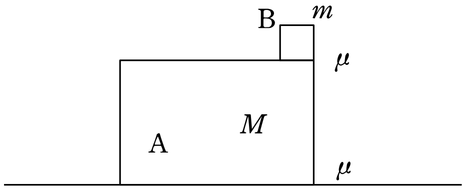
B　鉛直方向　$m_2g-T-\mu N=m_2a$　　水平方向　$N=m_2b$

土台　水平方向　$F+\mu S-T-N=Mb$

未知数は　S,N,T,a,bで方程式が5つなので，この連立方程式は解ける。

＜例題４＞　親亀小亀問題

動摩擦係数μの水平面上に質量Mの直方体Aを置き,その上に質量mの小物体Bを乗せた。A，B間の動摩擦係数はμである。



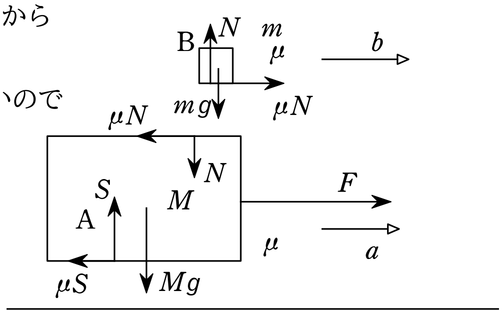
今，物体Aに水平方向にFの力を加えたとき，A,Bの物体の加速度（a,b）を求める運動方程式をたてよ。

＜解答＞

1)　物体を離してはたらいているすべての力を作図

Bの摩擦力の方向はBが右向きに加速することから判断する。$N,\mu N$は反作用が必要である。

$S,mg,Mg,F,\mu S$は反作用が計算対象物体でないので反作用は必要ない。



2)　A,Bの加速度を記入

この場合土台が動くのでBに左向きの加速度（$-c$）を記入して，土台の加速度aを追加しても良いが，その場合Bの加速度は

$(a-c)$となる。$b=a-c$と置けば，最初から加速度をa,bと置いたのと未知数の数が同じになるので,＜例題３＞の方法を取らず，別々の加速度としても解ける。＜例題３＞の場合はそれぞれ別々の加速度とすると,物体が3つあるので，加速度が3つになり,未知数がひとつ増えて解けなくなるのである。

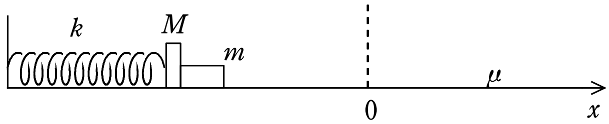
3)　それぞれのμ物体に対して運動方程式を立てる。

A　水平方向　$F-\mu N-\mu S=Ma$　　鉛直方向　$S=Mg+N$

B　水平方向　$\mu N=mb$　　鉛直方向　$N=mg$

未知数はa,b,S,Nの4つで方程式が4つなのでこの連立方程式は解ける。

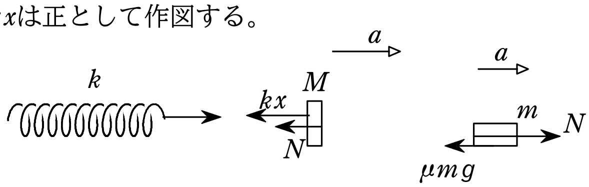
＜例題５＞　ばねに関する運動方程式



水平面にx軸を取り，壁にばね定数kのばねの一端を固定する。このばねの自然長の位置をx軸の原点とする。このばねに，質量Mの板を取り付け，質量mの小物体を押し付けて，距離dだけ押し縮めて手を離した。物体M，mが加速するとき,mがMから離れる位置および最高速度になる位置のx座標を求めよ。ただし，物体mは水平面との動摩擦係数がμで，物体Mは摩擦はないものとする。

＜解答＞

物体が複数あるので，切り離して作図する。xは負の数がありうるのであるが,符号が複雑になるのでxは正として作図する。



ばねが自然長より伸びていることになっているので，ばねにはたらく力は右向きである。その反作用がMにはたらいている。右向きを正として運動方程式を立てると

$N-\mu mg=ma$…①

$-kx-N=Ma$…②

・　離れる位置は垂直抗力$N=0$なので，

$-\mu mg=ma$　　　$-kx=Ma$

これを解くと　$a=-\mu g$　$x=\dfrac{\mu Mg}{k}$　となる。

・　$a>0$なら加速し，$a<0$なら減速する。加速の場合は今後さらに速くなり,，減速は過去はもっと速かったことになるので共に最高速度ではない。よって，

「最高速度になるのは加速度が0のときである」

といえる。

①②に$a=0$を代入すると，　$x=-\dfrac{\mu mg}{k}$　となる。

17．空気抵抗を考慮した運動（参考）

(1) 粘性抵抗

高校では空気抵抗がないものとして，物体の運動を考えるが実際は空中を飛翔する物体には空気抵抗がかかっている。

空気抵抗には2種類ある。物体の速度が遅い場合は空気分子の分子間力（粘性）による抵抗が大きい。これを粘性抵抗という。粘性抵抗は速度に比例する。一般に高校では比例定数をkとおいて，

$F=kv$

とあらわして計算することが多い。

比例定数kは物体の大きさ，形，流体（空気）の状態で変わる定数である。半径rの球が空気中にある場合は，

$F=3.4\times10^{-3}rv$

水中の場合は

$F=0.015rv$

といわれている。大学入試では空気抵抗が出題される場合はこの粘性抵抗が多い。

(2) 粘性抵抗がはたらいている物体の落下速度

質量mの物体を落下させたとき，速度がvになった瞬間の運動方程式は，粘性抵抗をkv，加速度をaとすると，

$ma=mg-kv$

落下開始時は速度が0なので，重力加速度によって次第に加速されていくが,速度が大きくなるにしたがって，空気抵抗が大きくなり,加速度がだんだん小さくなる。その結果最終的には重力と空気抵抗がつりあう関係になる。つりあった状態での速度を**終端速度**という。

＜例＞ 直径1mmの雨粒の降下速度

粘性抵抗は非常に遅い降下をする物体に対して適応できる。雨では直径約1mm以下の雨粒で粘性抵抗が主体的にはたらいている。この雨粒の空気抵抗は$r=5\times10^{-4}$mとして

$F=3.4\times10^{-3}rv=1.7\times10^{-6}v\,\mathrm{N}$

この雨粒の質量mは，水の密度を$\rho=1.0\times10^{3}\mathrm{kg/m^3}$として，

$m=\dfrac{4}{3}\pi r^3\rho=5.2\times10^{-7}\mathrm{kg}$

よって，終端速度は

$5.2\times10^{-7}g=9.0\times10^{-8}v$

$v=\dfrac{5.2\times10^{-7}\times9.8}{1.7\times10^{-6}}=3.0\mathrm{m/s}$

＜落下速度の計算＞…発展

加速度aは1秒間の速度変化なので,微小時間dtにdvだけの速度変化が起こったとして，

$a=\dfrac{dv}{dt}$とあらわせる。よって，運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv$$

$$\frac{dv}{v-\frac{mg}{k}}=-\frac{k}{m}dt$$

両辺を不定積分して

$$\log_e\left|v-\frac{mg}{k}\right|=-\frac{k}{m}t+\text{定数}$$

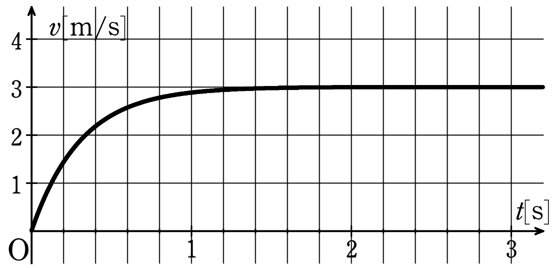
$$v-\frac{mg}{k}=\text{定数}\times e^{-\frac{k}{m}t}$$

$t=0$のとき，$v=0$なので，定数は$-\dfrac{mg}{k}$

よって，　$v=\dfrac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$ となる。

これを上記の直径1mmの雨粒のデータを代入してグラフを書くと右のようになる。

このグラフを見ると,降下し始めて1s程度で，終端速度になっていることが分かる。



(3)　慣性抵抗

物体の速度が大きくなると空気分子の粘性（分子間力）は無視できるようになり,代わって，分子衝突による衝撃力が抵抗に影響を与えるようになる。これは，近似的に速度の二乗に比例することが分かっている。比例定数をkとおいて，

$$F=kv^2$$

とあらわされる。

比例定数kは粘性抵抗同様に物体の大きさ，形，流体の状態によって変わる定数である。一般に

$$F=\frac{1}{2}C_D\rho Sv^2$$

となる。ここで,Sは物体の断面積，ρは流体の密度，C_Dは形による定数である。球の場合は約0.5である。

この慣性抵抗は空気の流れの状態によって，変化するために,正確な式ではない。粘性抵抗と慣性抵抗は抵抗力の大きいほうが主体的になってはたらくと考えてよい。速度が遅いとき粘性抵抗で速度が大きいときに慣性抵抗となる。

＜例１＞　パラシュートの抵抗係数C_Dは1.42といわれている。空気密度1.3kg/m^{3}として，体重m[kg]の人が,安全に着地できる速度5m/s以下で着地するためには，パラシュートの断面積はいくら以上必要か計算してみよう。

降下加速度をaとすると，運動方程式は,

$ma = mg - \frac{1}{2} C_D \rho S v^2$

時間が経過すればするほどvが大きくなるので，加速度が次第に小さくなる。最終的に加速度が0になる。よって，最終速度は

$mg - \frac{1}{2} C_D \rho S v^2 = 0$

これを解くと，

$S = \frac{2mg}{C_D \rho v^2} = \frac{2 \times 9.8}{1.42 \times 1.3 \times 5^2} m = 0.42m[\mathrm{m^2}]$

体重60kgの人の場合この面積は25m^2，これは半径2.8mの円に相当する。

＜例２＞　直径d[mm]の雨粒の降下速度を計算してみよう。

雨粒の体積は$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d \times 10^{-3}}{2}\right)^3$

水の密度は1000kg/[m^3]なので，この雨粒の質量は

$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d \times 10^{-3}}{2}\right)^3 \times 1000$

雨粒は球なので,$C_D = 0.5$，空気密度$\rho = 1.3$[kg/m^3]，断面積$S = \pi\left(\frac{d \times 10^{-3}}{2}\right)^2$より，

空気抵抗力は速さをvとすると，

$F = \frac{1}{2} C_D \rho S v^2 = \frac{1}{2} \times 0.5 \times 1.3 \times \pi\left(\frac{d \times 10^{-3}}{2}\right)^2 v^2$

終端速度は重力と空気抵抗がつりあった状態なので，

$\frac{1}{2} \times 0.5 \times 1.3 \times \pi\left(\frac{d \times 10^{-3}}{2}\right)^2 v^2 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d \times 10^{-3}}{2}\right)^3 \times 1000$

これを解くと，

$v = 4.1\sqrt{d}\,[\mathrm{m/s}]$

となる。　直径1mmの雨粒では4.1m/sの降下速度となる。

直径1mmの雨粒では，粘性抵抗で計算した雨粒の終端速度のほうが遅いので，直径1mmの雨粒では粘性抵抗が慣性抵抗より強くはたらいていることがわかる。