平面運動

１．速度ベクトル

速度を平面で扱うには、速度を平面ベクトルで表さなければならない。ここでは、その表現方法について学ぼう。

速度は単位時間の変位である。変位とは位置の変化である。物体の最初の位置Aを示す位置ベクトルを$\overrightarrow{x_0}$、移動先の位置Bの位置ベクトルを$\overrightarrow{x_1}$とすると、A点からB点への移動を表す変位ベクトル$\vec{x}$は平面ベクトルの項で扱ったように

$$\vec{x}=\overrightarrow{x_1}-\overrightarrow{x_0}$$

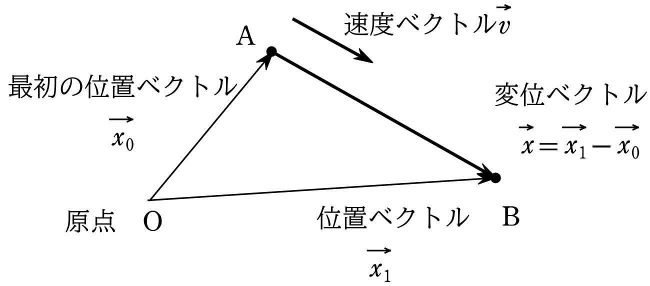
であらわされる。速度は単位時間の変位であるから、AからBへの移動に時間tかかったとすると、変位ベクトル$\vec{x}$をかかった時間tで割ればよい。よって速度ベクトル$\vec{v}$は

$$\vec{v}=\frac{\vec{x}}{t}$$

となる。

ベクトルの実数積の性質により変位ベクトルと、速度ベクトルの方向は同じであることになる。

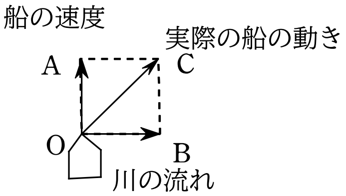
各ベクトルの関係は右図のようになっている。



２．速度の合成･分解

流れのある川に浮かんでいる船の中にいる人の速度をベクトルで考えてみよう。

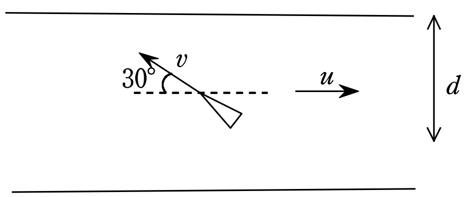
速度とは1秒間の変位であるから速度を理解するときは1秒間の位置変化で考えると考えやすい。今船が船首を真北に向けて進んでいるとき、静水中では1秒後にO点からA点に進んでいることになる。このとき、川の水が東の方向に流れているとすると、舟が静止していたなら、B点まで船が流されることになる。船が北に進みながら流されるということは、船がOからAに進もうとすると同時に東の方向に流されるということになり、わかりやすくいうと、船は1秒後C点にいることになる。これは、川の速度と船の速度のベクトル和に他ならない。このようにひとつの物体が複数の方向に同時に動いているときは二つの速度ベクトルの和を求めればよいことになる。これを**速度の合成**という。



例

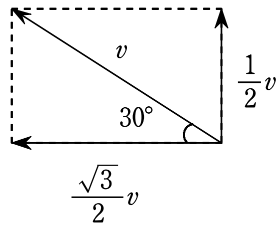
＜最初からベクトルを分解する方法＞

流れの速さu、川幅dの川を川上に対して30°の角度を保ちながら静水中での船の速さがvの船が川を横断している。



平面運動

船の速さvは川の流れの方向とその直角方向に分解できる。



このときの川幅方向成分は$\frac{1}{2}v$である。川幅がdであるために、川を渡る時間tは

$$t=\frac{d}{\frac{1}{2}v}=\frac{2d}{v}$$

となる。川の流れの方向成分は$-\frac{\sqrt{3}}{2}v$、で川の流れがuであるから、川の流れの方向の船の速さは$u-\frac{\sqrt{3}}{2}v$となる。よって、着岸する位置は、

$$\left(u-\frac{\sqrt{3}}{2}v\right)t=\frac{2d}{v}\left(u-\frac{\sqrt{3}}{2}v\right)$$

だけ出発点より下流の位置になる。

また、出発点のちょうど向かいの位置に着岸するには$u-\frac{\sqrt{3}}{2}v=0$が成立すればよい。

＜ベクトルの方程式を立てる方法＞

ベクトルの表示方法は特に決められていないので、最初からx成分とy成分に分解してそれぞれ別個に計算してもよい。これが通常のやり方である。しかし、ベクトルの方程式を立てて解く方法もある。

x軸を川の流れの方向に取り、y軸を対岸の方向に取り、静水中の船の速度を$\vec{v}$、流水の速度ベクトルを$\vec{u}$とすると、

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}v\\ \frac{1}{2}v\end{pmatrix}\qquad \vec{u}=\begin{pmatrix}u\\0\end{pmatrix}$$

である。

着岸地点をx下流とするとき、この船の変位ベクトルは$\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\d\end{pmatrix}$である。着岸までの時間を$t$とすると、次のベクトルの方程式が成立する。

$$\vec{x}=(\vec{v}+\vec{u})t$$

これを成分であらわすと、

$$\begin{pmatrix}x\\d\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}v\\ \frac{1}{2}v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u\\0\end{pmatrix}\right\}t$$

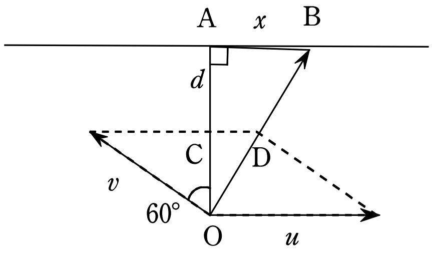
x,y各成分において方程式を立てると、

x成分　　$x=-\frac{\sqrt{3}}{2}vt+ut$

y成分　　$d=\dfrac{1}{2}vt$

この連立方程式を解けば、最初と同じ答えが得られる。

＜作図にて解く方法＞



図より、$OC=\dfrac{1}{2}v$、$CD=u-\dfrac{\sqrt{3}}{2}v$

$OA=d$、$AB=x$

とすると、△ODC∽△OBAより、

OC:CD＝OA：AB

が成立する。

よって，$\dfrac{1}{2}v : u-\dfrac{\sqrt{3}}{2}v=d : x$　　より，$x=\dfrac{2d}{v}\left(u-\dfrac{\sqrt{3}}{2}v\right)$

これを解くと同じ答えが求められる。

このようにベクトルの問題は

① 最初から分解して各成分ごとに計算する方法、

② ベクトルの方程式を立てる方法、

③ 作図して長さを求める方法

と主に3通りの方法がある。

どの方法でも答えは求められるので、状況によって使い分けるとよい。

３． 相対速度

(1) 速度の基準について

速度とはどのようなものなのか視点を変えて考えてみよう。今ある人が教室の中で静止しているとしよう。「この人の速さはいくらか」と聞かれると、誰も「0だ」と答えるであろう。しかし、本当に速さは0なのだろうか？というのは、この人は地球上にいるのである。地球は24時間で１周している。その上に住んでいる人はすべて地球と同じく周期24時間の円運動をしているはずである。日本付近（北緯34度）では，地球半径を6.38×10^6km，1日の秒数を8.62×10^4sとして，

$$\frac{2\pi\times6.38\times10^6}{8.62\times10^4}\times\cos34^\circ=385\text{m/s}$$

その速度は東へ約400m/sである。ということは、この人の真の速度は東へ400m/sということになる。

これは正しいのであろうか、地球は自転とともに公転していることは多くの人が知っている。すなわち、地球は1年間かけて太陽の周りを回っているのである。地球太陽間の距離1億5000万km（正確には1.496×10^8km）と1年間の秒数（3.156×10^7s）からその速さを計算することができる。

$$\frac{2\pi\times1.50\times10^8}{3.16\times10^7}=29.8\text{km/s}$$

その速さは約30km/sである。地球は太陽の周りを30km/sの速さで、1年間かけて1周

していることになるので，地球上に住んでいる人の本当の速さは30km/sとなる。

　これを真の速さとしてよいのであろうか、実は太陽は銀河系の周りを2億年かけて1周している。この太陽の速さは200km/sといわれている。その周りを回っている地球の速さもこの速さになる。その銀河系もまた、宇宙のどこかの方向に向けて動いているのである。

　このように考えると、速さ（速度）とはどんなものになるのであろうか。真の速さというものは測定できないし、測定の結果分かったとしても我々の生活上になんら関係はない。今，実際に我々が速さと呼んでいるものは地球が静止していると仮定した上での速さということになる。このように速さ（速度）には動いていないと仮定している基準となるものが必ずあり、その基準に対していくらの速さ（速度）で動いているかが問題となっているのである。

「速度には動いていないと仮定しているものが必ず存在している。」

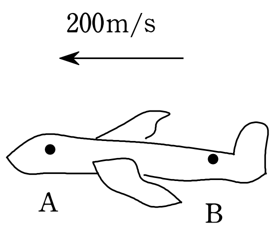
　たとえば、何もない宇宙空間において、自分と相手の人が二人宇宙遊泳をしているとしよう。この二人が互いに接近しているとき、どちらが静止してどちらが動いていると判定することができるであろうか？そのようなことはまったくできない。このように静止しているかどうかも判断することができないのである。

　逆に言えば、静止しているかどうかを判断することがまったくできないのであるから、自分で静止しているものを勝手に決めてもよいことになる。前の宇宙遊泳に関しても相手が静止していると考えても、自分が静止していると考えても、まったく差支えがない。

「速度の基準となるものを自分で勝手に決めてもよい。」

「速度の基準を自分で勝手に変更してもよい」

といえる。



　＜例＞

　200m/sで飛行する飛行機の中で飛行機の前方にいる人Aと後方にいる人Bが互いに向かい合って200m/sの速さで飛ぶ弾丸で打ち合った。地上で打ち合うと絶対はずさない腕どうしの二人である。この場合飛行機の速さと弾丸の速さが同じである。A,Bどちらが勝つと思うか。

　＜解＞

　「各人が撃った弾丸の速さを考えてみよう。Aは200m/sで後ろに下がりながら200m/sで弾丸を撃っているので、Aの撃った弾丸は撃った瞬間静止する。Bが撃った弾丸はBが200m/sで前に進みながら200m/sで弾丸を撃っているので400m/sで弾丸が飛ぶことになる。Aが撃った弾丸は静止してその場に落下。Bが撃った弾丸は400m/sでAを貫く。その結果Bが勝ちといえる。」

　この考え方は、正しいといえるだろうか、なかなか判断の難しいところであるが、上の判断はBが200m/sで動いていることが抜け落ちている。Aの弾丸は静止するが、Bが200m/sで動いているので、Aの弾丸はBに当たるのである。また、Aも200m/sで逃げながら400m/sの弾丸を受けるのでその差200m/sでAにあたる。すなわち相撃ちとなる。

　このように考えると問題が大変複雑となる。地上を基準とした速度で考えるから複雑な

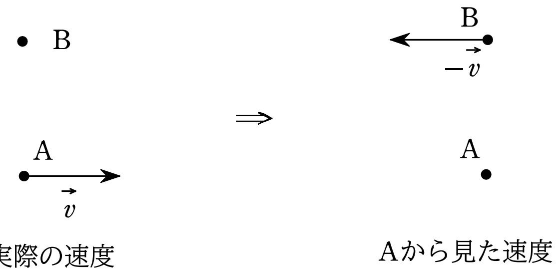
のである。基準は自由に変えてよいのであるから、飛行機を速度の基準とすれば話は簡単である。地上で相撃ちならば飛行機の中でも同じである。

このように速度の基準は都合によって勝手に変更してもよいのである。この考え方をさらに高度に発展させたのがアインシュタインの相対性理論である。速度の基準を自分の都合で何かに勝手に変更し、それに対する速度を**相対速度**と呼んでいる。速度には必ず基準が存在しているので、すべての速度は相対速度である。

(2)　速度の基準の変更

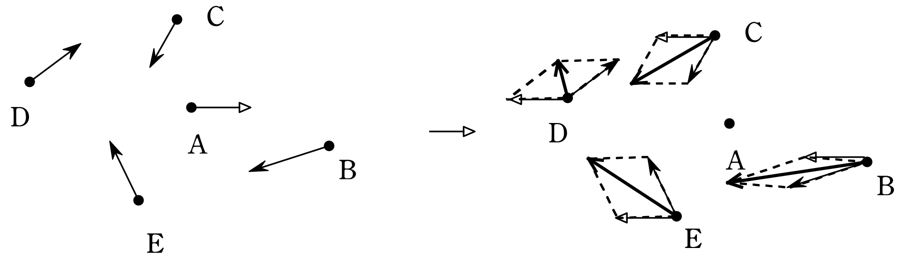
速度の基準を変更するにはどのようにすればよいのであろうか。この点について考えてみよう。

下図のように、静止している物体Bを見ながらAが右向きに速度$\vec{v}$で動いたとする。このとき、AはBが反対方向に動いているように見える。つまり、自分が前に進んでいるときに「私は静止している。景色が勝手に後ろに行っているんだ」と言っても間違いではないのである。



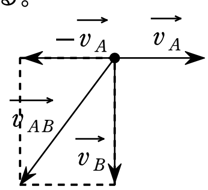
「動いている物体を基準にすると、周りの物体は逆に動いているように見える。」

図のようにA～Eの物体がまちまちの速度で動いている場合を考える。このとき、速度基準をAに変える。つまり、Aから見たB～Eの速度を求めてみよう。



Aは右方向に動いているので、周りの景色は反対方向に動いているように見えるはずである。B～Eの物体はその景色の中で各方面に速度を持って動いている。このことから、Aから見た速度は、景色の速度と各物体の速度の和でよいことになる。このようにして求めたB～Eの速度がAから見た速度（相対速度）となっている。

これを式で表すと次のようになる。



物体Aの速度を$\overrightarrow{v_A}$、物体Bの速度を$\overrightarrow{v_B}$物体AからBを見た速度を$\overrightarrow{v_{AB}}$とすると、Aから見た周りの景色の速度は$-\overrightarrow{v_A}$、この景色の中で物体Bが$\overrightarrow{v_B}$の速度で動いている

ので、Aから見たBの速度は$\overrightarrow{v_B}$と$-\overrightarrow{v_A}$の和となる。よって、

$$\overrightarrow{v_{AB}}=\overrightarrow{v_B}+\left(-\overrightarrow{v_A}\right)=\overrightarrow{v_B}-\overrightarrow{v_A}$$

となる。

「AからBを見た相対速度（速度基準を地上からAに変更する）は

$$\overrightarrow{v_{AB}}=\overrightarrow{v_B}-\overrightarrow{v_A}$$

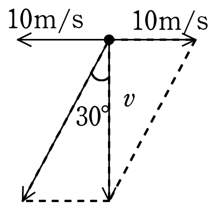
となる。」

分かりやすく言えば、<u>相手の速度に景色の速度を足せばよい</u>ということである。

＜例題＞

風のない日、雨が降っていた。ある自動車が10m/sで走っている時、鉛直方向から30°前方より雨粒が落ちてきた。雨粒の落下速度を計算せよ。

＜解説＞



自動車の速度が前方10m/sの時、
景色の速度は後ろ向き10m/sである。
景色の中で雨が30°の角度で降っているので
景色の速度と雨の速度の合成が、相対速度である。
図より、$v=10\sqrt{3}$ m/s

＜ベクトルによる計算＞

自動車の速度　$\vec{v}=\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}$　　雨の速度　$\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\-v\end{pmatrix}$　真下に振っている

景色の速度　$-\vec{v}=\begin{pmatrix}-10\\0\end{pmatrix}$　相対速度　$\vec{V}=\vec{a}+(-\vec{v})=\begin{pmatrix}0\\-v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-10\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\-v\end{pmatrix}$

30度方向なので，　$\dfrac{10}{v}=\tan 30^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　$v=10\sqrt{3}$ m/s

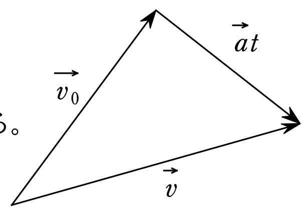
４．加速度ベクトル

(1)　加速度ベクトルの定義

速度と同じように加速度もベクトルで表現することができる。加速度ベクトルとはどのようなものか加速度の定義に戻って考えてみよう。

加速度とは単位時間の速度変化である。そのため速度の変化は加速度に時間をかければよい。よって、加速度$\vec{a}$でt秒間加速したときの速度変化は$\vec{a}t$となる。

最初速度$\overrightarrow{v_0}$を持っていた物体が$\vec{a}t$だけ速度が変化した後の



速度$\vec{v}$は右図のように

$$\vec{v}=\overrightarrow{v_0}+\vec{a}t$$

であらわされる。これが加速度のベクトル表示である。
この式を変形すると、

$$\vec{a}=\frac{\vec{v}-\overrightarrow{v_0}}{t}$$

これがベクトルで表現した加速度の定義である。

⑵　変位ベクトル

　等加速度直線運動の場合，平均の速度$\overline{\vec{v}}$は最初の速度（初速度$\vec{v_0}$）と最後の速度（$\vec{v}$）との平均である。

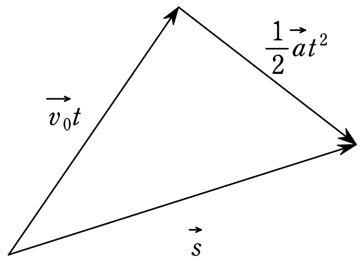
$$\overline{\vec{v}}=\frac{\vec{v_0}+\vec{v}}{2}=\frac{\vec{v_0}+\vec{v_0}+\vec{a}t}{2}=\vec{v_0}+\frac{1}{2}\vec{a}t$$

となる。変位ベクトル$\vec{s}$は平均速度$\overline{\vec{v}}$と時間tの積であらわされる。よって

$$\vec{s}=\overline{\vec{v}}\,t=\vec{v_0}t+\frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

これが変位ベクトルを求める式である。

この式を図で表すと、右図のようになる。



「ベクトルであらわした加速度の式は

$$\begin{cases}\vec{v}=\vec{v_0}+\vec{a}t\\ \vec{s}=\vec{v_0}t+\frac{1}{2}\vec{a}t^2\end{cases}$$

　　である。」

⑶　加速度第三公式

　等加速度直線運動では第三公式$v^2-v_0{}^2=2as$がある。ベクトルの場合はこの公式はどうなるのであろうか。

　右辺のasをそのままベクトル化すると、ベクトルどうしの積の形になる。数学で習う内積を使えばこの式をベクトル化することは可能である。ここでは内積を利用してベクトルの式を求めてみよう。

$$\vec{s}=\vec{v_0}t+\frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

の両辺に$\vec{a}$をかける（内積をとる）

$$\vec{a}\cdot\vec{s}=\vec{v_0}\cdot\vec{a}t+\frac{1}{2}|\vec{a}|^2t^2$$

$\vec{v}=\vec{v_0}+\vec{a}t$より、$\vec{a}t=\vec{v}-\vec{v_0}$　　これを代入して、

$$\vec{a}\cdot\vec{s}=\vec{v_0}\cdot(\vec{v}-\vec{v_0})+\frac{1}{2}|\vec{v}-\vec{v_0}|^2=\frac{|\vec{v}|^2-|\vec{v_0}|^2}{2}$$

$$|\vec{v}|^2-|\vec{v_0}|^2=2\vec{a}\cdot\vec{s}$$

となる。この式は使って使えないことはないが内積はスカラーなので、成分表示しても方程式はひとつしか成立しない。よって、この式を使うよりは、前の2式を連立した方がよい。

５． 水平投射

ある高さの台上からボールを水平に投げた。このときの運動を水平投射という。水平投射の運動状況について考えてみよう。

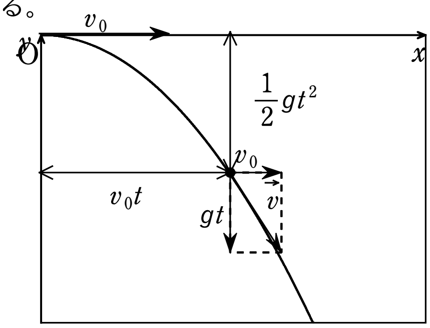
水平に初速度v_0でボールを投げた場合の物体の運動を調べよう。水平方向をx軸、鉛直上向きをy軸とする。

(1) 平均速度による計算

物体をそのまま落下させると，真下に落下していく。水平方向には全く動かない。これは，水平方向は速度が変化しないことを意味している。

「速度の水平成分は常に一定である。」

鉛直方向のみ重力加速度によって速くなっているのである。

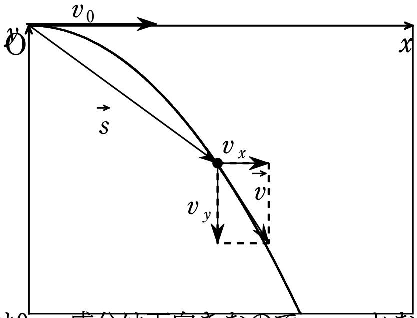


今，水平方向に初速度v_0で物体を投げる場合を考える。水平方向の速度は変わらないので，時刻tにおける水平方向の速度はv_0である。移動距離はv_0tである。

一方，鉛直方向は，初速度0で，加速度g（1sにgずつ速くなる）なので，時刻tの速度はgtとなる。平均速度は$\frac{0+gt}{2}=\frac{1}{2}gt$なので，時刻$t$における落下距離は$\frac{1}{2}gt^2$となる。

(2) 成分による計算

まず、各ベクトルを成分表示してみると、



- 初速度ベクトル

水平方向に初速度を持つのでy成分は0で、x成分は初速度の大きさをなる。

$$\vec{v_0}=\begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 加速度ベクトル

下向きに加速度の大きさgであるので、x成分は0、y成分は下向きなので、$-g$となる。

$$\vec{a}=\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

- 速度ベクトル

t秒後の速度のx成分、y成分ともに未知数なので、x成分をv_x、y成分をv_yとすると、

$$\vec{v}=\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

- 変位ベクトル

原点からt秒後の位置に向かうベクトルが変位ベクトルである。投げた位置を原点とし、

平面運動

t秒後の位置座標を(x,y)とすると、始点が原点であるからこの変位ベクトルは位置ベクトルでもある。

$$\vec{s}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ベクトル公式は、

$$\begin{cases} \vec{v}=\vec{v_0}+\vec{a}t \\ \vec{s}=\vec{v_0}t+\dfrac{1}{2}\vec{a}t^2 \end{cases}$$

これに代入すると、

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}t=\begin{pmatrix} v_0 \\ -gt \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}t+\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}t^2=\begin{pmatrix} v_0 t \\ -\dfrac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

このベクトルをx成分のみ、y成分のみでの方程式に直すと、

x成分の方程式

$$\begin{cases} v_x=v_0 \\ x=v_0 t \end{cases}$$

第一式はx成分に関して速度v_xが初速度v_0のまま一定であることを意味しており、第二式も等速直線運動の式である。このことから、水平投射において、水平方向成分は等速直線運動であることが分かる。

「水平成分は等速直線運動である。」

y成分の方程式は

$$\begin{cases} v_y=-gt \\ y=-\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

この式は初速度0での落下、すなわち自由落下の式と同じである。このことから、鉛直成分は自由落下と同じといえる。

「水平投射において鉛直成分は自由落下と同じである。」

x成分の第二式より$t=\dfrac{x}{v_0}$、この式をy成分第二式に代入して、

$$y=-\frac{g}{2{v_0}^2}x^2$$

となる。この関数は投げた位置を頂点とする上に凸の二次関数（放物線）といえる。

「水平投射した物体は投射点を頂点とする放物線を描く」

となる。まとめると次のようになる。

t秒後の速度は　$\vec{v}=\begin{pmatrix} v_0 \\ -gt \end{pmatrix}$　速さは$\sqrt{{v_0}^2+g^2t^2}$

平面運動

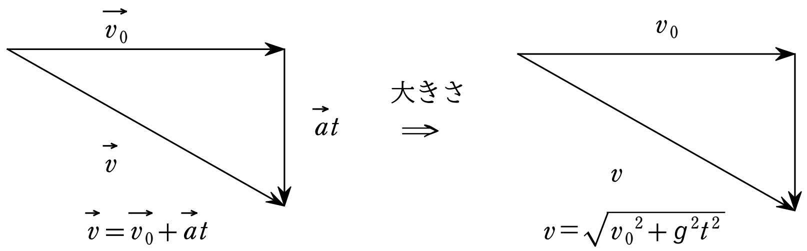
t秒後の変位（位置）は　$\vec{s}=\begin{pmatrix} v_0t \\ -\dfrac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$　である。

(3)　作図による計算

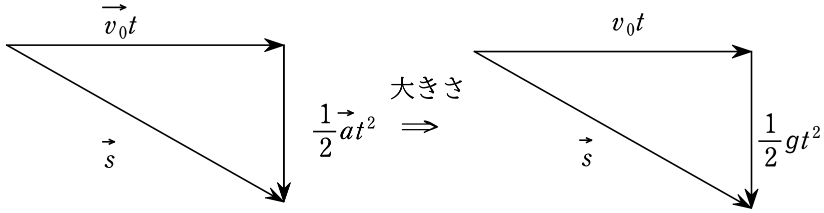
$$\begin{cases} \vec{v}=\vec{v_0}+\vec{a}t \\ \vec{s}=\vec{v_0}t+\dfrac{1}{2}\vec{a}t^2 \end{cases}$$

を作図によって計算することもできる。ここで、ベクトルの大きさは$|\vec{v_0}|=v_0$、$|\vec{a}|=g$である。方向は$\vec{v_0}$は水平方向、$\vec{a}$は鉛直下向きである。作図すると、

$\vec{v}=\vec{v_0}+\vec{a}t$

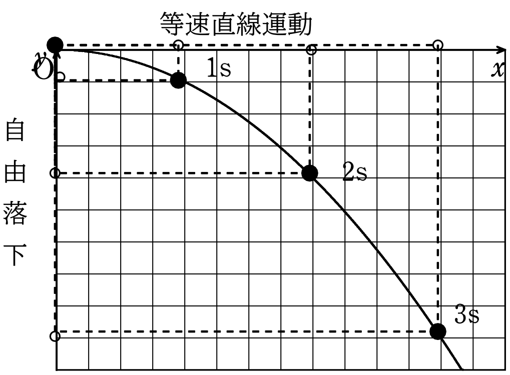


$\vec{s}=\vec{v_0}t+\dfrac{1}{2}\vec{a}t^2$



(4)　水平投射における運動状態

右図の黒点はは水平投射における物体の位置を1秒ごとにあらわしたものである。この位置を水平方向のみであらわしたのがグラフ上部の白点である。この白点は等間隔に並んでいる。このことから、水平方向は等速直線運動になっていることが分かる。

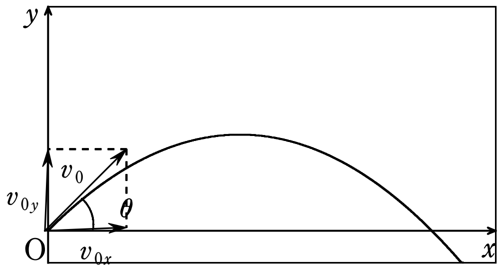


また、鉛直方向の運動状態はグラフの左端の白点である。この位置は0,1,4,9目盛りと二次関数的に増加している。これは、$y=\dfrac{1}{2}gt^2$を意味し、自由落下であることを示している。よって、水平投射における鉛直運動は自由落下となる。

６． 斜方投射

(1) 斜方投射とは

物体を水平方向よりある角度で投げる運動を斜方投射という。斜方投射の場合物体はどのような運動をするのであろうか。
平均速度を利用して考えてみよう。



① 初速度の分解

平面上の運動は水平方向と鉛直方向で運動状態が違うので初速度ベクトルの分解が必要である。

水平成分 $v_{0x}=v_0\cos\theta$ 鉛直成分 $v_{0y}=v_0\sin\theta$

② 最高点に達する時間

鉛直方向の速度は$v_0\sin\theta$である。加速度が下向きgなので，1秒ごとにgずつ遅くなっていき，0になったときに最高点である。よって，最高点に達するのは時刻

$$\frac{v_0\sin\theta}{g}$$

となる。

上昇時間と下降時間は同じなので,落下する時刻は2倍して

$$\frac{2v_0\sin\theta}{g}$$

となる。

③ 水平到達距離

水平方向には一定の速さ$v_0\cos\theta$で，時間$\dfrac{2v_0\sin\theta}{g}$だけ移動するので,，距離$L$はこの両者をかければよい。

$$L=v_0\cos\theta\times\frac{2v_0\sin\theta}{g}=\frac{2{v_0}^2\sin\theta\cos\theta}{g}=\frac{{v_0}^2\sin 2\theta}{g}$$

④ 最高点の高さ

鉛直方向の初速度は$v_0\sin\theta$で最高点での鉛直方向の速度は0なので，平均速度は

$$\frac{1}{2}v_0\sin\theta$$

である。最高点に達するまでの時間は$\dfrac{v_0\sin\theta}{g}$なので，最高点の高さHは,

$$H=\frac{1}{2}v_0\sin\theta\times\frac{v_0\sin\theta}{g}=\frac{{v_0}^2\sin^2\theta}{2g}$$

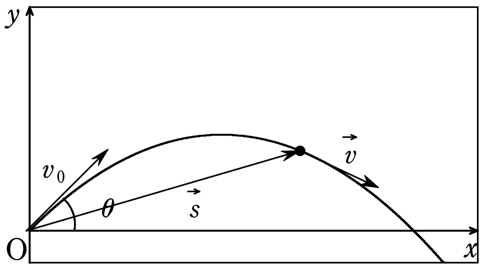
となる。

(2) ベクトルで考えてとどうなるか。

水平方向より角度θ上方に初速度の大きさ

平面運動

v_0でボールを投げた場合を考える。



- 初速度ベクトル

　角度θの方向に大きさv_0であるので、

成分表示すると、

$$\vec{v_0}=\begin{pmatrix} v_0\cos\theta \\ v_0\sin\theta \end{pmatrix}$$

- 速度ベクトル

　大きさ方向ともに不明なので、x成分をv_x、y成分をv_yとすると、

$$\vec{v}=\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

- 加速度ベクトル

　水平投射と同じで、鉛直下向きに大きさgの加速度である。

$$\vec{a}=\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

- 変位ベクトル

　投射点を原点とすると、終点の座標が変位ベクトルとなる。よって、位置座標（x,y）の変位ベクトルは

$$\vec{s}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

これを公式 $\begin{cases} \vec{v}=\vec{v_0}+\vec{a}t \\ \vec{s}=\vec{v_0}t+\dfrac{1}{2}\vec{a}t^2 \end{cases}$ に代入すると、

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_0\cos\theta \\ v_0\sin\theta \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}t \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_0\cos\theta \\ v_0\sin\theta \end{pmatrix}t+\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}t^2 \end{cases}$$

　これをx、y各成分の方程式に直して、

　x成分

$$\begin{cases} v_x=v_0\cos\theta \\ x=v_0\cos\theta\cdot t \end{cases}$$

　y成分

$$\begin{cases} v_y=v_0\sin\theta-gt \\ y=v_0\sin\theta\cdot t-\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

x成分の第一式より、水平投射と同じく水平方向成分は等速直線運動であることが分かる。

「水平方向は等速直線運動である。」

y成分の2式は鉛直投げ上げ運動の式と同じである。よって、

「鉛直方向は鉛直投げ上げ運動である」

といえる。

x成分の第二式より、$t=\dfrac{x}{v_0\cos\theta}$

この式をy成分第二式に代入して

$$y=v_0\sin\theta\cdot\frac{x}{v_0\cos\theta}-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)^2$$

$$=\tan\theta\cdot x-\frac{x^2}{2{v_0}^2\cos^2\theta}$$

この式は原点を通る上に凸の放物線である。

「斜方投射は原点を通る上に凸の放物線運動をする。」

(3) 何度の角度に投げれば最も遠くに投げられるか

水平到達距離

$$L=\frac{2{v_0}^2\sin\theta\cos\theta}{g}$$

の最大値を求めればよい。

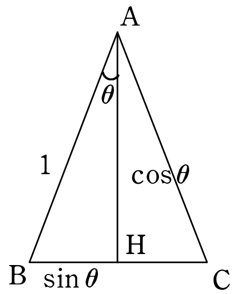
数学の2倍角の公式　$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ を用いると、

$$x=\frac{{v_0}^2\sin^2 2\theta}{g}$$

となる。これが水平到達距離（落下点までの距離）である。この距離を最大にするのは、$\theta=45°$のとき、$\sin 2\theta$ が最大値となるので最も遠くに投げられる距離となる。

＜2倍角の公式の証明＞

数学の2倍角の公式　$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$　の証明



頂角$\angle$A＝2θ、AB＝BC＝1の二等辺三角形ABCを考える。

この三角形のAより垂線を底辺に引きその足をHとする。

このとき、

AH＝$\cos\theta$

BH＝$\sin\theta$

が成り立つ

三角形の面積Sは$S=\dfrac{1}{2}\times\mathrm{BC}\times\mathrm{AH}=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{2}=\sin\theta\cos\theta$　…①

また、三角比の面積公式より

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin A=\frac{1}{2}\sin 2\theta \quad \cdots②$$

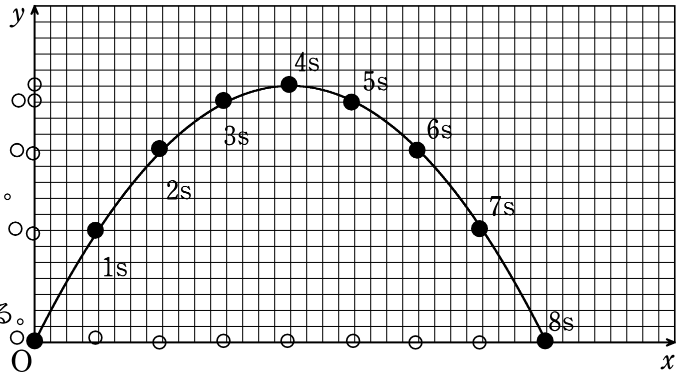
①②より、$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

＜証明終了＞

(4)　斜方投射における物体の運動状態

右図は斜方投射された物体の運動の様子を1sごとの位置で示したものである。4s後に最高点に達し、8秒後に落下している。

グラフ下の白点は物体の水平位置を示しているがこれは、等間隔に並んでいる。これは、水平方向が



水平投射同様に等速直線運動になっていることを意味している。

また、鉛直方向は左端に白点で表示しているが、最上点を0とすると、1,4,9,16目盛り下の位置に白点があり、これは、二次関数であり、鉛直投射を意味している。よって、斜方投射においては水平方向が等速直線運動で、鉛直方向が鉛直投射になっていることがいえる。

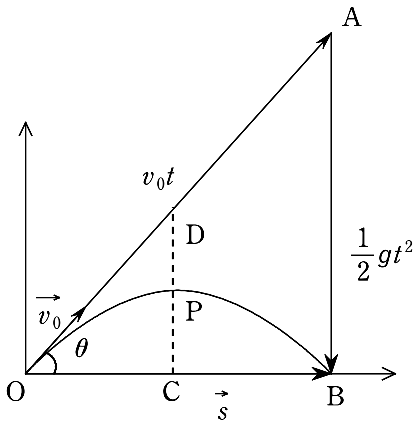
これにより、一般的斜方投射の計算方法は鉛直投射で時間を計算し、その時間を用いて水平方向等の位置を計算するとよいことになる。

７．　ベクトルの作図による斜方投射

ベクトルの作図で物体の運動を計算することもできる。

$\vec{s}=\vec{v_0}t+\dfrac{1}{2}\vec{a}t^2$

において、$\vec{v_0}t$は右図のOAにあたりその大きさはv_0tである。また、$\dfrac{1}{2}\vec{a}t^2$はABに相当しその大きさは$\dfrac{1}{2}gt^2$である。



また、変位ベクトル$\vec{s}$はOBでその大きさはxで未知数である。

ここで、△ABOを考えることにより、

$$\sin\theta=\frac{\frac{1}{2}gt^2}{v_0t}=\frac{g}{2v_0}t$$

よって、　$t=\dfrac{2v_0\sin\theta}{g}$

となる。

また、　$x=v_0t\cos\theta=\dfrac{2{v_0}^2\sin\theta\cos\theta}{g}$

となる。

点CはOBの中点であるため、$\mathrm{CD}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}$である。また、点Pを通過する時間は点Bを通

過する時間の$\frac{1}{2}$であるから、$DP=\frac{1}{2}g\left(\frac{t}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{4}AB$。これより、PはCDの中点

であることが分かる。これを用いると、$PC=\frac{1}{4}AB$となるので、最高点の高さhは

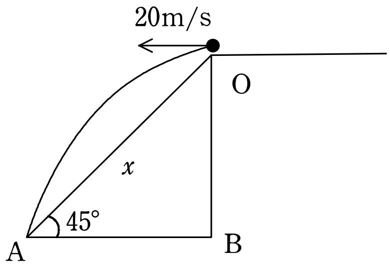
$$h=\frac{1}{4}AB=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}gt^2=\frac{{v_0}^2\sin^2\theta}{2g}$$

このように図形の特徴を利用して簡単に求めることもできる。

８． 例題

＜例題1＞水平投射

角度45°の斜面がある。その斜面の上端Oから水平方向に20m/sでボールを投げたところ、t秒後に斜面上x[m]下方のA点に落下した。
重力加速度の大きさを10m/s^{2}としてOA間の距離を求めよ。



＜解答＞

加速度三公式は

$$v=v_0+at \quad x=v_0t+\frac{1}{2}at^2 \qquad v^2-{v_0}^2=2ax$$

である。文字は全部で5種類，各公式で文字は4文字使われている。平面運動の場合は鉛直方向と水平方向で表にまとめて考えると良い。

水平方向には加速しないので加速度は0，水平方向初速度は20m/s，落下するまでの時間は分からないので未知数t，水平方向の変位は$x\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}x$

鉛直方向は下向きを正として考える。加速度は重力加速度10m/s^2，初速度は水平方向に投げているので鉛直方向は0，落下時間は水平方向と同じt，鉛直方向の変位は

$x\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}x$となる。

これをまとめたのが下の表である。

	a	v_0	v	t	x
水平方向	0	20		t	$\frac{\sqrt{2}}{2}x$
鉛直方向	10	0		t	$\frac{\sqrt{2}}{2}x$

この表にはvに値が入っていない。vは不要ということである。加速度三公式の中でvがないものは$x=v_0t+\frac{1}{2}at^2$なので，この公式に水平方向鉛直方向とも代入すると，

水平方向 $\frac{\sqrt{2}}{2}x=20t$ 　　鉛直方向 $\frac{\sqrt{2}}{2}x=\frac{1}{2}\cdot 10t^2$

この連立方程式を解くと $x=80\sqrt{2}\,\mathrm{m}=113\mathrm{m}$，$t=4\mathrm{s}$ となる。

＜別解＞

斜面が45°なので，AB＝BOである。水平方向の移動距離と鉛直方向の移動距離が等しくなればよい。

その時間をtとすると，水平方向の移動距離は$20t$[m]

鉛直方向のt[s]後の速度は$10t$なので，平均速度は$5t$，よって，移動距離は$5t^2$

両者が等しくなる時が斜面に接地した瞬間である。

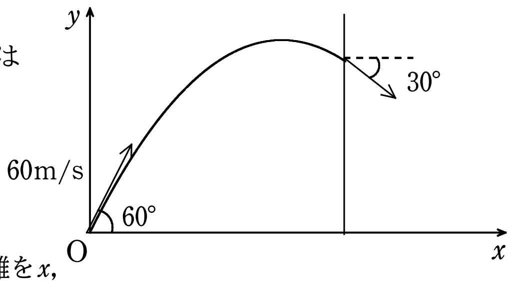
$5t^2=20t$　　より，$t=4$s

と求められる。

＜例題２＞

初速度60m/s、角度60°で前方の壁に向かって、ボールを投げつけたところボールは壁に水平より30°の角度で衝突した。

重力加速度の大きさを10m/s²として壁までの距離を求めよ。



＜解答＞

壁にぶつかった位置の高さをh，水平距離をx，速さをvとする。

•水平方向　加速度は0，初速度は$60\cos 60°=30$m/s，衝突時の速度水平成分は

$v\cos 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}v$　衝突までの時間をt，衝突位置までの水平距離をxとする。

•鉛直方向　上向きを正とする。加速度は-10m/s²，初速度は$60\sin 60°=30\sqrt{3}$ m/s

衝突時速度の鉛直成分は$-v\sin 30°=-\dfrac{1}{2}v$，衝突位置の変位は$h$となる。

これをまとめると。

	a	v_0	v	t	x
水平方向	0	30	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}v$	t	x
鉛直方向	-10	$30\sqrt{3}$	$-\dfrac{1}{2}v$	t	h

未知数が4つあるので方程式が4つ必要である。水平方向，鉛直方向共に第一，第二公式を使うことにする。

水平方向　　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}v=30$　　　$x=30t$

鉛直方向　　$-\dfrac{1}{2}v=30\sqrt{3}-10t$　　$h=30\sqrt{3}\,t-\dfrac{1}{2}\cdot 10t^2$

方程式が4つあるので，この連立方程式は解ける。これら方程式を解くと

$v=20\sqrt{3}=35$m/s，$h=120$m，$x=120\sqrt{3}=208$m，$t=4\sqrt{3}=6.9$s

＜別解＞

当然ながら，平均速度で解くこともできる。

壁にぶつかった瞬間の水平方向の速度成分は一定なので30m/s。

角度が30°となるので，鉛直方向の速度はその$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$となるので，$-\dfrac{30}{\sqrt{3}}=-10\sqrt{3}$ m/s。

鉛直方向の初速度は$30\sqrt{3}$ m/sであり，1秒ごとに10m/sずつ小さくなるので，衝突までの時間は,

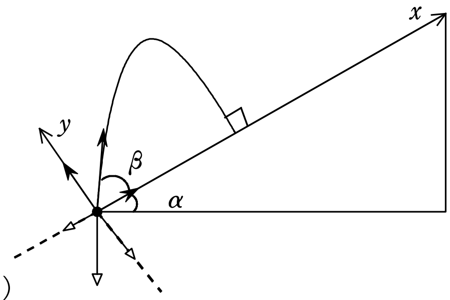
$$\frac{30\sqrt{3}-(-10\sqrt{3})}{10}=4\sqrt{3}\text{ s}$$

となる。よって，水平方向の距離xは

$x=30\times4\sqrt{3}=120\sqrt{3}$ m/sとなる。

＜例題3＞

角度αの斜面上方に向かって初速度v_0である角度βの方向にボールを投げると,斜面に垂直に落下した。このときα，βの間に成り立つ関係式を求めよ。重力加速度の大きさをgとする。



＜解答＞

軸を水平方向と鉛直方向ではなく斜面方向xとその直角方向yに取る。（水平方向にとっても良い）

・ x方向

加速度は重力加速度のx方向成分である。y軸と鉛直線との角度はαなので，加速度のx成分は，$-g\sin\alpha$。初速度x成分は$v_0\cos\beta$，落下時のx方向速度は0，落下するまでの時間をt，変位をxとする。

・ y方向

加速度は重力加速度のy方向成分である。$-g\cos\alpha$，初速度のy成分は$v_0\sin\beta$，落下時の速度不要，落下時のy方向の変位は0である。

これをまとめると下の表のようになる。未知数3つなので3つ方程式ができればよい。x方向はすべての欄が埋まっているので，第一，第二公式，y方向はv欄が空欄なので,vのない第二公式が使える。

	a	v_0	v	t	x
x	$-g\sin\alpha$	$v_0\cos\beta$	0	t	x
y	$-g\cos\alpha$	$v_0\sin\beta$		t	0

x方向　$0=v_0\cos\beta-gt\sin\alpha$　　$x=v_0t\cos\beta-\dfrac{1}{2}gt^2\sin\alpha$

y方向　$0=v_0t\sin\beta-\dfrac{1}{2}gt^2\cos\alpha$

$0=v_0\cos\beta-gt\sin\alpha$より，$t=\dfrac{v_0}{g}\dfrac{\cos\beta}{\sin\alpha}$

$0=v_0 t\sin\beta-\frac{1}{2}gt^2\cos\alpha$ に代入して

$0=v_0\sin\beta-\frac{1}{2}g\cos\alpha\frac{v_0}{g}\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$

$\frac{1}{2}\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha}=\sin\beta$　　よって，　$\tan\alpha\tan\beta=\frac{1}{2}$

＜別解＞

加速度のx成分は，$-g\sin\alpha$，初速度x成分は$v_0\cos\beta$，落下時のx方向速度は0なので，物体の飛行時間は　速度変化を加速度で割って　$t=\frac{v_0}{g}\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$

重力加速度のy方向成分は$-g\cos\alpha$，初速度のy成分は$v_0\sin\beta$であり，y方向の変位が0なので，平均速度が0である。時間$\frac{v_0}{g}\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$後の速度は$v_0\sin\beta-g\cos\alpha\frac{v_0}{g}\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$なので，平均速度は初速度と足して2で割って，$v_0\sin\beta-\frac{1}{2}g\cos\alpha\frac{v_0}{g}\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}=0$

が成り立つ。よって，$\tan\alpha\tan\beta=\frac{1}{2}$