平面ベクトル

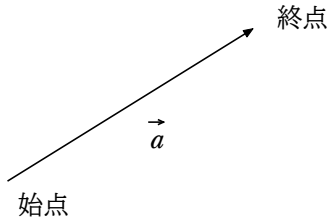
１．平面上の運動

物体は直線上だけでなく平面上を運動することがある。平面上の運動はどのように考えればよいのであろうか。わかりやすい変位ベクトルから考えてみることにする。

⑴　ベクトルの表し方

平面上の運動を表現するためには、各物理量の大きさだけでなくその方向も重要な要素となる。直線上の運動の場合その方向を符号で表すことができたが、平面上の運動ではそうはいかない。そこで、平面上の運動においてはベクトルで表すことになる。

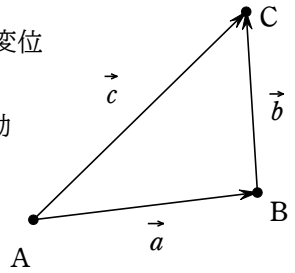
ベクトルを図で表すときは、右図のように矢印で表す。
矢印の最初の点を始点といい、先端を終点という。
矢印の向いている方向がベクトルの方向で、
矢印の長さがベクトルの大きさとなる。
ベクトルを文字で表すときは、スカラーと区別するため、文字の上に矢印をつけて$\vec{a}$というように表す。



ベクトルの大きさは数学における絶対値記号｜｜を用いて、$|\vec{a}|$というように表す。

⑵　変位ベクトル

A点からC点へ移動するとき，その位置の変化を変位と呼んでいる。変位は最初と最後の位置変化のみを表すので，A点から途中でB点を中継してC点に移動しても，A点から直接C点に移動しても同じ変位である。今，AからBに向かうベクトルを$\vec{a}$，BからCへ向かうベクトルを$\vec{b}$，AからCへ向かうベクトルを$\vec{c}$とする。



AからBを経由してCへ向かうということは$\vec{a}$を実行してから$\vec{b}$を実行することになり，これを，$\vec{a}+\vec{b}$と表すことにする。これと，AからCに向かうことは同じなので

$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$

と表すことができる。

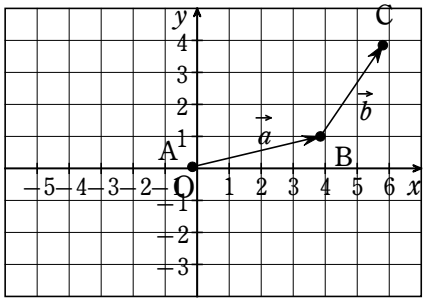
⑶　平面上のベクトルの表し方１

・このベクトルの表示を座標平面を用いて数字で表してみよう。

Aを原点，Bを座標(4,1)，Cを座標(6,4)とする。変位ベクトル$\vec{a}$はx方向に4，y方向に1進むベクトルなので，このベクトルを

$\vec{a}=(4,1)$

と表すことにする。



$\vec{b}$はx方向に2，y方向に3進むベクトルなので，　$\vec{b}=(2,3)$　と表すことができる。

同様にすると，$\vec{c}=(6,4)$　となる。これをベクトルの成分表示という。左側をx成分，右側

をy成分と呼ぶ。

成分表示は(2,3)のように書いてもよいが，$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$のように書いてもよい。前者を行ベクトル，後者を列ベクトルと呼んでいる。一般に列ベクトルの方がわかりやすいが，数学では行ベクトルを用いているので，それに従ってもよい。

(4)　ベクトルの和

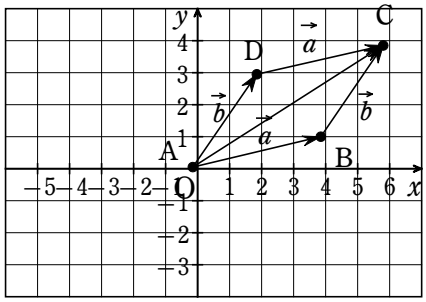
$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$　は成分表示で　$\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$　と表現でき，x成分はx成分同士，y成分はy成分同士計算すればよいことがわかる。

$$\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+2\\1+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$$

一般的には次のようになる。

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}$$

これがベクトルの和である。

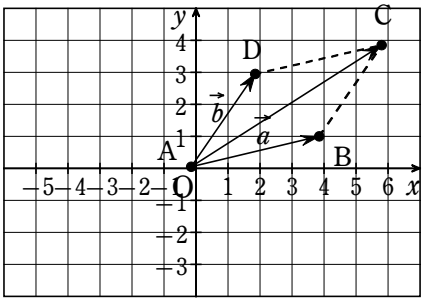


次に変位の順番を変えてみる。先に$\vec{b}$を実行してDに至り，次に$\vec{a}$を実行すると，図のように同じ点Cに至る。ベクトルの和は交換法則が成立しているといえる。

ここまではベクトルを継ぎ足して行くことによってベクトルの和を求めているが，実際は次のように行う。

$\vec{a}$と$\vec{b}$の始点をAに揃える。AB，ADを辺とする平行四辺形を書き，Aと対角線上の点をCとし，AとCを結ぶベクトル$\vec{c}$を書くという方法である。

どちらでもよいが多くのベクトルは始点が揃っていることが多く，平行四辺形でベクトルの和を求めることが多い。



(5)　ベクトルの実数積

$2\vec{a}$のようにベクトルに実数を掛ける場合どのようになるのであろうか。数字と同じように扱うと，

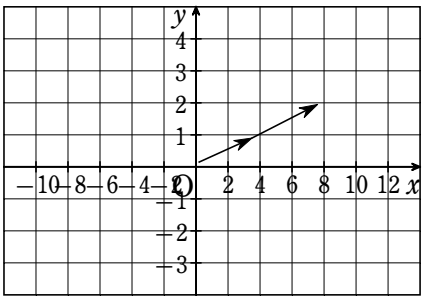
$$2\vec{a}=\vec{a}+\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+4\\1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\times2\\1\times2\end{pmatrix}$$

$$=2\times\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$$

また，

$$2\vec{a}=2\times\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\times2\\1\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$$

と両者は同じとなり，実数値をそれぞれの成分



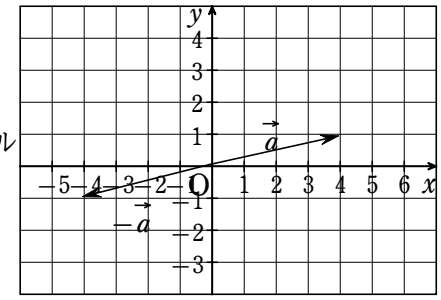
に分配して掛ければよいことがわかる。

ベクトルを継ぎ足して行けば，$2\vec{a}$は$\vec{a}$と方向が同じで，長さだけが2倍になったベクトルである。よって，ベクトルの実数積は長さだけを実数倍する計算であることになる。

ベクトルに負の数を掛けるとどうなるか。

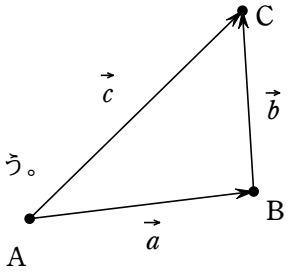
$$-\vec{a}=-\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$$

座標平面上に成分を書くと，向きが逆のベクトルであることがわかる。$-\vec{a}$は$\vec{a}$に対して逆向きのベクトルである。

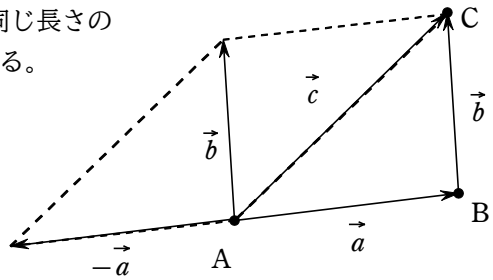


⑹　ベクトルの差

数字と同じように計算すれば　$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$　は$\vec{b}=\vec{c}-\vec{a}$となる。図に書くと$\vec{a}$の終点から$\vec{c}$の終点につないだベクトルとなるがこれはわかりにくいので，$\vec{b}=\vec{c}+(-\vec{a})$と考えた方がよいであろう。

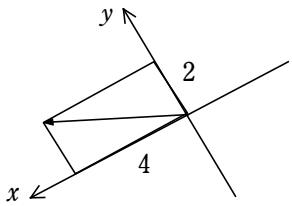


$\vec{a}$を逆向きにして$\vec{c}$と足し算するとBCと同じ方向同じ長さのベクトルが書ける。



⑺　ベクトルの成分

右のような座標軸をとった場合、左下方面にx軸、左上方面にy軸となる。ベクトルの終点から軸に垂線を下ろし、その足と原点との距離でx成分、y成分を表す。この場合は（4,2）である。



・　角度と大きさを用いた表現方法

我々が生活上でベクトルを表現するときは、東へ20m行って次に北へ40mなどという表現すなわち成分表示をすることはまずない。実際は北西の方向に40mとか、水平方向に対し30°の方向に50mとかいった表現をすることが多い。このように大きさと方向を示す角度でベクトルを表してもよい。

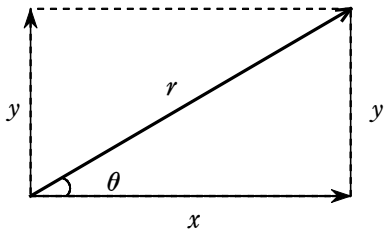
・　成分表示と方向角での表現方法の変換

ベクトルの表現方法が二つ存在するので、その表現方法の間での自由な変換ができるようにしておかなければならない。

①　角度と大きさ→成分表示

平面ベクトル

図のように大きさをr、水平からの方向角をθとしたときの水平成分（x成分）と、鉛直成分（y成分）を求めてみよう。数学の三角比を用いると、



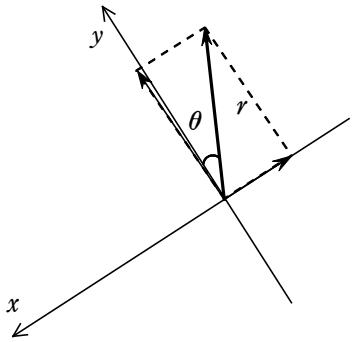
$$\sin\theta=\frac{y}{r}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}$$

この両式から次の式が導かれる。

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

これが、ベクトルの表示方法を変換する式である。

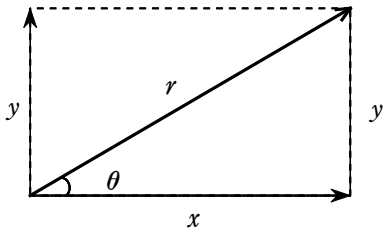


この場合は角度θがx軸からの角度になっているが、y軸から角度を測っている場合もあれば、負の方向のベクトルもありうる。その場その場で状況をよく考えて成分の変換をしなければならない。

この場合、x成分は$r\sin\theta$となるが、x軸負の方向を向いているので、$-r\sin\theta$が正しい。同じようにして、y成分は$r\cos\theta$となる。よって、（$-r\sin\theta$、$r\cos\theta$）が成分表示である。

② 成分表示→角度と大きさ

ベクトルの大きさrは三平方の定理ともとめられ、$r=\sqrt{x^2+y^2}$となる。角度のほうは大学で習う逆三角関数が必要なので高校段階では一般的には求められない。そこで、$\tan\theta$を求めよというような形で出題されることがある。



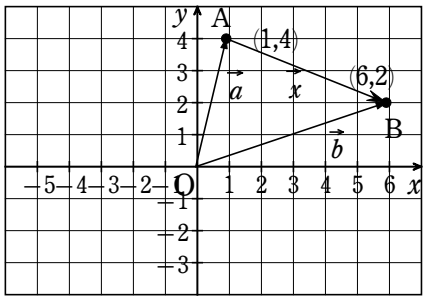
$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

２． 位置ベクトルと変位ベクトル

始点を原点として終点の座標で物体の位置を表すベクトルを位置ベクトルという。位置ベクトルを成分で表すと、

$\vec{a}=(1,4)$　　$\vec{b}=(6,2)$

となる。



ここで、点AからBへ移動する場合の変位ベクトル$\vec{x}$を考えてみよう。AからBに移動するにはx方向に5進み、y方向に-2進めば良い。この変位を表すにも大きさと方向があるので、ベクトルである。これを変位ベクトルという。

x方向に5進み、y方向に-2進むので、$\vec{x}$を成分表示すると、

$$\vec{x}=(5,-2)$$

となる。このように考えると、位置ベクトル$\vec{a}$は原点から点Aまでの変位ベクトルと考えることもできる。