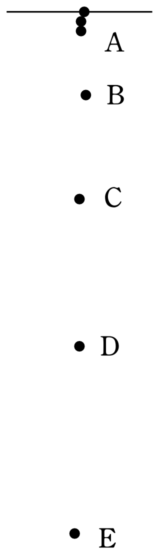
落下運動

1． 重力加速度

　右の図は物体が落下するときの物体の状態をストロボ写真で撮り、その物体の位置を図示したものである。A～Eの各位置を表にあらわすと以下のようになる。ストロボの発光間隔は0.10秒である。



記号	A	B	C	D	E
落下点からの距離(cm)	5.1	19.8	44.3	78.6	122.7

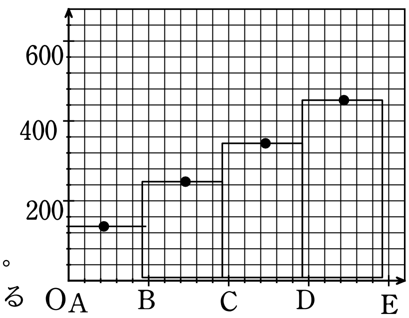
0.1秒ごとの間隔がだんだん広がっていることから、物体は落下するとき、加速していることがわかる。この加速度の大きさを測定してみよう。

AB、BC、CD、DE間は各0.10秒である。各区間の平均の速さを計算すると、下の表のようになる。

区間	AB	BC	CD	DE
時間(s)	0.10	0.10	0.10	0.10
距離(cm)	14.7	24.5	34.3	44.1
平均の速さ(cm/s)	147	245	343	441

これを$v-t$グラフにしてみると、右のようになる。横軸に区間、縦軸に平均の速さをとったものである。

加速度が一定の場合平均の速さは各区間の中点における瞬間の速さと等しくなるので、各区間の中点の速さを黒点で示した。これが瞬間の速さである。

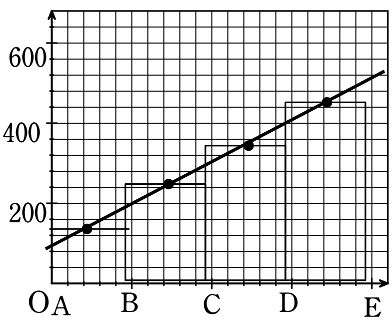


この瞬間の速さがほぼ直線上に並んでいることから、重力による落下運動は等加速度直線運動であることがわかる。

　この黒点を直線でつなぎその傾きを求めれば落下の加速度が求められる。AB間の中点とDE間の中点を用いて傾きを求めてみよう。

この時間は0.30秒である。

よって、



$$a=\frac{441-147}{0.30}=980\mathrm{cm/s^2}$$

となる。

　単位をmになおして、9.8m/s²が物体が落下するときの加速度になる。この加速度を**重力加速度**という。重力加速度の大きさは一般にgという文字で表す。

＜例題＞

物体を落下点から自由落下させ、ストロボ写真を使って0.1秒間隔で落下距離を測定したところ。ある時刻における落下距離が4.8cm、その0.1秒後までの落下距離が17.2cm、更にその0.1秒後までの落下距離が43.8cmであった。これについて以下の問いに答えよ。

落下運動

① 物体が4.8cmから17.2cmまで落下する間（0.1秒間）の平均の速さはいくらか。

② 物体が17.2cmから43.8cmまで落下する間（0.1秒間）の平均の速さはいくらか。

③ 平均の速さは中点（0.05秒後）の瞬間の速さと考えることができる。このことを用いてこの物体の加速度を求めよ。

＜解答＞

① $\dfrac{17.2-4.8}{0.1}=124\text{cm/s}=1.24\text{m/s}$ ② $\dfrac{43.8-17.2}{0.1}=266\text{cm/s}=2.66\text{m/s}$

③ 加速度は1秒間の速度変化である。$\dfrac{2.66-1.24}{0.1}=14.2\text{m/s}^2$

２． 自由落下

自由落下運動とはそのままの状態で落下させたときの運動をいう。重力加速度が一定であるために等加速度直線運動となる。そのままの状態で落下させるために初速度$v_0=0$、加速度の大きさはgということになる。

・ 座標軸の決定

速度加速度ともにベクトルであるから方向が重要となる。自由落下の場合は下向きの運動なので、下向きを正として扱うのが通常である。しかし、他の運動との整合性を考え上向きを正として計算してもよい。注意しなければならないのは、両方が混在して答えの符号が逆になることである。

⑴ 下向きを正とした場合

加速度三公式において$v_0=0$、$a=g$であるから、

$$\begin{cases} v=gt \\ s=\dfrac{1}{2}gt^2 \\ v^2=2gs \end{cases}$$

となる。計算する各物理量がすべて正になり、負になることはないので使いやすい。しかし、鉛直投射等他の運動と混在した計算をする場合、上向きを正にしたり下向きを正にしたり使い分けなければならなくなり、符号のミスを起こしやすい。

⑵ 上向きを正とした場合

加速度三公式において$v_0=0$、$a=-g$であるから

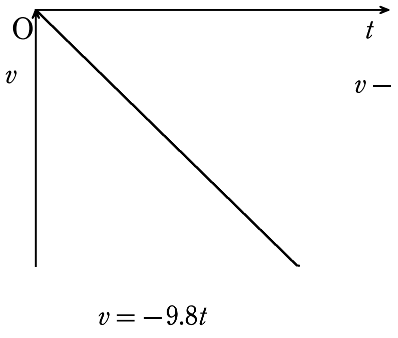
$$\begin{cases} v=-gt \\ s=-\dfrac{1}{2}gt^2 \\ v^2=-2gs \end{cases}$$

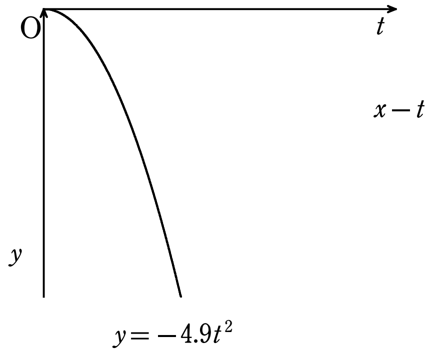
となる。上向きを正とした場合自由落下の各要素はすべて負の値となる。変位sも負である。そのため、符号の解釈が複雑となるが、他の運動と混在した場合、常に下向きが負、上向きが正と答えの符号が統一される利点がある。

落下運動

・　グラフ表示

上向きを正として物体の運動状態を$v-t$グラフ、$x-t$グラフで表してみる。





＜例題＞

ある物体を自由落下させた。重力加速度の大きさを9.8m/s²として以下の問いに答えよ。

①　1秒後の速さを求めよ。

②　最初の1秒間の落下距離はいくらか。

③　19.6m落下するのに何秒かかるか。また、そのときの速さはいくらか

＜解答＞

①　$v=v_0+at=9.8\times1=9.8\mathrm{m/s}$

②　$s=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2=\dfrac{1}{2}\times9.8\times1^2=4.9\mathrm{m}$

③　$s=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$より、$19.6=\dfrac{1}{2}\times9.8\times t^2$　$t=2\mathrm{s}$　よって、2秒後

　$v=v_0+at=9.8\times2=19.6\mathrm{m/s}$

＜別解＞　平均速度を用いる方法

①　加速度の意味は1秒間の速度変化なので,加速度9.8m/s²は1秒間に9.8m/sだけ速くなることを意味している。よって，9.8m/s

②　平均速度は最初と最後を足して2で割ればよいので　4.9m/s。　1秒間の距離なので,

　$4.9\times1=4.9\mathrm{m}$

③　t[s]かかるとすればt[s]後の速度は$9.8t$[m/s]なので，平均速度は$4.9t$[m/s]。

　よって，t秒間の移動距離は　$4.9t^2=19.6$これを解くと，$t=2\mathrm{s}$。

　速度は　$9.8\times2=19.6\mathrm{m/s}$

　となる。

３．鉛直投げ下ろし

　自由落下は物体をそのままの状態から落下させるものであったが、投げ下ろしはある初速度を持って、下方向に投げる運動である。この運動も下向きの等加速度直線運動となる。初速度は下向きにv_0、加速度は下向きにgとなる。

⑴　下向きを正とした場合

　初速度v_0、加速度gを加速度三公式に代入して

$$\begin{cases} v=v_0+gt \\ s=v_0t+\dfrac{1}{2}gt^2 \\ v^2-{v_0}^2=2gs \end{cases}$$

常に下向きが正なので、各物理量は正にしかならない。

(2)　上向きを正とした場合

初速度$-v_0$、加速度$-g$を加速度三公式に代入して

$$\begin{cases} v=-v_0-gt \\ s=-v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2 \\ v^2-{v_0}^2=-2gs \end{cases}$$

上向きを正としているので、各物理量はすべて負の数となる。

ここに挙げた式を公式として使うのではなく、加速度三公式にそれぞれの条件を代入して使うことを勧める。記憶する公式量はできるだけ少なくして、少ない公式を使いこなすほうが応用力がつく。

４．鉛直投げ上げ

(1)　加速度三公式

物体を真上に投げ上げる場合も加速度は重力加速度のみであるから、等加速度直線運動になる。この場合は以前の場合と比べて運動途中で速度の方向が変化するために、計算の結果出てきた物理量の符号が重要な要素となる。下向きを正とすると、あらゆる面で間違いを起こしやすいので、上向きを正とすることを勧める。

鉛直投げ上げ運動では、物体は最初上向きに運動しているが、やがて最高点に達し、そこから先は下向きの運動に変わる。最高点に達する時刻、最高点の高さ、落下してくる時間などが随時計算できるようになっておく必要がある。

この運動も等加速度直線運動であるので、加速度三公式でさまざまな要素を導くことができる。

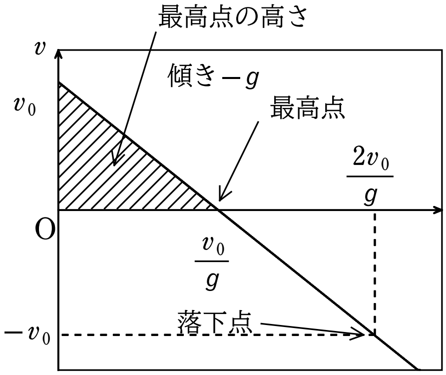
加速度三公式に初速度v_0、加速度$-g$を代入するとよい。

$$\begin{cases} v=v_0-gt \\ s=v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2 \\ v^2-{v_0}^2=-2gs \end{cases}$$

となる。

⑵　$v-t$グラフ

$v-t$グラフでは物体のさまざまな運動状況を読み取ることができる。
ここでは、グラフから読み取ることのできる運動状況をまとめてみることにする。
考え方は負の加速度の場合と同じである。



①　初速度はグラフの切片である。

②　グラフの傾きが重力加速度である。

③　t切片（横軸）が最高点に達する時間である。

$v>0$であれば物体は上昇中であるから、微小時間後はもっと上に上昇しているはずであり、$v<0$であれば、物体は下降中であるので、微小時間前はもっと上にいたことになる。つまり、物体が最高点にいるためには$v>0$でも$v<0$でもないときでなければならない。そのときは、$v=0$以外にはありえない。
そのために、最高点に物体がいる条件は$v=0$なのである。

「最高点⇔$v=0$」

＜最高点に達する時間の計算＞

最高点は$v=0$であるから、$v=v_0-gt$　より、

$0=v_0-gt$　が成り立つ。　よって、　$t=\dfrac{v_0}{g}$

これが最高点に達する時間である。

④　t切片までの三角形の面積が最高点の高さである。

グラフ下の面積が移動距離（変位）をあらわしているので、最高点の高さは上のグラフの斜線部の面積となる。

＜最高点の高さの計算＞

グラフの三角形の面積を求めると、

$$s=\frac{1}{2}\times v_0\times\frac{v_0}{g}=\frac{{v_0}^2}{2g}$$

となる。

＜別解１＞

公式　$s=v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$に　$t=\dfrac{v_0}{g}$　を代入して求めることもできる。

＜別解２＞

変位＝平均速度×時間で解くこともできる。

最高点に達する時間は初速度v_0が0になるまでの時間である。加速度$-g$なので，速度は1秒ごとにgずつ減っていく，最高点に達する時間はv_0より何回gを引くと0になるかであるので,$\dfrac{v_0}{g}$で求められる。

最初がv_0で最後が0なので，平均速度は$\dfrac{0+v_0}{2}=\dfrac{v_0}{2}$である。

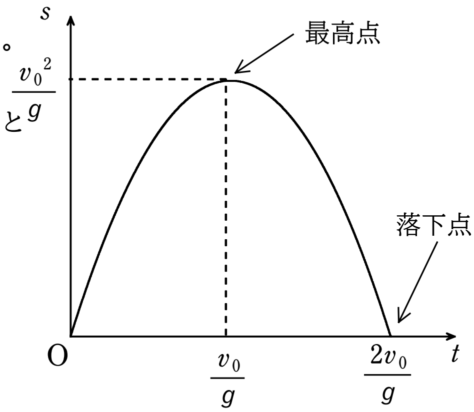
よって，最高点の高さは　$\dfrac{v_0}{2}\times\dfrac{v_0}{g}=\dfrac{{v_0}^2}{2g}$となる。

⑤　t切片までの2倍の時間が落下してくる時刻である。

最高点を超えた場合物体の運動方向が下向きになる。そのために、変位はマイナスである。最高点より後のグラフはt軸より下になっているが、このグラフの上の部分の面積が最高点から降りた距離となる。この面積が斜線部の面積と等しくなるところで、上昇した距離と下降した距離が等しくなるので、落下点ということになる。三角形の合同より、その時間は最高点に達するまでの時間の2倍となる。

⑶　$x-t$グラフ

$x-t$グラフからも多くの要素が読み取れる。今度は$x-t$グラフの読み取り方をまとめてみよう。



①　初速度は$t=0$における接線の傾きである。

接線の傾きはグラフだけではわからない。数学で微分を習えば微分を用いて計算することも可能である。

②　最高点に達する時間、および最高点の高さはグラフの放物線の頂点である。

最高点に達する時間および最高点の高さは二次関数の最高点を求める方法にて計算可能ある。

＜最高点に達する時間および最高点の高さ＞

二次関数を平方完成すると、

$$s=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$=-\frac{1}{2}g\left(t^2-\frac{2v_0}{g}t+\frac{{v_0}^2}{g^2}\right)+\frac{{v_0}^2}{2g}=-\frac{1}{2}g\left(t-\frac{v_0}{g}\right)^2+\frac{{v_0}^2}{2g}$$

これにより頂点の座標は　$\left(\dfrac{v_0}{g},\dfrac{{v_0}^2}{2g}\right)$　となる。

よって、最高点に達する時間は$\dfrac{v_0}{g}$

最高点の高さは　$\dfrac{{v_0}^2}{2g}$

となる。

③　落下点は再び変位sが0となる位置なので、最高点に達する時間の2倍となっている。

④　最高点では$v=0$である。

最高点（放物線の頂点）では、接線の傾きが0となっている。このことから、最高点で

は速度＝0になることがわかる。

＜例題１＞

- 30m/sで真上にボールAを投げると同時に120mの高さのビルからボールBを自由落下させた。何秒後に何mの高さの位置で空中衝突するか。重力加速度の大きさを10m/s^{2}として計算せよ。

＜解答＞

表にまとめると

	a	v_0	v	t	x
A	10	0		t	$120-x$
B	-10	30		t	x

Aは下向きを正とし，Bは上向きを正としている。vが必要ないので,$x=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$を使う。

A　$120-x=\dfrac{1}{2}\times10\times t^2$　B　$x=30t-\dfrac{1}{2}\times10\times t^2$

これを解くと　$t=4\mathrm{s}$，$x=40\mathrm{m}$となる。

＜別解＞

　平均速度を使う方法で直接計算ができない場合は初速度か時間を未知数として方程式を立てるとよい。

　衝突するのをt[s]後とする。t[s]後の速さはA：$10t$　B：$30-10t$

それぞれの平均速度はA：$\dfrac{0+10t}{2}=5t$，B：$\dfrac{30+30-10t}{2}=30-5t$

移動時間はtなので，それぞれの移動距離は

　A：$5t\times t=5t^2$　B：$(30-5t)t$

それぞれの距離を足すと120mとなるので,

　$5t^2+(30-5t)t=120$　　　これを解くとt=4sとなる。

＜例題２＞　40m/sで真上にボールAを投げてから1秒後に140mの高さのビルからボールBをある初速度で投げ下ろしたところ,ボールAが最高点に達した瞬間に空中衝突した。重力加速度の大きさを10m/s^{2}としてボールBの初速度の大きさを計算せよ。

＜解答＞

表にまとめると

	a	v_0	v	t	x
A	-10	40	0	t	x
B	10	v		$t-1$	$140-x$

Bに関しては第二公式　$x=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$　より，　$140-x=v(t-1)+\dfrac{1}{2}\times10\times(t-1)^2$

Aに関しては　第一公式　と　第三公式で求められる。

（第二公式を使うと未知数が二つだが第一公式，第三公式では未知数がひとつである。

$0=40-10t$　および　$0-40^2=2\times(-10)\times x$　より，

$t=4\mathrm{s}$　$x=80\mathrm{m}$　$v=5\mathrm{m/s}$

＜別解＞

40m/sで投げたボールが最高点に達したので，その平均速度は$\dfrac{40+0}{2}=20\mathrm{m/s}$

最高点で速度が0になるので，最高点に達するまでの時間は1秒間に10m/sずつ遅くなるので，　$\dfrac{40}{10}=4.0\mathrm{s}$後　　最高点の高さは　$20\mathrm{m/s}\times4.0\mathrm{s}=80\mathrm{m}$

投げてから4.0s後に80mの高さの位置にボールAがあることになる。

1s後にボールBを投げているので，ボールBの飛んだ時間は3.0sとなる。

3.0秒間に140mの位置から80mの位置まで60m降下している。平均速度は20m/sである。

初速度をv_0とすると3秒後の速度はv_0+30なので，平均速度は

$\dfrac{v_0+v_0+30}{2}=20$　これを解くと$v_0=5.0\mathrm{m/s}$

となる。