物体の運動（速度と加速度）

１． 速さ

(1) 平均の速さと瞬間の速さ

ある自動車が広島市から岡山市までの180kmを走るのに4.0時間かかったとすると、平均の速さは$\frac{180}{4.0}=45\mathrm{km/h}$と表すことができる。実際に自動車は信号で止まったり渋滞でゆっくりと走ったりした時間も含まれている。ここで言う45km/hとは平均の速さであり、各瞬間における本当の速さではない。物体の各時刻における速さは常に変化しているのである。この各時刻における速さを**瞬間の速さ**という。

瞬間の速さはどのようにすれば測定することができるであろうか。速さは基本的に動いた距離をかかった時間で割ればよいのであるが、時間が経過すれば速さが変化するためにその瞬間の速さを求めることができない。速さの測定時間が長ければ、その間の速さが変化してしまうために瞬間の速さを測定することができないのであるが、測定時間を短くすればその間に速さはほとんど変化しない。この場合は瞬間の速さと平均の速さが等しくなっているといえよう。よって、瞬間の速さを測定するには非常に短い時間の移動距離で平均の速さを求めればよいことがわかる。

(2) 速さの単位

生活上、速さの単位はkm/hを使っている。ところが、1時間という時間単位は瞬間というイメージに合わない。そのために、瞬間の速さをあらわすのに、m/sを使う。km/hをm/sに変換することが必要である。

$1\mathrm{km}=1000\mathrm{m}$、$1\mathrm{h}=3600\mathrm{s}$

を用いると、

$$1\mathrm{km/h}=1\frac{1000m}{3600s}=\frac{10}{36}\mathrm{m/s}$$

と変換できる。物理量の単位を変換するときは一般的にこのようにするとよい。

実際は、両辺に36をかけて、

$36\mathrm{km/h}=10\mathrm{m/s}$

となる。この関係を用いればすばやく変換できる。

２． 速さと速度

(1) 方向の重要性

物体がある速さで移動するときは、どの方向に動くかということで結果が大きく異なる。目的地と違う方向にいくら速く動いても、目的地には着かない。つまり、物体の運動は方向も同時に考えないといけないということである。

そこで、速さに方向を合わせて考えることにする。これを**速度**という。同じ速さでもその方向が変われば速度が変化したことになる。

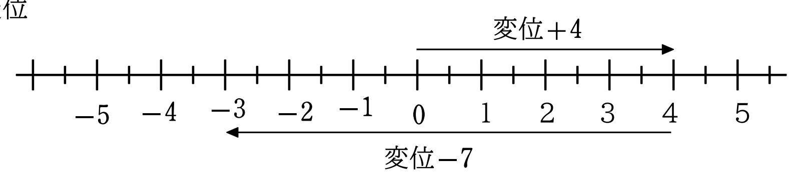
このように物理量には速度のように方向も一緒に考えなければならないものと体積などのように方向は関係なく大きさだけでよいものがある。方向を一緒に考えるものをベクトルといい、大きさだけでよいものをスカラーという。

ベクトルはスカラーと区別するために、記号の上に矢印をつけて、$\vec{x}$のようにあらわす。

⑵　直線上の運動

　通常、物体の運動は上下、左右、前後と３次元空間上で動くためにその方向は空間上の方向となるが、まず、一直線上の運動のみを考えることにする。

・変位



　時刻0において原点0にいた物体が4の位置に動いたとすると、この物体は右向きに4動いたことになる。この場合を変位4という。次にこの物体が−3の位置に動いたとすると、この物体は左に7動いたことになる。この場合は変位−7であるという。

　「変位とは最初と最後の位置の変化をあらわすベクトルである。」

　座標が大きくなる方向に動けば＋の変位で、座標が小さくなる方向に動けば−の変位である。変位も距離と方向で表されるので、ベクトルである。

　一般に座標x_1からx_2に動いた場合の変位xは

　$x = x_2 - x_1$

であらわされる。

・　Uターンした場合の変位

　時刻0において−4の位置にいたA君が４の位置でUターンし0の位置に到着したとする。このときの変位を考えてみよう。変位は「位置の変化」である。A君の位置の変化は−4から0であるので，変位は＋4となる。この場合途中でどのような経路をとろうが一切関係なく,最初と最後の位置の変化だけで変位を考えればよい。

＜例題＞

ある物体が次のように移動した。変位を答えよ。

①　座標0から座標5へ移動　　②　座標2から座標8へ移動

③　座標5から座標−2へ移動

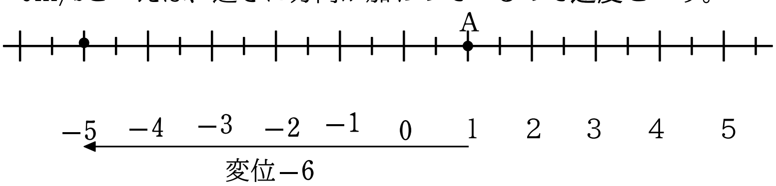
④　座標−3から座標2へ移動しそこでUターンして−5に到着

＜解答＞

①　5−0＝+5　②　8−2＝+6　③　(−2)−5＝−7　④　(−5)−(−3)＝−2

・速度

　速度とは単位時間(1秒間）の変位を表す。6m/sといえば、大きさのみなので、**速さ**といい、右へ6m/sといえば、速さに方向が加わっているので**速度**という。



　点Aが時刻0において座標１の位置にいたとする、この物体が3秒後に座標−5に移動し

たとすると、変位は

$$x = x_2 - x_1 = (-5) - 1 = -6\text{m}$$

となる、移動した距離は6mなので、Aは3秒間で6m動いている。

速さは　$v = \dfrac{6}{3} = 2\text{m/s}$

となる。この場合の速度は方向を考慮しなければならないので、変位-6mを時間で割るとよいことになる。

速度は　$\vec{v} = \dfrac{-6}{3} = -2\text{m/s}$

となる。

一般に速度を解答するときには速さに方向を表す言葉を付け加えて「右に6m/s」とか、「東へ6m/s」とか表現するが、「右方向を正とする」など問題に符号が指定してある場合は、符号を含んで速度を解答することができる。しかし、方向を符号で表す指定がないのに速度を符号で解答してはならない。

「速度とは単位時間（１秒間）の変位である」

これが速度の定義である。

$$\text{速度} = \frac{\text{変位}}{\text{時間}}$$

と表すことができる。

一般に物理では、公式は文字を使用する。英語の頭文字を使うことが多い。

速度はverocityでv、時間はtimeでt、変位は数学での位置座標の意味でxを使うことが多い。よって、

$$v = \frac{x}{t}$$

と表すことができる。

＜例題１＞

①　ある物体が4秒間で座標6mから座標18mの位置に移動した。このときの速さ及び速度を求めよ。

②　ある物体が4秒間で座標6mから座標-2mの位置に移動した。このときの速さ及び速度を求めよ。

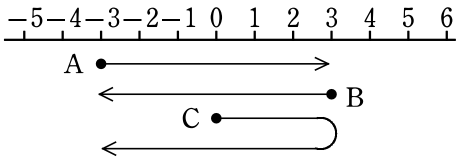
＜解答＞

①　速さ…$\left|\dfrac{18-6}{4}\right| = 3\text{m/s}$　　　　速度…$\dfrac{18-6}{4} = 3\text{m/s}$

②　速さ…$\left|\dfrac{(-2)-6}{4}\right| = 2\text{m/s}$　　　　速度…$\dfrac{(-2)-6}{4} = -2\text{m/s}$

方向が符号で示されている場合①のように速さと速度が同じ答えになることもある。

＜例題２＞



右図の数直線で1目盛りを1mと考える。
Aは2秒間で−3の位置より3の位置まで移動。
Bは2秒間で3の位置より−3の位置まで移動
Cは0を出発し3の位置でUターンし−3の位置に付いた。かかった時間は3秒であった。

① A,B,Cの移動距離はそれぞれいくらか

② A,B,Cの変位はそれぞれいくらか

③ A,B,Cの平均の速さはそれぞれいくらか

④ A,B,Cの平均速度はそれぞれいくらか

＜解答＞

① Aは−3の位置から3の位置まで6m移動している。
Bは3の位置から−3の位置まで6m移動している。
Cは0の位置から3の位置まで3m移動し，3mの位置から−3mの位置まで6m移動しているのであわせて9mの移動である。

② Aは＋方向に6m位置が変化している。変位＋6m
Bは−方向に6m位置が変化している。変位−6m
Cは最初と最後のだけ見ると,−方向に3m位置が変化している。変位−3m
変位は途中の経路は全く関係なく，最初と最後の位置の変化だけで考える。

③ 平均の速さは1秒間あたりの距離なので
A 3m/s B 3m/s C 3m/s

④ 平均速度は1秒間あたりの変位なので
A +3m/s B −3m/s C −1m/s

３． 等速直線運動

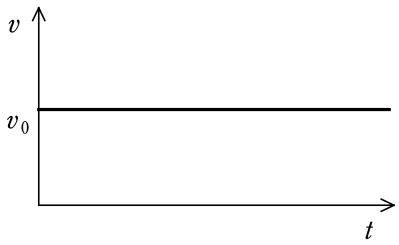
等速直線運動とは一定の速度での直線上の運動を指す。もともと速度は方向を含むために、速度が一定であることは方向も一定であり、すなわち、等速直線運動となる。

「速度一定⇔等速直線運動」

といえる。この二つは必要十分条件（同値）の関係にある。

① $v-t$グラフ

等速直線運動においては速度が一定である。ある時刻の速度がv_0であれば、永久に速度はv_0である。縦軸に速度、横軸に時間をとったグラフにすると、下のようになる。



このグラフを$v-t$グラフという。
等速直線運動では、$v-t$グラフはt軸に平行なグラフとなる。逆に$v-t$グラフがt軸に平行であれば、等速直線運動といえる。

「$v-t$グラフが平行⇔等速直線運動」

また、公式、$v=\dfrac{x}{t}$より、

$x=vt$といえる。変位xはこのグラフではどこに表されているのであろうか？

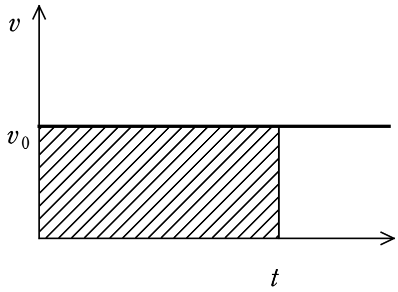
v_0はグラフの斜線部の縦の長さを表し、

tは同じ斜線部の横の長さをあらわしている。

xはこの斜線部の縦と横の積になっている

ので、この斜線部の面積をあらわしている

ことになる。



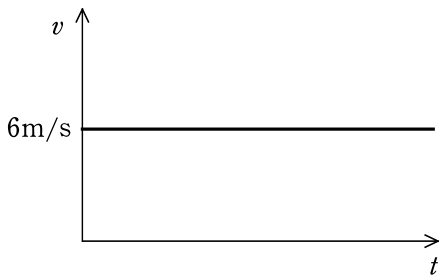
　よって、

「$v-t$グラフのグラフ下の面積は
**　その物体の変位を表す。」**

といえる。

＜例題＞

ある物体が右のグラフで表されるような運動をしている。このとき次の問いに答えよ。



①　この物体の運動の種類を答えよ。

②　初速度の大きさはいくらか

③　4秒後の速さはいくらか

④　この物体が4秒間に移動した距離はいくらか

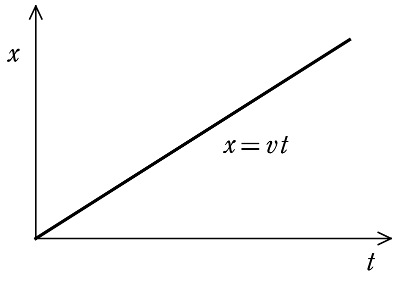
＜解答＞

①　等速直線運動　②　6m/s　③　6m/s　④　6m/s×4s＝24m

②　$x-t$グラフ

　縦軸に変位x、横軸に時間tを用いたグラフを$x-t$グラフという。等速直線運動の$x-t$グラフはどのようなグラフになるのであろうか？

　等速直線運動においては$x=vt$のvは一定であるから、数学における$y=ax$のグラフと同じになり、正比例のグラフとなる。このグラフにおける傾きが速度になっていることがわかる。



「$x-t$グラフが正比例⇔等速直線運動」

「$x-t$グラフの傾き⇔速度」

という関係が成立する。

③　位置座標を示すグラフ

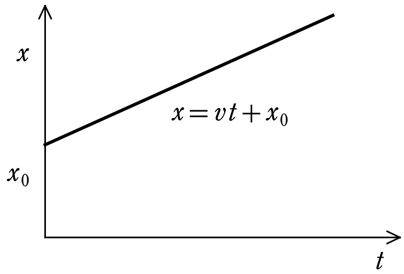
　時刻0における位置座標をx_0、時刻tにおける位置座標をxとすると、t秒間の位置の変化（変位）は$x-x_0$と表される。よって、この物体の速度vは、

$$v=\frac{x-x_0}{t}$$

　で表される。この式を変形すると、

$x = vt + x_0$

となる。この式は時刻tと位置座標xとの関係は一次関数であることを意味している。
グラフに表すと次のようになる。

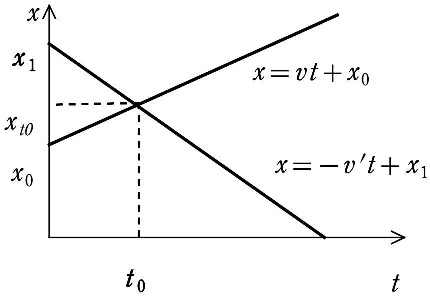


この場合、グラフの傾きが速度を表し、
グラフの切片が最初の位置を表している。

「位置座標を示す$x-t$グラフが一次関数
⇔等速直線運動」
「位置座標を示す$x-t$グラフの切片
⇔最初の位置」
「位置座標を示す$x-t$グラフの傾き
⇔速度」

という関係がわかる。

右のグラフは最初の位置x_0で一定の速度vで動いている物体と、最初の位置x_1で一定の速度$-v'$で動いている物体の位置を同じ$x-t$グラフ上に描いたものである。グラフを読み取ることにより、それぞれの物体の最初の位置および速度を読み取ることができる。

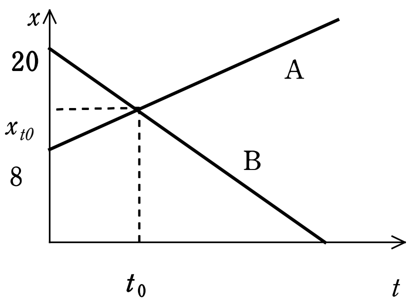


ここにおいてグラフの交点は何を意味しているのであろうか。

交点の座標は(t_0、x_{t0})である。このことは、同じ時刻、t_0に同じ位置x_{t0}にいるということを意味する。同じ時刻に同じ位置にいるということは、「衝突、出会い、すれ違い」などを意味することになる。

＜例題＞

ある物体Aが座標8mの位置を時刻0に2m/sで正の方向に進み、物体Bは同じ時刻に座標20mの位置を負の方向に4m/sで出発した。その状態をグラフに表したのが右図である。これを見て以下の問いに答えよ。



① Aのグラフの傾きはいくらか
② Bのグラフの傾きはいくらか
③ A,Bが出会うのは何秒後にどの座標か

＜解答＞

① 2 ② -4

③ t秒後に座標xで出合うとすると、グラフの交点が出会う位置になる。Aの方程式は$x = 2t + 8$、Bの方程式は$x = -4t + 20$

これを連立させて解くと、$t = 2$、$x = 12$となり、2秒後に座標12mの位置で出会う。

４．　加速度の意味

　今までの運動は一定の速度における直線運動であった。しかし、一般に物体の速度は常に変化するものである。次に、物体の速度の変化について考えてみよう。
下のグラフはある瞬間に同時にスタートしたA,B二つの物体の各時刻における速度を表している。

時間(s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$A(m/s)$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	16
$B(m/s)$	0	2.5	5.0	7.5	10	10	10	10	10	10

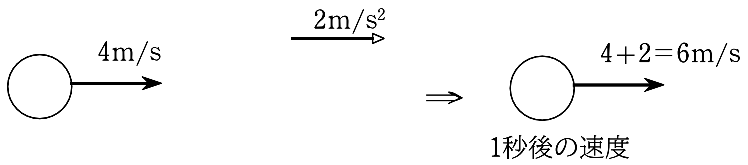
Aの物体は1秒間当たり2.0m/sずつ速くなり16m/sの最高速度まで速くなる。それに対し、Bの物体は1秒間当たり2.5m/sずつ速くなり、10m/sの最高速度までなる。この二つの物体はどちらが速いといえるだろうか。スタートしてから5秒以内はBの速度のほうがAの速度よりも速い。そのため、レースにおいてはBの方が先に走っているはずである。ところがAは最高速度が16m/sであるのに対して、Bは10m/sであり、Aの方が速い。そのため、最初はBが先に走っているがそのうちAに追い越されるという現象が起こる。Aの方が長距離に向いており、Bの方は短距離で速いということが言える。物体が単に速いかどうかというのは最高速度が大きいかどうかだけではなく、如何に速くスピードが出せるかがもうひとつの速さを意味している。特に短距離走の場合は如何に速くスピードを出すかというのが勝負の分かれ目となる。

　この如何に速くスピードを出すかという能力はどのように表現すればよいであろうか。最もわかりやすいのは1秒間たつとどれだけスピードアップしたかという数値であろう。Aの場合は毎秒2.0m/sで、Bの場合は毎秒2.5m/sだけ速くなっている。このように毎秒あたりどれだけ速くなるかという数値を**加速度**という。毎秒2m/s速くなるということは、「毎秒」と「/s」の二つの「毎秒」があるため、単位は「m/s^2]と書いて、「メートル毎秒毎秒」と読むことにする。よって、Aの加速度は$2.0m/s^2$、Bの加速度は$2.5m/s^2$となる。

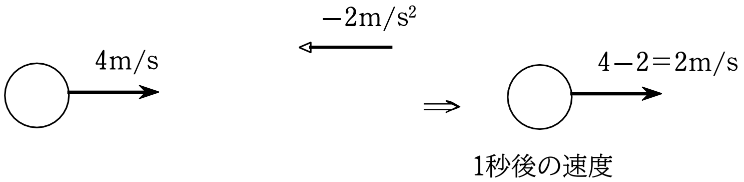
　だんだん速くなる場合の加速度に対して段々遅くなる場合も加速度として捉えることができる。だんだん速くなる場合、たとえば、ある時刻の速度が4.0m/sで加速度が2.0m/sであるならば、1秒後の速度は4.0＋2.0＝6.0m/sと最初の速度に加速度を加えればよい。それに対してだんだん遅くなる場合はなる場合は速度が小さくなるために加速度を引かなければならなくなる。つまり、だんだん遅くなる場合の加速度は負の数となる。加速度が負の数であるということは、加速度の向きが逆と考えることができ、加速度は速度と同じく方向を含む。そのために、加速度はベクトルである。よって、大きさのみを考えるときは**加速度の大きさ**という

速度＞0の場合

　①　だんだん速くなる場合（加速度＞0）

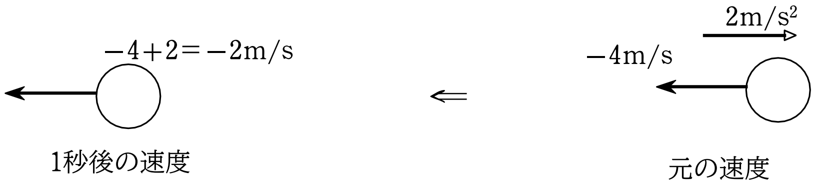


②　だんだん遅くなる場合（加速度＜0）

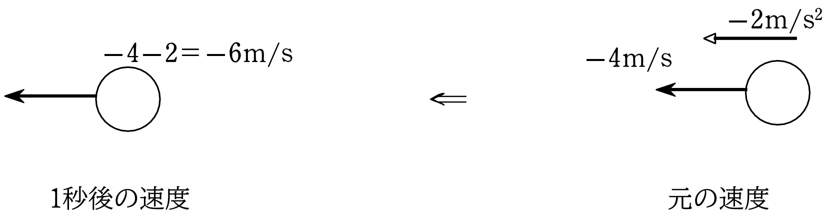


この考え方でいくと等速のときは速度の変化がないので、加速度＝0となる。
次に速度が負の場合を考えてみよう。速度が負の場合は加速度が正のときは速度の向きと逆方向に速くなるので速さは次第に遅くなり、加速度が負の場合は速度と同じ方向になるので、速さが速くなる。図で表すと下のようになる。

③　加速度＞0の場合



④　加速度＜0の場合



加速度を理解するには上図の４パターンの速度と加速度の関係をしっかりとつかんでおかなければならない。

＜例題＞

時刻0のときに速度6m/sである物体AとBがある。Aの加速度は$3\mathrm{m/s^2}$でBの加速度は$-2\mathrm{m/s^2}$である。物体A、Bの1秒後、2秒後、3秒後の速度をそれぞれ求めよ。

＜解答＞

Aの速度　1秒後　9m/s、2秒後　12m/s、3秒後　15m/s
Bの速度　1秒後　4m/s、2秒後　2m/s、3秒後　0m/s

５．加速度の定義式

⑴　加速度の定義

「加速度とは単位時間（１秒間）あたりの速度変化である」

これが加速度の定義である。これを式で表してみよう。

速度v_0で動いているある物体がt秒後に速度vになったとすると、この間に物体の速度は$v-v_0$だけ変化したことになる。この変化がt秒間で起こっているので、１秒間あたりの速度変化すなわち加速度aは

$$a=\frac{v-v_0}{t}$$

となる。このときのv_0を**初速度**という。

この式を変形すると、

$$v=v_0+at \qquad \cdots①$$

となる。

この式は次のように理解することもできる。

時間t	0	1	2	3	t
速度v	v_0	v_0+a	v_0+2a	v_0+3a	v_0+at

加速度aの意味は現在の速度にaを加えたのが1秒後の速度になるという意味であるので、初速度v_0に加速度aを順次加えていけば各時刻の速度が求められる。これをまとめたのが上の表である。

加速度も運動状態によって常に変化するのであるが、加速度が常に一定である直線上の運動を特に等加速度直線運動という。

$v=v_0+at$は等加速度直線運動においては$a=$一定であるので、この式は一次関数となる。

⑵　等加速度直線運動における$v-t$グラフ

等加速度直線運動において、$v-t$グラフを書いてみよう。どのような形のグラフになるのであろうか。

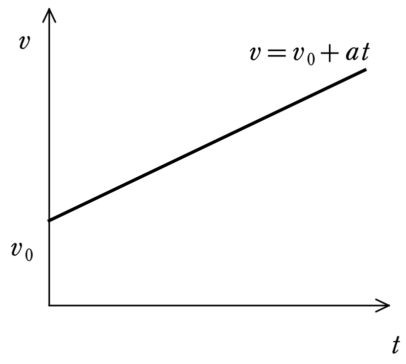
このグラフは傾きa、切片がv_0の一次関数になっている。まとめると、

「$v-t$グラフが一次関数 ⇔ 等加速度直線運動」

「$v-t$グラフの傾き ⇔ 加速度」

「$v-t$グラフの切片 ⇔ 初速度」

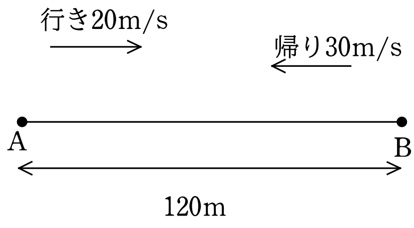
といえる。



(3)　平均速度

　このように速度が常に変化している場合の平均速度はどのように考えればよいのであろうか。

　平均速度は速度の平均ではない。たとえば120mの距離を行きに20m/sで帰りに30m/sで往復した場合、単純に相加平均すると、



$$\frac{20+30}{2}=25\,\mathrm{m/s}$$

となる。しかし、これは平均の速さではない。

平均の速さはあくまでも、

$$\text{平均の速さ}=\frac{\text{移動距離}}{\text{かかった時間}}$$

なのである。

この定義によって計算すると、移動距離は120m往復なので、240m。かかった時間は行きが$\frac{120}{20}=6$秒で、帰りが、$\frac{120}{30}=4$秒で合計10秒かかっている。よって、平均の速さ$\overline{v}$は

$$\overline{v}=\frac{240}{10}=24\,\mathrm{m/s}$$

となり、先ほどの25m/sとは違う。このとおり物理量はあくまでも定義に沿って計算しなければならない。平均にも相加平均相乗平均などいろいろあるため，どの平均を取るかによって答えが違うのである。

＜例＞

　行きがv_1，帰りがv_2で距離xを往復した時の平均速度を求めてみよう。

　往復に要する時間は　$\frac{x}{v_1}+\frac{x}{v_2}$　　　往復の距離は　$2x$

　よって，平均速度は

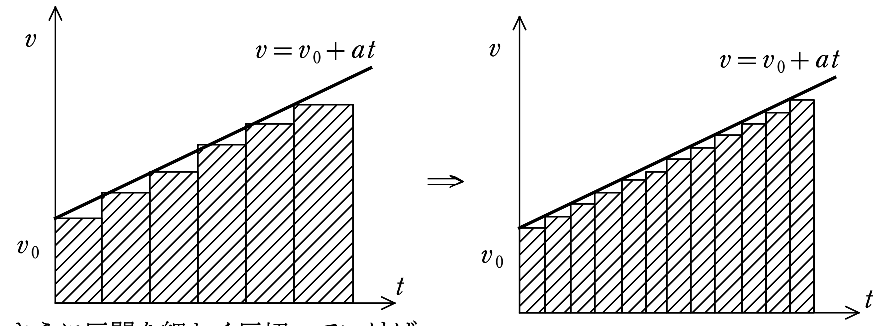
$$\overline{v}=\frac{2x}{\frac{x}{v_1}+\frac{x}{v_2}}=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$$

　このような平均を調和平均と呼んでいる。

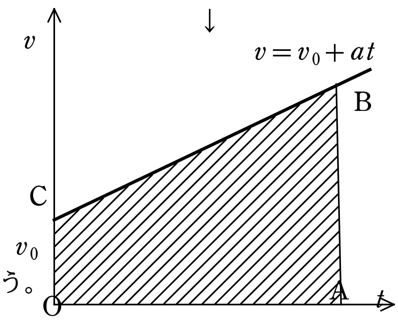
(4)　変位

　平均速度を求めるためにはあくまでも移動距離をかかった時間で割らなければならない。そこで、まず、移動距離を求める方法を考えてみよう。

　等速直線運動の場合はグラフ下の面積が移動距離を表していたが、等加速度直線運動の場合は速度が常に変化しているので、このような方法では求められない。そこで、等加速度運動を短い時間ごとに区切ってその短い時間においては速度が一定としてグラフ下の面積を求めてみよう。このようにしたのが、左のグラフである。斜線部の面積が移動距離を表す。この場合速度は一定でないため、実際の移動距離とはずれが生じる。しかし、その時間区切りを短くすればするほどそのずれは少なくなる。



さらに区間を細かく区切っていけば最終的に右図の台形の面積となる。よって、この場合もグラフ下の面積が移動距離を表していることになる。



「$v-t$グラフ下の面積

⇔　移動距離（変位）」

といえる。

それでは台形OABCの面積sを求めてみよう。

OC$=v_0$、OA$=t$、AB$=v_0+at$　を用いて、

$$s=\frac{(v_0+v_0+at)t}{2}=v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

となる。これが等加速度直線運動における変位sを表す式である。

$$s=v_0t+\frac{1}{2}at^2 \quad \cdots②$$

ここで、等加速度直線運動の公式が二つそろった。時間tが絡むと問題が複雑になりやすいので、この2式より時間tを消去する。

$v=v_0+at$　より、　$t=\dfrac{v-v_0}{a}$　この式を②に代入して

$$s=v_0t+\frac{1}{2}at^2=\frac{t}{2}(2v_0+at)=\frac{v-v_0}{2a}(2v_0+v-v_0)=\frac{(v-v_0)(v+v_0)}{2a}=\frac{v^2-{v_0}^2}{2a}$$

これより、

$$v^2-{v_0}^2=2as \quad \cdots③$$

となる。

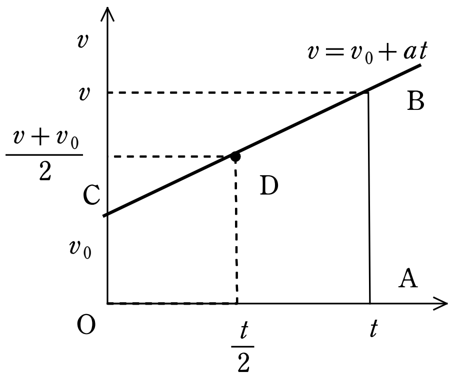
ここで、等加速度直線運動における三公式が出揃った。

$$\begin{cases} v=v_0+at \\ s=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2 \\ v^2-{v_0}^2=2as \end{cases}$$

等加速度直線運動の問題はこの三公式を使って解くことになる。

⑸　平均速度とは

　等加速度直線運動にて物体の変位は　$s=v_0t+\frac{1}{2}at^2$で表されることがわかったが、平均速度はどのように表されるのであろうか。



　定義によると平均速度$\overline{v}$は

$\overline{v}=\frac{s}{t}=v_0+\frac{1}{2}at$

となる。この式は

$v=v_0+at$のtに$\frac{t}{2}$を代入した式と同じである。つまり、グラフにおけるBC間の中点Dの位置を意味している。等加速度直線運動の平均速度はその区間の中点の速度ということになる。よって、その区間の最初の速度と最後の速度の平均値ということにもなる。

「等加速度直線運動の平均速度は区間の中点における速度と等しい」

といえる。

　これを使って公式を導くこともできる。

　初速度v_0だった物体が加速度aで加速した。時刻t後の速度，および変位を求めてみる。

　1秒間にaずつ速くなるのでt秒後の速度vは，$v=v_0+at$

　t秒間の平均速度は最初の速度と最後の速度の相加平均を取って，$\frac{v_0+v}{2}$

　変位xは平均速度と時間の積なので　$x=\frac{v_0+v}{2}t$

　これに，$v=v_0+at$を代入して，$x=v_0t+\frac{1}{2}at^2$

　この式誘導の過程は実際の問題を解くときに威力を発揮する。

＜例題＞

時刻0において20m/sだったある物体が4秒後40m/sの速度になっていた。この物体の運動状態をグラフにすると、右図のようであった。以下の問いに答えよ。

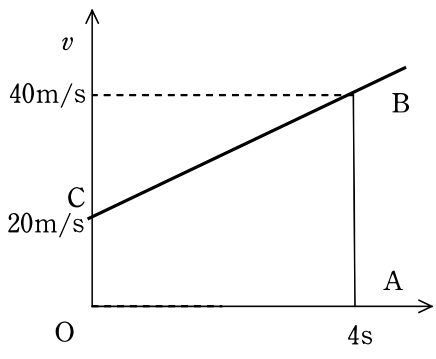
①　この物体の加速度はいくらか

②　この物体の初速度はいくらか

③　この物体の1秒後の速度はいくらか

④　この物体の4秒間の平均の速度はいくらか

⑤　この物体は4秒間に何m移動したか



＜解答＞

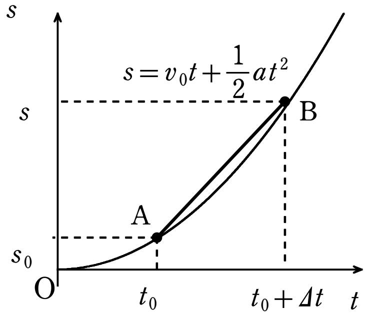
①　$\frac{40-20}{4}=5\mathrm{m/s^2}$　②　20m/s　③　20＋5＝25m/s　④　$\frac{20+40}{2}=30\mathrm{m/s}$

⑤　平均の速さ×時間で30m/s×4s＝120m

　または　公式$s=v_0t+\frac{1}{2}at^2$より　$20\times4+\frac{1}{2}\times5\times4^2=120$m

６．等加速度直線運動と変位

(1)　等加速度直線運動と$x-t$グラフ



　$x-t$グラフは$s=v_0t+\frac{1}{2}at^2$を見てもわかるように二次関数となる。このグラフにおいて時刻t_0における変位s_0は$s_0=v_0t_0+\frac{1}{2}at_0{}^2$である。また、それから少したった時間$t_0+\varDelta t$における変位$s$は、

$$s=v_0(t_0+\varDelta t)+\frac{1}{2}a(t_0+\varDelta t)^2$$

で表される。よって、この間の平均速度$\overline{v}$は

$$\overline{v}=\frac{s-s_0}{\varDelta t}=\frac{v_0(t_0+\varDelta t)+\frac{1}{2}a(t_0+\varDelta t)^2-\left\{v_0t_0+\frac{1}{2}at_0{}^2\right\}}{\varDelta t}=v_0+at_0+\frac{1}{2}a\varDelta t$$

となる。

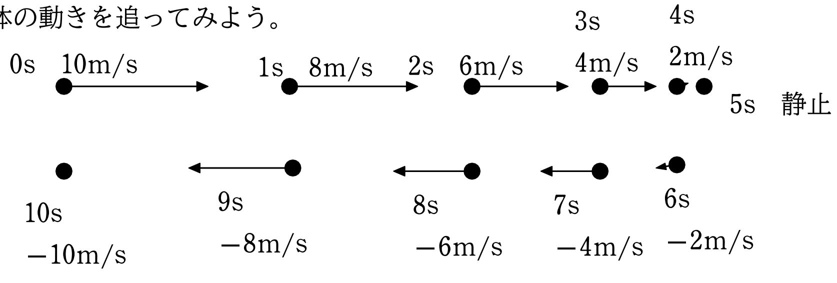
　この式は上のグラフの点AB間の直線の傾きを表している。この傾きを平均変化率という。ここで、$\varDelta t$をできるだけ短くすると、A点とB点との間が次第に接近し直線ABの傾きは点Aの接線の傾きとなる。$\varDelta t$が短いということは、$\varDelta t=0$を意味し、平均変化率は、v_0+at_0となる。これは、t_0における瞬間速度を表している。

「$x-t$グラフの接線の傾きは瞬間速度を表している。」

といえる。

(2)　負の加速度の場合

　初速度10m/s、加速度−2m/s²の運動の場合、物体はどのような動きをするであろうか。物体の動きを追ってみよう。



　上の図は各時刻における物体の速さと位置を示したものである。この図を見てわかるように右向きに速度を持っている間は、物体は時間とともに右に移動している。しかし、速度が1秒間に2m/sずつ小さくなるので、5秒後には静止する。その後は左向きの速度になるために、静止したときが最も右端となっている。5秒後以降は左向きの速度になり左へ左へと移動している。

「負の加速度の場合、速度が0になる位置で物体はUターンする。」

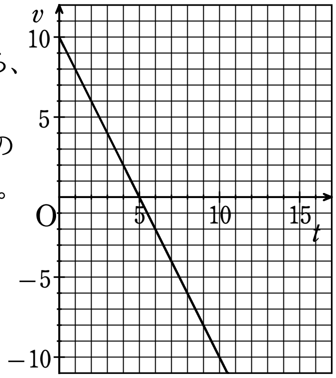
また,

「物体がUターンしていたらその位置で速度が0になっている」

といえる。

(3) 負の加速度における等加速度直線運動の$v-t$グラフ。

上の運動の$v-t$グラフを書くと右図のようになる。初速度10m/s、加速度-2m/s^{2}であるから、切片10、傾き-2の一次関数のグラフである。



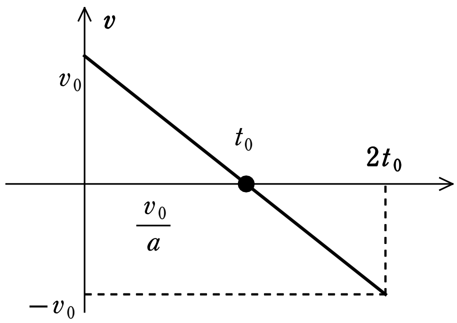
このグラフでは5秒後に速度が0になっているので、Uターンするのは5秒後であることがわかる。Uターンする位置までの変位は、グラフ下の面積より求められ、その値は、

$$s=\frac{1}{2}\times5\times10=25\text{m}$$

となる。25m先でUターンするのである。

このグラフを初速度v_0、加速度$-a$を用いて一般化すると、下のようになる。

このグラフにより以下のようなことがわかる。



① Uターン時刻

Uターン時刻は速度が0にある位置なので、

$$v_0-at_0=0$$

より、

$$t_0=\frac{v_0}{a}$$

で表される。

② Uターン位置

Uターン位置はスタート位置からの変位なので、グラフ下の面積sを求めると、

$$s=\frac{1}{2}v_0\cdot\frac{v_0}{a}=\frac{{v_0}^2}{2a}$$

で表される。

Uターン位置より後はUターン位置を中心としてグラフが点対称になっている。この場合スタート位置との対称点すなわちUターン時刻の2倍($2t_0$)は、どのような位置であろうか。

Uターン位置を過ぎてからはグラフが、t軸の下に入る。よって、距離はグラフの上の面積になる。この面積はvがすべて負であるから、マイナスの面積になる。マイナスの面積は逆方向の変位を意味し、Uターン位置から逆方向に戻っていることになる。t_0から$2t_0$までの面積は0からt_0までの面積と等しい。よって、両方の面積の和は0となり、変位0すなわち、時刻$2t_0$で出発点に戻ったことになる。

③ 出発点に戻る時刻

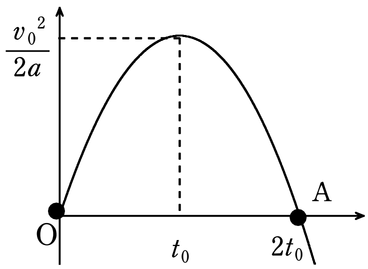
$$2t_0=\frac{2v_0}{a}$$

④　出発点に戻ったときの速度

グラフを見てわかるとおり、$2t_0$における速度は初速度と符号が逆である。つまり、Uターンして戻ったときは初速度と同じ大きさで逆向きの速度をもっていることになる。

⑷　負の加速度における$x-t$グラフ

$s=v_0t-\frac{1}{2}at^2$を数学でいうところの標準形に直すと、



$$s=v_0t-\frac{1}{2}at^2$$
$$=-\frac{a}{2}\left(t-\frac{v_0}{a}\right)+\frac{v_0{}^2}{2a}$$

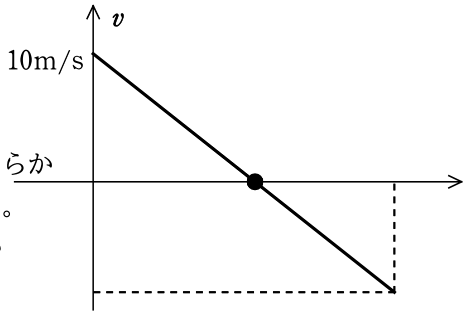
となり、その頂点の座標は（$\frac{v_0}{a}$、$\frac{v_0{}^2}{2a}$）となる。

頂点は接線の傾き（瞬間の速度）＝0になっているので、Uターン位置を表していることになる。よって、頂点のt座標はUターンする時刻を意味し、s座標はUターン位置を表していることになる。二次関数（放物線）のグラフは軸に対して左右対称であるから、元の位置に戻るまでの時間（t軸との交点＝A点）は軸までの時間（Uターン時間）の2倍であることがわかる。すなわち、行く時間と帰る時間は等しいのである。

また、O点での接線の傾きとA点での接線の傾きは同じ大きさで符号が逆である。このことから、戻ってきたときの速度は初速度と逆向きであることがわかる。

＜例題＞

10m/sで走っていた物体が加速度$-2\mathrm{m/s^2}$の等加速度運動をしていた。この物体の運動を表したのが右のグラフである。これについて以下の問いに答えよ。



①　1秒後の速度を求めよ。
②　この物体が静止するのは何秒後か
③　この物体が原点から正の方向に最も離れるのは何秒後か
④　この物体が静止するまでの平均の速さはいくらか
⑤　この物体が静止するまでの移動距離を求めよ。
⑥　この物体が出発点に戻ってくるのは何秒後か
⑦　この物体が出発点に戻ってきたときの速度はいくらか。

＜解答＞

①　$10-2=8\mathrm{m/s}$　②　$\frac{0-10}{-2}=5\mathrm{s}$　③　静止したときが最も離れている。　5s

④　$\frac{10+0}{2}=5\mathrm{m/s}$　⑤　移動距離＝平均の速さ×時間＝$5\times5=25\mathrm{m}$

⑥　移動時間と同じ時間で戻ってくる。行き5sなので、帰りも5s。よって、10秒後

⑦　戻ってきたときは出発時と同じ速さで逆方向　よって、$-10\mathrm{m/s}$

等加速度直線運動の問題では3つの公式のどれを使うか迷うことが多い。そのために表にまとめて，問題を解くようにすればよい。

７． 応用例題

＜例題１＞

ある飛行機が離陸するときの滑走距離は1000mであった。この飛行機は80m/sに達したときに離陸できるという。離陸に必要な加速度はいくらか。

＜解答＞

$$\begin{cases} v = v_0 + at \\ x = v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2 \\ v^2 - {v_0}^2 = 2ax \end{cases}$$

これら公式に使われている文字はa, v_0, v, t, xの5種類である。また，一つ一つの公式には4つの文字が使われている。基本的に3つ分かればどれかの公式で解けるはずである。データを表にまとめると。

	a	v_0	v	t	x
飛行機	a	0	80	t	1000

この場合時刻tは不要なので,tのない式（第三公式　$v^2 - {v_0}^2 = 2ax$）が該当する。

これに代入すると，

$$80^2 - 0^2 = 2 \times a \times 1000$$

$$a = 3.2\text{m/s}^2$$

となる。

＜別解＞　平均速度を使う方法

この飛行機は最初の速度が0m/sで最後の速度が80m/sなので，平均速度は

$$\frac{0+80}{2} = 40\text{m/s}$$となる。

1000mを40m/sで移動するのでその移動時間は

$$\frac{1000}{40} = 25\text{s}$$

25sで0m/sだった飛行機が80m/sと80m/sだけ加速しているので，加速度，すなわち1s間の速度変化は

$$\frac{80}{25} = 3.2\text{m/s}^2$$

この方法は公式を使う必要がなく，毎回，物理量の意味を考えることになり，物理の本質を理解しやすく，力が付きやすい方法といえる。

＜例題２＞

ある列車が駅を出発して，駅から200mの位置にある踏み切りに列車の先頭が達したのは20s後であり，最後部が通過したのは30s後であった。この列車は等加速度運動している

として，列車の長さを求めよ。

＜解答＞

	a	v_0	v	t	x
先頭	a	0		20	200
最後尾	a	0		30	$200+L$

vが必要ないのでvのない式（第二公式　$x=v_0t+\frac{1}{2}at^2$）が該当する。

$$\begin{cases} 200=\frac{1}{2}\times a\times 20^2 \\ 200+L=\frac{1}{2}\times a\times 30^2 \end{cases}$$

これを解くと　$a=1\mathrm{m/s^2}$，$L=250\mathrm{m}$となる。

＜別解＞

列車の先頭は200mを20sで移動しているので平均速度は$\frac{200}{20}=10\mathrm{m/s}$

最初の速度が0なので，平均速度が10m/sになるためには，最後の速度が20m/sでなければならない。20sで速度が20m/sだけ速くなっているので，加速度は

$\frac{20}{20}=1.0\mathrm{m/s}$

最後部が踏切を通過するのに30sかかっているので，この時の速度は1s間に1.0m/sずつ速くなるので$1.0\times30=30\mathrm{m/s}$

踏切を通過中の平均速度は$\frac{20+30}{2}=25\mathrm{m/s}$

踏切通過時間は10sなので，

列車の長さは　$25\mathrm{m/s}\times10\mathrm{s}=250\mathrm{m}$