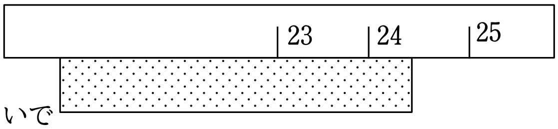
有効数字

１．測定値とは

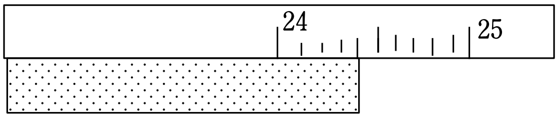
(1)　有効数字の考え方

物理で数値を扱うとき、たとえばある物体の長さが24cmだとすると、正確に24cmという意味ではない。物差しを当てて目盛りを読み取った結果24cmだということである。このとき、どこまで正しく読み取っているのかが重要である。ものさしを当てて長さを測るとき、下図のようになっていたとすると、1cmごとの目盛りまでしか読んでいなかったことになる。

この場合真実の長さは24cmと25cmの間ということになるが，それ以上のことは分からない。24.3cmか24.4cmぐらいであろうということは大体分かるが目盛りがないのではっきりと特定できない。あくまで、はっきりとしているのは24cmと25cmの間であるということだけである。



もし、mmの目盛りまで読んでいたらどうなるであろうか。下図のようになっていれば24.4cmといえるが、これまた正確に24.4cmではない。そこで、測定した値にはどこまで正確であるかという要素を表示する必要がある。24cmということは大体24cmという意味で、23.5cm以上24.5cm未満をあらわすと決める。不確定な目分量を四捨五入した値を使うことにする。同じように測定値24.4cmとは、小数第一位まで正確なので、小数第二位を四捨五入した値として、24.35cm以上24.25cm未満の値として解釈をする。



「不確定な目分量は四捨五入した値を測定値として使う」

「目盛りを読み取る問題では最小目盛りの$\frac{1}{10}$までが有効数字として解答すること。」

このような考え方をすると、$a=24$cmと$b=24.0$cmは違うということになる。範囲は

$23.5 \leqq a < 24.5$　と　$24.35 \leqq b < 24.45$

の違いである。数学では小数以下最後の位が0であれば省略するが、物理においては最後の位の0を省略していなければ、それは正しい測定値であることを意味する。もし、省略してあれば、測定していない数値であることを意味しているのである。このようにはっきりとした測定値のことを有効数字という。aの場合は有効数字2桁（2と4）、bの場合は有効数字3桁（2と4と0）である。

(2)　大きな数字の表し方

次に，小数にならない大きな数字の表し方を考えてみよう。たとえば500gとは、どこまで正しい値なのであろうか。500gであれば原則として499.5g以上500.5g未満で有効数字3桁と考えるのであるが、習慣として510g程度でも500gということはある。その点をはっきりとさせるために、指数で表すことになっている。

$m=5.1\times10^2$gとは、　$505\text{g} \leqq m < 515\text{g}$　であり、有効数字2桁（5と1）

$m=5.10\times10^2$gとは　$509.5\text{g} \leqq m < 510.5\text{g}$　で、有効数字3桁（5と1と0）となる。

(3)　小さな数字の表し方

　次に微小数値の有効数字を考えてみよう。例として$c=0.24$これは、$0.235 \leqq c < 0.245$であり、有効数字2桁（2と4）である。左端の0は有効数字としては考えない。この数値は2.4×10^{-1}とおいてもよい。さらに微小な数値0.00025ではどうなのであろうか。これも有効数字2桁と考える。左端の4つの0は有効数字としては考えない。指数形式であらわすと、2.5×10^{-4}となり、有効数字が2桁であることがはっきりとする。

＜例題＞

次の測定値の有効桁数は何桁か。また、その測定値を指数形式であらわせ。

①　42.3　　　②　0.0215　　③　120.0

＜解答＞

①　有効3桁　4.23×10　②　有効3桁　2.15×10^{-2}　③　有効4桁　1.200×10^{2}

２．有効数字の計算

　物理量の測定が終わると、次は、その測定値を使った計算をする必要があるが、有効数字の範囲内での計算が要求される。ここでは、有効数字を考えた計算方法を紹介しよう。

⑴　和

　例　234.23＋42.5

　この場合を筆算で行ってみよう。

$$
\begin{array}{rr}
 & 234.23 \\
+ & 42.5? \\
\hline
 & 276.73
\end{array}
$$

　このようになるが、ここで、下の数値（42.5）の小数第二位の数値は不明である。不明な数値に上の数値の小数第二位の3を足してもその結果は不明となる。よって、計算結果の小数第二位は不確定な数値となるため、ここを四捨五入する。この場合の計算値は276.7となる。

＜例題＞

次の測定値の和を有効数字を考えて計算せよ

①　4.21＋0.1　　　②　32.5＋1.56

＜解答＞

①　4.3　②　33.1

⑵　差

　測定値の差も和と同じように位ごとに有効数字を確認していけばよいが、問題によっては有効数字が極端に減少することがある。

　例　234.53－234.52

$$
\begin{array}{rr}
 & 234.53 \\
- & 234.52 \\
\hline
 & 0.01
\end{array}
$$

この例で分かるように有効数字5桁のかなり高精度の測定値でも、近い数値の差をとれば有効数字は少なくなってしまう。この場合の有効数字は1桁である。このような現象を**桁落ち**という。実際の実験では桁落ちを考慮して測定する必要がある。
「和と差においては各位ごとに有効かどうか判断する」

＜例題＞
次の測定値の差を有効数字を考えて計算せよ。
①　35.21－5.1　　　②　4.615－4.605
＜解答＞
①　30.1　②　0.010　または　1.0×10^{-2}

⑶　積
和と差は各位ごとに有効かどうかを判断していけばよいのであるが、積はどうなのであろうか。
例　2.34×4.2

$$
\begin{array}{r}
2.34 \\
\times\ \ 4.2x \\
\hline
xxx \\
468 \\
936 \\
\hline
9.828x
\end{array}
$$

上の筆算でxは未知の数値である。この筆算を見れば積の9.828の少数第二位以下の2と8には未知数の影響が入っていることが分かる。未知数の影響がないのは9.8までである。この場合は少数第二位を四捨五入して計算値として、9.8となる。
「積においては有効数字の少ないほうの桁数を有効数字とする」
と決めておけば、この場合有効数字3桁の2.34と有効数字2桁の4.2の積であるから、答えの有効数字は2桁となる。
＜例題１＞
1.00の3分の１の３倍はいくらか
＜解答１＞
1.00の3分の１は有効数字３桁で考えて0.333．これを3倍すると0.999となるが、実際は1.00である。このような違いが起こる原因は四捨五入による誤差が累積したためである。このようなことを防ぐために、四捨五入をするのはできるだけ最後に1回だけ行うようにする。

$$1.00\times\frac{1}{3}\times3=1.00$$

注意…ここで扱った3分の１及び３倍は測定値ではなく真値として扱う。真値とは有効数字無限大の測定値と考えても良い。与えられた数値が真値か測定値かは問題をよく読んで判断する必要がある。

＜例題２＞

①　2.6×12.3　　　②　1.0×4.61

＜解答＞

①　32　②　4.6

⑷　商

例　4.58÷2.3

$$\begin{array}{r} 1.9 \\ 2.3x\,\overline{)\,4.58x} \\ \underline{2.3xx} \\ 2.28x \\ \underline{2.07x} \\ 2xx \end{array}$$

商の場合も筆算をしてみると、1.9までは正しいと思われるが、その次の位からは怪しくなる。最後の段が$2xx$となっているので0か1が立つことになり、1.90か1.91である。そこで、小数第二位は不確定となるので、有効数字外となる。この場合は少数第二位を四捨五入して1.9が求める答えである。

商の場合も積と同じように有効数字を考えればよい。

「商においては有効数字の少ないほうの桁数を有効数字とする」

＜例題＞

①　45.2÷2（2は真値）　②　45.2÷2.0

＜解答＞

①　22.6　　②　23　（最後が.0となっている場合は明らかに測定値である）

⑸　平方根

平方根は開平計算という計算方法があるが、複雑なので割愛して、次の例で考えてみることにする。

例　$\sqrt{72.29}=8.50235$　　$\sqrt{72.30}=8.50294$　　$\sqrt{72.31}=8.5035$

上の3つの数値は小数第二位がひとつずつ異なる場合の平方根を表している。いずれも小数第二位を四捨五入すれば72.3であるので、有効数字3桁と言える。それぞれの平方根も3桁までは一致している。このことより、

「平方根の場合は元の有効数字と同じ桁数が有効」と言える

＜例題＞

①　$\sqrt{4.0}$　　②　$\sqrt{4.00}$

＜解答＞

①　2.0　　②　2.00

物理における数値問題を解いたときの解答は

1.　有効数字の桁数の確認

2.　方向の確認（ベクトルの場合、符号を含む）

3.　単位の確認

以上の三点に注意して答えを書くこと