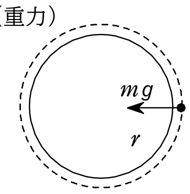
万有引力ドリル問題

1 等速円運動

1　地球表面すれすれに飛ぶ，　質量mの人工衛星の速さv　（重力）

質量	向心力	回転半径	回転速度	向心加速度

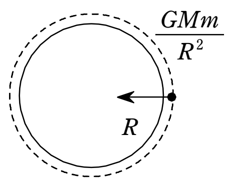


運動方程式　（　　　　　　　）

$v=$

2　地球表面すれすれに飛ぶ，　質量mの人工衛星の速さv　（万有引力）

質量	向心力	回転半径	回転速度	向心加速度

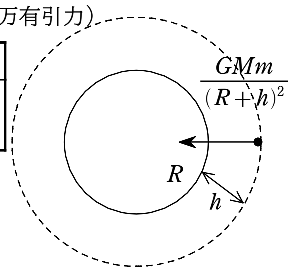


運動方程式　（　　　　　　　）

$v=$

3　地球上空hを飛ぶ，　質量mの人工衛星の速さv　（万有引力）

質量	向心力	回転半径	回転速度	向心加速度

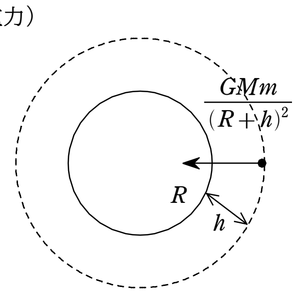


運動方程式　（　　　　　　　）

$v=$

4　地球上空hを飛ぶ，　質量mの人工衛星の速さv　（重力）

質量	向心力	回転半径	回転速度	向心加速度



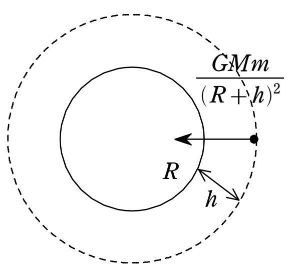
運動方程式　（　　　　　　　）

$v=$

$GM=gR^2$より　　$v=$

5　地球上空hを飛ぶ，　質量mの人工衛星の周期T　（万有引力）
角速度をωとする。

質量	向心力	回転半径	回転速度	向心加速度
			$(R+h)\omega$	



運動方程式　（　　　　　　　）

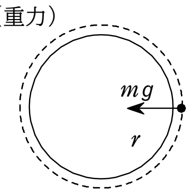
$\omega=$　　　　　　$T=\frac{2\pi}{\omega}$　より

$T=$

解説

1　地球表面すれすれに飛ぶ，　質量mの人工衛星の速さv　（重力）

質量	向心力	回転半径	回転速度	向心加速度
m	mg	r	v	$\frac{v^2}{r}$

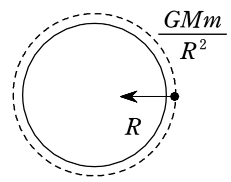


運動方程式　（　$mg=m\frac{v^2}{r}$　）

$v=\sqrt{gr}$

2　地球表面すれすれに飛ぶ，　質量mの人工衛星の速さv　（万有引力）

質量	向心力	回転半径	回転速度	向心加速度
m	$\frac{GMm}{R^2}$	R	v	$\frac{v^2}{R}$

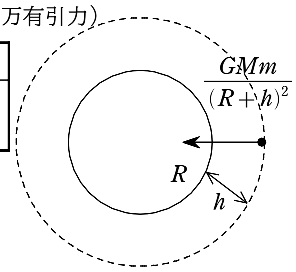


運動方程式　（　$\frac{GMm}{R^2}=m\frac{v^2}{R}$　）

$v=\sqrt{\frac{GM}{R}}$

3　地球上空hを飛ぶ，　質量mの人工衛星の速さv　（万有引力）

質量	向心力	回転半径	回転速度	向心加速度
m	$\frac{GMm}{(R+h)^2}$	$R+h$	v	$\frac{v^2}{R+h}$

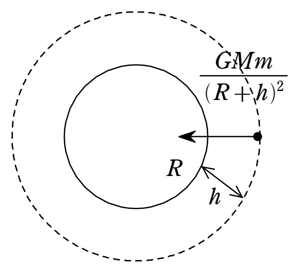


運動方程式　（　$\frac{GMm}{(R+h)^2}=m\frac{v^2}{R+h}$　）

$v=\sqrt{\frac{GM}{R+h}}$

4　地球上空hを飛ぶ，　質量mの人工衛星の速さv　（重力）

質量	向心力	回転半径	回転速度	向心加速度
m	$\frac{GMm}{(R+h)^2}$	$R+h$	v	$\frac{v^2}{R+h}$



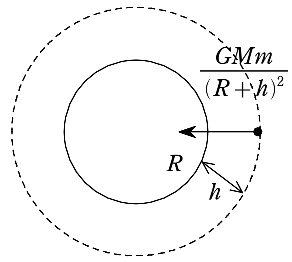
運動方程式　（　$\frac{GMm}{(R+h)^2}=m\frac{v^2}{R+h}$　）

$v=\sqrt{\frac{GM}{R+h}}$

$GM=gR^2$より　　$v=\sqrt{\frac{gR^2}{R+h}}$

5　地球上空hを飛ぶ，　質量mの人工衛星の周期T　（万有引力）
角速度をωとする。

質量	向心力	回転半径	回転速度	向心加速度
m	$\frac{GMm}{(R+h)^2}$	$R+h$	$(R+h)\omega$	$(R+h)\omega^2$



運動方程式　（　$\frac{GMm}{(R+h)^2}=m(R+h)\omega^2$　）

$\omega=\sqrt{\frac{GM}{(R+h)^3}}$　　$T=\frac{2\pi}{\omega}$　より

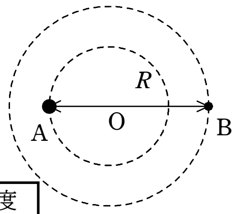
$T=2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{GM}}$

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

6　質量Mと質量mの2天体A,Bが距離R離れて共通重心の周りを等速円運動しているときの，天体A，Bそれぞれの回転速度v_A，v_Bを求める。

Oは重心　AB＝R

AO＝（　　　　　）　BO＝（　　　　　）



hint　OはABを$m:M$に内分する点

天体	質量	向心力	回転半径	回転角速度	向心加速度
A	M			ω	
B	m			ω	

Aの運動方程式　（　　　　　　　　　　）

Bの運動方程式　（　　　　　　　　　　）

ω＝（　　　　　　）

v_A＝（　　　　　）ω＝（　　　　　　）

v_B＝（　　　　　）ω＝（　　　　　　）

周期をTとすると，

$T=\frac{2\pi}{\omega}$＝（　　　　　　　）

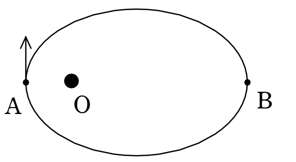
$\frac{R^3}{T^2}$＝（　　　　　　）　・・・　ケプラーの第三法則

$\boxed{2}$ 必殺技

1　近地点距離AO＝r，遠地点距離BO＝$3r$

の楕円軌道を描いている人工衛星がある。

この人工衛星のA点での速度v_A及びB点での速度v_B，および周期Tを求めよ。



万有引力定数G，地球の質量M，人工衛星の質量m

ケプラーの第二法則

（　　　　　）

A点とB点でのエネルギー保存則

（　　　　　　　　　　　　　　　　）

平均半径　a＝（　　）

ケプラー第三法則

（　　　　　）

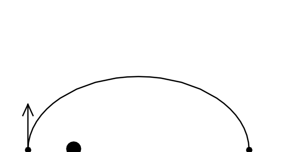
連立させて解くと

v_A＝（　　　　　）　　v_B＝（　　　　　　）

T＝（　　　　　）

2　AO＝rのA点で$v_A=\sqrt{\frac{5}{3}\frac{GM}{r}}$の速度であった時

B点での速度v_B，BOの距離R，公転周期Tを求めよ。



ケプラーの第二法則

（　　　　　　　）

A点とB点でのエネルギー保存則

（　　　　　　　　　　　　　　　　　）

連立させて解くと

v_B＝（　　　　　）　　R＝（　　）

平均半径　a＝（　　）

ケプラー第三法則

（　　　　　）

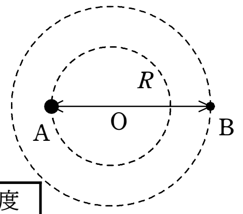
連立させて解くと

T＝（　　　　　）

6　質量Mと質量mの2天体A,Bが距離R離れて共通重心の周りを等速円運動しているときの，天体A，Bそれぞれの回転速度v_A，v_Bを求める。

Oは重心　AB＝R

AO＝（ $\frac{m}{M+m}R$ ）　BO＝（ $\frac{M}{M+m}R$ ）



hint　OはABを$m:M$に内分する点

天体	質量	向心力	回転半径	回転角速度	向心加速度
A	M	$\frac{GMm}{R^2}$	$\frac{m}{M+m}R$	ω	$\frac{m}{M+m}R\omega^2$
B	m	$\frac{GMm}{R^2}$	$\frac{M}{M+m}R$	ω	$\frac{M}{M+m}R\omega^2$

Aの運動方程式　（ $\frac{GMm}{R^2}=M\frac{m}{M+m}R\omega^2$ ）

Bの運動方程式　（ $\frac{GMm}{R^2}=m\frac{M}{M+m}R\omega^2$ ）

ω＝（ $\sqrt{G\frac{M+m}{R^3}}$ ）

v_A＝（ $\frac{m}{M+m}R$ ）ω＝（ $m\sqrt{\frac{G}{R(M+m)}}$ ）

v_B＝（ $\frac{M}{M+m}R$ ）ω＝（ $M\sqrt{\frac{G}{R(M+m)}}$ ）

周期をTとすると，

$T=\frac{2\pi}{\omega}$＝（ $2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G(M+m)}}$ ）

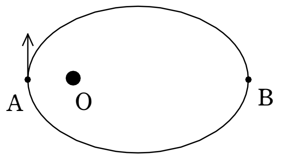
$\frac{R^3}{T^2}$＝（ $\frac{G(M+m)}{4\pi^2}$ ）　・・・　ケプラーの第三法則

解説

1　近地点距離AO＝r，遠地点距離BO＝$3r$

の楕円軌道を描いている人工衛星がある。

この人工衛星のA点での速度v_A及びB点での速度v_B，および周期Tを求めよ。



万有引力定数G，地球の質量M，人工衛星の質量m

ケプラーの第二法則

（ $rv_A=3rv_B$ ）

A点とB点でのエネルギー保存則

（ $\frac{1}{2}mv_A{}^2-\frac{GMm}{r}=\frac{1}{2}mv_B{}^2-\frac{GMm}{3r}$ ）

平均半径　a＝（ $2r$ ）

ケプラー第三法則

（ $\frac{(2r)^3}{T^2}=\frac{GM}{4\pi^2}$ ）

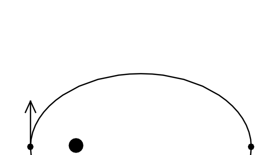
連立させて解くと

v_A＝（ $\sqrt{\frac{3}{2}\frac{GM}{r}}$ ）　　v_B＝（ $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{GM}{r}}$ ）

T＝（ $2\pi\sqrt{\frac{8r^3}{GM}}$ ）

2　AO＝rのA点で$v_A=\sqrt{\frac{5}{3}\frac{GM}{r}}$の速度であった時

B点での速度v_B，BOの距離R，公転周期Tを求めよ。



ケプラーの第二法則

（ $r\sqrt{\frac{5}{3}\frac{GM}{r}}=Rv_B$ ）

A点とB点でのエネルギー保存則

（ $\frac{1}{2}m\left(\frac{5}{3}\frac{GM}{r}\right)-\frac{GMm}{r}=\frac{1}{2}mv_B{}^2-\frac{GMm}{R}$ ）

連立させて解くと

v_B＝（ $\sqrt{\frac{1}{15}\frac{GM}{r}}$ ）　　R＝（ $5r$ ）

平均半径　a＝（ $3r$ ）

ケプラー第三法則

（ $\frac{(3r)^3}{T^2}=\frac{GM}{4\pi^2}$ ）

連立させて解くと

T＝（ $2\pi\sqrt{\frac{27r^3}{GM}}$ ）

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　）

3　半径R，質量Mの天体表面上からロケットを打ち上げたとき，このロケットがこの天体から脱出できる最低速度vを求めよ。ロケットの質量をm，万有引力定数をGとする。

ロケットの運動エネルギー＝（　—　　　）

天体表面における万有引力による位置エネルギー＝（　　　　　　）

全力学的エネルギー＝（　—　　　　　　　）＝0

v＝（　　　　　　）

4　脱出速度が光速度に達した天体をブラックホールという。質量Mの天体が崩壊してつぶれてブラックホールになるときの最大半径Rを求めよ。光速度をc，万有引力定数をGとする。

３より　c＝　　　　　　）

R＝（　　　　　）

3　半径R，質量Mの天体表面上からロケットを打ち上げたとき，このロケットがこの天体から脱出できる最低速度vを求めよ。ロケットの質量をm，万有引力定数をGとする。

ロケットの運動エネルギー＝（　$\frac{1}{2}mv^2$　）

天体表面における万有引力による位置エネルギー＝（　$-\frac{GMm}{R}$　）

全力学的エネルギー＝（　$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R}$　）＝0

v＝（　$\sqrt{\frac{2GM}{R}}$　）

4　脱出速度が光速度に達した天体をブラックホールという。質量Mの天体が崩壊してつぶれてブラックホールになるときの最大半径Rを求めよ。光速度をc，万有引力定数をGとする。

３より　c＝　$\sqrt{\frac{2GM}{R}}$　）

R＝（　$\frac{2GM}{c^2}$　）

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　）