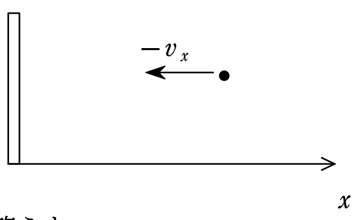
127．気体の分子運動

(1)　質量mの気体分子がx軸負の方向に速さv_xで進み、壁に垂直にぶつかった場合を考える。以下の問いに答えよ。



①　この分子の持つ運動量はいくらか。m,v_xで答えよ。

②　衝突後の分子の速度はいくらか。v_xで答えよ。

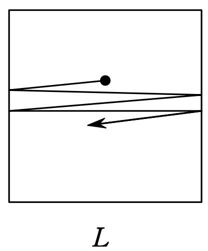
③　衝突後の分子の持つ運動量はいくらか。m,v_xで答えよ。

④　運動量はいくら変化したか。m,v_xで答えよ。

⑤　分子が壁にぶつかるとき壁から受ける力積ftは運動量の差である。力積をm,v_xで表せ。

(2)　気体分子は1秒間に何回も壁に衝突する。１辺Lの立方体内にある分子が１秒間にひとつの壁に衝突する回数から、分子が壁に与える力を求めるるのに以下の問いに答えよ。

①　分子が立方体内を１往復する距離はいくらか。



②　分子が立方体内を１往復する間に左側の壁に何回衝突するか。

③　速さv_xの分子が水平に往復するとき、この分子が１秒間に動いた距離はいくらか。

④　この分子は１秒間に立方体内を何往復するか。

⑤　この分子は１秒間に左側の壁に何回衝突するか。

⑥　この分子が１秒間に壁から受ける力積はいくらか

⑦　力積ftは力と時間の積である。⑥は１秒間の力積である。このことを考慮して、この分子が壁に与える力を求めよ。

(3)　立方体中に分子がN個存在し、各分子がx方向にv_{x1}、$v_{x2}\cdots v_{xN}$の速さで動いているとして、以下の問いに答えよ。

①　n番目の分子（速さv_{xn}）が壁に与える力はいくらか。m,L,v_{xn}で表せ。

②　全分子が壁に与える力をFとすると、Fを$m,L,v_{x1},v_{x2}\cdots v_{xN}$で表せ。

③　分子の速さの二乗の平均$\dfrac{v_{x1}{}^2+v_{x2}{}^2+\cdots+v_{xN}{}^2}{N}=\overline{v_x{}^2}$とするとき、

Fを$m,L,\overline{v_x{}^2},N$で表せ。

(4)　分子はx方向だけではなくあらゆる方向に運動している。分子の速度をベクトルで$\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$で表すとして以下の問いに答えよ。

①　分子の速さをvとすると、$v=|\vec{v}|$である。vをv_x,v_y,v_zで表せ。

②　各成分の二乗の平均を$\overline{v_x{}^2}$、$\overline{v_y{}^2}$、$\overline{v_z{}^2}$とするとき、分子の速さの二乗の平均$\overline{v^2}$を$\overline{v_x{}^2}$、$\overline{v_y{}^2}$、$\overline{v_z{}^2}$で表せ。

③　気体の圧力はどの方向も等しい。このことより$\overline{v_x{}^2}$、$\overline{v_y{}^2}$、$\overline{v_z{}^2}$の間にはどのような関

解説

(1)　①　$-mv_x$

②　分子レベルでの衝突は衝突時にエネルギーが保存されるので、衝突によって速さは変わらない。よって、v_x

③　mv_x

④　$mv_x-(-mv_x)=2mv_x$

⑤　$2mv_x$

(2)　①　$2L$　②　1回　③　v_x　④　$\dfrac{v_x}{2L}$　⑤　$\dfrac{v_x}{2L}$

⑥　1回の衝突による力積が$2mv_x$なので、$\dfrac{v_x}{2L}$回衝突すると、

$$2mv_x\times\frac{v_x}{2L}=\frac{m}{L}v_x{}^2$$

⑦　力積はftであり、1秒間の力積は力となる。

よって、$f=\dfrac{m}{L}v_x{}^2$

(3)　①　$f_n=\dfrac{m}{L}v_{xn}{}^2$

②　すべての分子が壁に与える力を加えるとよい。

$$F=\frac{m}{L}v_{x1}{}^2+\frac{m}{L}v_{x2}{}^2+\cdots+\frac{m}{L}v_{xN}{}^2$$

総和記号で表すと　$F=\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{m}{L}v_{xk}{}^2$

③　$F=\dfrac{m}{L}v_{x1}{}^2+\dfrac{m}{L}v_{x2}{}^2+\cdots+\dfrac{m}{L}v_{xN}{}^2=\dfrac{m}{L}(v_{x1}{}^2+v_{x2}{}^2+\cdots+v_{xN}{}^2)$

$\dfrac{v_{x1}{}^2+v_{x2}{}^2+\cdots+v_{xN}{}^2}{N}=\overline{v_x{}^2}$より

$v_{x1}{}^2+v_{x2}{}^2+\cdots+v_{xN}{}^2=N\overline{v_x{}^2}$

これより、

$$F=\frac{m}{L}(v_{x1}{}^2+v_{x2}{}^2+\cdots+v_{xN}{}^2)=\frac{m}{L}N\overline{v_x{}^2}$$

(4)　①　$v=|\vec{v}|=\sqrt{v_x{}^2+v_y{}^2+v_z{}^2}$

②　①より　$v^2=v_x{}^2+v_y{}^2+v_z{}^2$

これは全分子についていえるので、平均値でも成立する。

よって、

$\overline{v^2}=\overline{v_x{}^2}+\overline{v_y{}^2}+\overline{v_z{}^2}$

③　気体の圧力は等方性を持つので、方向による違いはない。よって、

$\overline{v_x{}^2}=\overline{v_y{}^2}=\overline{v_z{}^2}$

係があるか。

④　②③より$\overline{v_x^2}$を$\overline{v^2}$で表せ。

⑤　(3)③よりFを$m, L, \overline{v^2}, N$で表せ。

(5)　1辺Lの立方体内にN個の分子があるとき、気体の圧力に関して以下の問いに答えよ。

①　この立方体の１辺の面積はいくらか

②　圧力とは単位面積当たりにかかる力である。立方体内の気体が壁に与える圧力Pを
$m, L, \overline{v^2}, N$で表せ。

③　この立方体の体積VをLで表せ。

④　圧力Pを$m, V, \overline{v^2}, N$で表せ。

⑤　mNは何の物理量を意味するか

⑥　$\dfrac{mN}{V}$は何の物理量を意味するか。

⑦　気体の密度をρとするとき、気体の圧力Pをρ、$\overline{v^2}$で表せ。

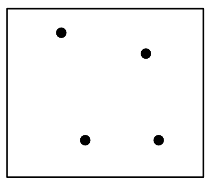
128．状態方程式

(1)　気体分子が壁に衝突する瞬間分子の速度（方向）が変化する。即ち、分子が壁に力を及ぼすことになる。これが、気体の圧力である。

右図は、ある密閉容器Aの中に分子が4個入っている。

このときの圧力をPとする。次の各問いに答えよ。

A



①　気体分子数が8個になった時の圧力をPを用いて表わせ。

②　分子の速さが2倍になった時、分子1個が壁にぶつかる瞬間に壁に与える力の大きさは何倍になるか

③　分子の速さが2倍になった時、分子が1秒間に壁にぶつかる回数は何倍になるか。

④　分子の速さが2倍になった時、圧力は何倍になるか

⑤　分子の速さが2倍になった時、分子1個あたりの運動エネルギーは何倍になるか

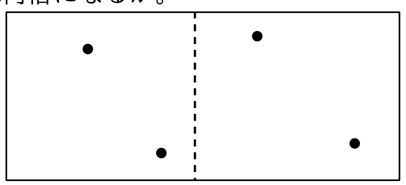
⑥　分子の運動エネルギーが2倍になった時、気体の温度は何倍になるか

⑦　分子の速さが2倍になった時、気体の温度は何倍になるか。

⑧　気体の温度が2倍になった時、気体の圧力は何倍になるか。

・　Aの容積が2倍にしたのがBである。

B



⑨　気体の体積が2倍になった時、気体の圧力は何倍になるか

⑩　気体の体積、温度、分子数はそれぞれ気体の圧力との間に比例関係があるか、反比例関係があるか答えよ。

⑪　気体の圧力をP、絶対温度をT、体積をV、モル数（分子数）をn、比例定数をRと

④　②③より

$$\overline{v^2}=\overline{v_x^2}+\overline{v_y^2}+\overline{v_z^2}=3\overline{v_x^2}$$

よって、

$$\overline{v_x^2}=\frac{1}{3}\overline{v^2}$$

⑤　$F=\dfrac{m}{L}N\overline{v_x^2}=\dfrac{1}{3}\dfrac{m}{L}N\overline{v^2}$

(5)　①　L^2　②　$P=\dfrac{1}{3}\dfrac{m}{L^3}N\overline{v^2}$　③　L^3

④　$P=\dfrac{1}{3}\dfrac{m}{V}N\overline{v^2}$

⑤　分子の質量に分子数をかけているので、気体の質量を表す。

⑥　気体の質量を体積で割っているので気体の密度を表す。

⑦　$\dfrac{mN}{V}=\rho$とおくと、

$$P=\frac{1}{3}\frac{m}{V}N\overline{v^2}=\frac{1}{3}\rho\overline{v^2}$$

解説

(1)　①　分子が2倍になると圧力は2倍になる　$2P$

②　2倍　③　2倍速くなるので衝突回数は2倍になる。　2倍

④　1回の衝突で壁に与える力が2倍になり、衝突回数が2倍になるので、4倍になる。

⑤　運動エネルギーは$\dfrac{1}{2}mv^2$なので、4倍

⑥　温度とは分子1個あたりの運動エネルギーなので、2倍

⑦　分子の速さが2倍になると、運動エネルギーが4倍になるので温度は4倍になる。

⑧　分子の速さが2倍になった時、温度は4倍になり、圧力も4倍になるので、温度と圧力は比例する。よって温度が2倍になれば圧力は2倍になる。

⑨　体積が2倍になると、Aと同じ体積内の分子数は半分になっているので、圧力は$\dfrac{1}{2}$になる。反比例することになる。

⑩　気体の圧力は　体積に反比例、温度に比例、分子数に比例

⑪　比例の場合は$y=ax$、反比例の場合は$y=\dfrac{a}{x}$となるので、比例は分子、反比例は分母に文字があることになる。よって、

$$P=R\frac{nT}{V}\quad \text{または}\quad PV=nRT$$

これを状態方程式という。Rは気体定数と呼ばれ8.31 J/molKである。

するとき、これらの要素の間にどのような関係式が成り立つか

129．気体分子の速度

(1) 気体の圧力は$P=\frac{1}{3}\frac{mN}{V}\overline{v^2}$で表される。状態方程式$PV=nRT$を用いて以下の問いに答えよ。

① 気体分子1個の平均運動エネルギー$\frac{1}{2}m\overline{v^2}$を$N,n,R,T$で表せ。

② $\frac{N}{n}$はどのような定数を表すか

③ $\frac{N}{n}=N_0$とおいて、$\frac{1}{2}m\overline{v^2}$を$R,N_0,T$で表せ。

④ $\frac{R}{N_0}=k$（このkをボルツマン定数という）とおいて、$\frac{1}{2}m\overline{v^2}$を$k,T$で表せ。

⑤ 気体の分子量をμとおいて、mN_0（1モルの質量）をμで表せ。

（mN_0はkg単位であり、μはg単位であることに注意）

⑥ 気体の二乗平均速度をμ、R、Tで表せ。

⑦ 気体分子の平均速度は二乗平均速度の平方根で表される。

二乗平均速度の平方根$\sqrt{\overline{v^2}}$をμ、R、Tで表せ。

130．内部エネルギー

(1) 気体の圧力は$P=\frac{1}{3}\frac{mN}{V}\overline{v^2}$で表される。状態方程式$PV=nRT$を用いて以下の問いに答えよ。

① 気体分子1個の平均運動エネルギー$\frac{1}{2}m\overline{v^2}$を$N,n,R,T$で表せ。

② 気体分子の運動エネルギーの総和をn,R,Tで表せ。

(2) 速度ベクトル$\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$で運動している質量mの分子の運動エネルギーに関して以下の問いに答えよ。

① この分子の運動エネルギーをv_x、v_y、v_z、mを用いて表せ。

② 気体分子の各方向成分は二乗平均速度$\overline{v_x^2}$、$\overline{v_y^2}$、$\overline{v_z^2}$で表される。運動エネルギーの平均の各方向成分を$\overline{v_x^2}$、$\overline{v_y^2}$、$\overline{v_z^2}$で表せ。

解説

(1) ① $P=\frac{1}{3}\frac{mN}{V}\overline{v^2}$より　$PV=\frac{1}{3}m\overline{v^2}N=nRT$

これより、$\frac{1}{2}m\overline{v^2}=\frac{3}{2}\frac{n}{N}RT$

② 1モルの分子数（アボガドロ定数）

③ ①より　$\frac{1}{2}m\overline{v^2}=\frac{3}{2}\frac{RT}{N_0}$

④ $\frac{1}{2}m\overline{v^2}=\frac{3}{2}kT$

ボルツマン定数は$k=\frac{R}{N_0}=\frac{8.31}{6.02\times10^{23}}=1.38\times10^{-23}$J/molK

⑤ 気体分子量は1モルの質量であるがg単位である。

よって、$mN_0=\mu\times10^{-3}$

⑥ $\frac{1}{2}m\overline{v^2}=\frac{3}{2}\frac{RT}{N_0}$より　$\frac{1}{2}mN_0\overline{v^2}=\frac{3}{2}RT$　$\mu\times10^{-3}\overline{v^2}=3RT$

よって、　$\overline{v^2}=\frac{3RT}{10^{-3}\mu}$

⑦ $\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3RT}{10^{-3}\mu}}$

27℃における窒素分子の速度　$\sqrt{\frac{3\times8.31\times300}{10^{-3}\times28}}=517$m/s

自由電子の速度（電子の分子量水素原子の$\frac{1}{1800}$）

$\sqrt{\frac{3\times8.31\times300}{10^{-3}\times\frac{1}{1800}}}=116$km/s

解説

(1) ① $P=\frac{1}{3}\frac{mN}{V}\overline{v^2}$より　$PV=\frac{1}{3}m\overline{v^2}N=nRT$

これより、$\frac{1}{2}m\overline{v^2}=\frac{3}{2}\frac{n}{N}RT$

② 気体分子の運動エネルギーの総和は$\frac{1}{2}m\overline{v^2}\times N$で表されるので、

$\frac{1}{2}m\overline{v^2}\times N=\frac{3}{2}\frac{n}{N}RT\times N=\frac{3}{2}nRT$

(2) ① $v^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2$より、

$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv_x^2+\frac{1}{2}mv_y^2+\frac{1}{2}mv_z^2$

③　$\overline{v_x^2}=\overline{v_y^2}=\overline{v_z^2}$、　$\overline{v^2}=\overline{v_x^2}+\overline{v_y^2}+\overline{v_z^2}$の関係があることを利用して運動エネルギーの各方向成分をn,R,Tで表せ。

④　全体の運動エネルギーは各方向成分の和になっていることを示せ。

⑤　運動エネルギーは各方向成分に等分されることを示せ。

(3)　物質にはHe（単原子分子）、H_2（二原子分子）、CO_2（三原子分子）、H_2O（液体）、Fe（固体）などがある。これらの物質には次のエネルギーは存在しているかどうか判定せよ。ただし、気体分子の分子間力は無視できるものとする。

①　併進運動エネルギー

②　回転運動エネルギー

③　分子間力位置エネルギー

④　分子の振動による運動エネルギー

(4)　物質の内部エネルギーとは物質内部に存在するエネルギーで(3)のエネルギーの和と考えられる。単原子分子の内部エネルギーに関して以下の問いに答えよ。

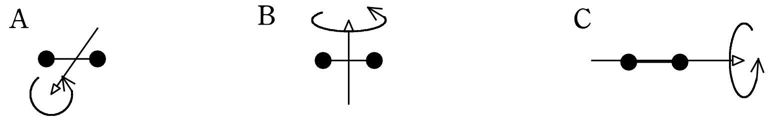
①　単原子分子の内部エネルギーには(3)の①～④のエネルギーのうちどれが存在するか。

②　単原子分子の内部エネルギーUをn,R,Tで表せ。

(5)　二原子分子の内部エネルギーに関して以下の問いに答えよ。

①　二原子分子の併進運動エネルギーをn,R,Tで表せ。

②　二原子分子には回転運動エネルギーが存在する。エネルギーは等分配されるので、併進運動エネルギーと等しいエネルギーが分配されることになる。二原子分子の回転方向は何方向あるか下の図を見て判断せよ。



③　併進運動エネルギーは一方向あたり$\frac{1}{2}nRT$である。一方向あたりのエネルギーは等分配されることを利用し、回転運動エネルギーをn,R,Tで表せ。

④　二原子分子の内部エネルギーをn,R,Tで表せ。

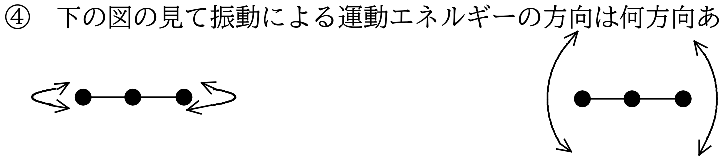
(6)　CO_2分子の内部エネルギーに関して以下の問いに答えよ。

①　併進運動エネルギーをn,R,Tで表せ。

②　CO_2分子は直線上に3つの原子が並んでいる。このことから、回転方向は何方向あることがわかるか。

③　回転運動エネルギーをn,R,Tで表せ。

④　下の図の見て振動による運動エネルギーの方向は何方向あるか判断せよ。



⑤　振動による運動エネルギーをn,R,Tで表せ。

⑥　CO_2分子の内部エネルギーをn,R,Tで表せ。

②　x成分：$\frac{1}{2}m\overline{v_x^2}$、$y$成分：$\frac{1}{2}m\overline{v_y^2}$、$z$成分：$\frac{1}{2}m\overline{v_z^2}$

③　$\overline{v_x^2}=\overline{v_y^2}=\overline{v_z^2}$より、$\frac{1}{2}m\overline{v_x^2}=\frac{1}{2}m\overline{v_y^2}=\frac{1}{2}m\overline{v_z^2}$

$\overline{v^2}=\overline{v_x^2}+\overline{v_y^2}+\overline{v_z^2}$より、

$$\frac{1}{2}m\overline{v^2}=\frac{1}{2}m\overline{v_x^2}+\frac{1}{2}m\overline{v_y^2}+\frac{1}{2}m\overline{v_z^2}=\frac{3}{2}nRT$$

よって、

$$\frac{1}{2}m\overline{v_x^2}=\frac{1}{2}m\overline{v_y^2}=\frac{1}{2}m\overline{v_z^2}=\frac{1}{2}nRT$$

④　全運動エネルギーが$\frac{3}{2}nRT$でx,y,z各成分が$\frac{1}{2}nRT$なので、各成分の和になっている。

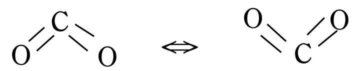
⑤　各成分等しく$\frac{1}{2}nRT$になっているので、各成分に等分されていることになる。（エネルギーは各成分に等分配される。）

(3)

Heは単原子分子なので、分子の回転はない。分子間力も存在せず。1個では振動ができない。よって、①のみ存在している。

H_2は二原子分子なので回転できるが分子間力無し、振動できない。よって、①②が存在。

CO_2は二原子分子に加えて右図のように振動ができる。よって、①②④が存在



H_2Oは液体なので、自由に動ける上に周辺分子から分子間力を受けているので、①②③④すべて存在する。

Feは固体なので、分子が自由に動けない。つまり、①②はない。よって、③④が存在している。

①　He、H_2、CO_2、H_2O

②　H_2、CO_2、H_2O

③　H_2O、Fe

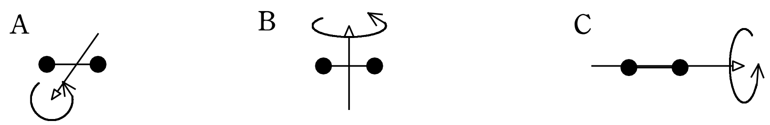
④　CO_2、H_2O、Fe

(4)　①　単原子分子の内部エネルギーには併進運動エネルギー以外にはない。

②　$U=\frac{3}{2}nRT$

(5)　①　併進運動は三方向なので、$\frac{1}{2}nRT\times3=\frac{3}{2}nRT$

②



(7) 金属Feは金属結合しており、結合は等方的である。この金属の内部エネルギーに関して以下の問いに答えよ。

① 併進運動エネルギーおよび回転運動エネルギーはそれぞれいくらか

② 金属結合に方向性がないことから考えて分子間力（金属結合力）の位置エネルギーは何方向あるか

③ Feの分子間力位置エネルギーをn,R,Tで表せ。

④ Fe原子の振動方向は何方向か

⑤ Fe原子の振動による運動エネルギーをn,R,Tで表せ。

⑥ Feの内部エネルギーをn,R,Tで表せ。

131. 内部エネルギーの増加

物質は内部エネルギーを持っているが、この内部エネルギーは周りと同じ温度の物体から通常取り出すことができない。この物体が周囲より温度が高い状態であれば取り出して利用可能である。利用可能な内部エネルギーは内部エネルギーの増加分となる。物体に外部から熱を加えると、物体の温度が上昇するために内部エネルギーが増加する。この内部エネルギーの増加分に関して以下の問いに答えよ。

① 単原子分子の内部エネルギーは$U=\frac{3}{2}nRT$である。この気体に熱を加えて温度がTか

上図のA,Bは回転できるがCは回転にならない。よって、二方向

③ $\frac{1}{2}nRT\times2=nRT$

④ 二原子分子の内部エネルギー＝併進運動エネルギー＋回転運動エネルギー

$=\frac{3}{2}nRT+nRT=\frac{5}{2}nRT$

(6) ① 併進運動は三方向なので、$\frac{1}{2}nRT\times3=\frac{3}{2}nRT$

② 二原子分子と同じく二方向

③ $\frac{1}{2}nRT\times2=nRT$

④

水平方向の振動と鉛直方向の振動の二方向ある

⑤ $\frac{1}{2}nRT\times2=nRT$

⑥ CO_2分子の内部エネルギー

＝併進運動エネルギー＋回転運動エネルギー＋振動運動エネルギー

$=\frac{3}{2}nRT+nRT+nRT=\frac{7}{2}nRT$

(7) ① 併進運動エネルギー、回転運動エネルギーともに0

② 三方向ある

③ $\frac{1}{2}nRT\times3=\frac{3}{2}nRT$

④ 三方向

⑤ $\frac{1}{2}nRT\times3=\frac{3}{2}nRT$

⑥ Feの内部エネルギー＝分子間力位置エネルギー＋振動による運動エネルギー

$=\frac{3}{2}nRT+\frac{3}{2}nRT=3nRT$

解説

① $U=\frac{3}{2}nRT$より　$U+\Delta U=\frac{3}{2}nR(T+\Delta T)$

展開すると、　$U+\Delta U=\frac{3}{2}nRT+\frac{3}{2}nR\Delta T$

これより、　$\Delta U=\frac{3}{2}nR\Delta T$

② ①と同様に　$\Delta U=\frac{5}{2}nR\Delta T$

ら$T+\Delta T$に温度が上昇したとき、内部エネルギーがUから$U+\Delta U$に増加したとき、ΔUとΔTの関係を導け

② 二原子分子の内部エネルギーは$U=\frac{5}{2}nRT$である。ΔUとΔTの関係を導け

③ CO_2の内部エネルギーは$U=\frac{7}{2}nRT$である。ΔUとΔTの関係を導け

④ 金属の内部エネルギーは$U=3nRT$である。ΔUとΔTの関係を導け

132. モル比熱とグラム比熱

(1) グラム比熱は1gの物質を1K上昇させる熱のことである。グラム比熱がc[J/gK]の物質に関して以下の問いに答えよ。

① m[g]の物質を1K上昇させる熱を熱容量という。このm[g]の物質の熱容量はいくらか。

② m[g]の物質をΔT[K]上昇させるために必要な熱Qはいくらか。m、ΔT、cで表せ。

(2) モル比熱は1molの物質を1K上昇させる熱のことである。モル比熱C_v[J/molK]とする。通常物質は熱を加えると体積が増加し、体積増加に熱を使うために体積が増加した場合としていない場合では比熱が異なる。ここでは体積が変化しないものとして以下の問いに答えよ。（この比熱を定積モル比熱という）

① n[mol]の物質を1K上昇させる熱はいくらか。n、C_vで表せ。

② n[mol]の物質をΔT[K]上昇させるために必要な熱Qはいくらか。n、ΔT、C_vで表せ。

(3) モル比熱とグラム比熱の換算は可能である。分子量μ、グラム比熱c[J/gK]の物質m[g]をΔT[K]上昇させるための熱がQ[J]必要であったとして以下の問いに答えよ。

① Qをm、ΔT、cで表せ。

② m[g]のモル数nをμ、mで表せ。

③ Qをn、μ、ΔT、cで表せ。

④ 定積モル比熱C_vをμ、cで表せ。

(4) 物質の体積が変化しない場合加えた熱はすべて内部エネルギーの増加に使われる。次の物質の定積モル比熱、グラム比熱をそれぞれ求めよ。分子量をμ、気体定数をRとする。

① 単原子分子

② 二原子分子

③ CO_2

④ 金属

(5) 定積モル比熱C_v[J/molK]の物質n[mol]の温度がΔT上昇したときの内部エネルギーの増加量ΔUをC_v、n、ΔTで表せ。

(6) 定積モル比熱C_v[J/molK]の物質n[mol]の温度がTのときの内部エネルギーUをC_v、n、Tで表せ。ただし(5)式はすべての温度領域で成立するものとする。

③ $\Delta U=\frac{7}{2}nR\Delta T$

④ $\Delta U=3nR\Delta T$

解説

(1) ① mc ② $Q=mc\Delta T$

(2) ① nC_v ② $Q=nC_v\Delta T$

(3) ① $Q=mc\Delta T$ ② $n=\frac{m}{\mu}$

③ ②より$m=n\mu$ これを①に代入して $Q=n\mu c\Delta T$

④ $Q=nC_v\Delta T$と比較することにより $C_v=\mu c$

(4) ① $\Delta U=\frac{3}{2}nRT$より、$Q=\Delta U=\frac{3}{2}nRT$。$Q=nC_v\Delta T$と比較することにより

モル比熱：$\frac{3}{2}R$ グラム比熱：$\frac{3}{2}\frac{R}{\mu}$

② $\Delta U=\frac{5}{2}nRT$より、①と同様にして

モル比熱：$\frac{5}{2}R$ グラム比熱：$\frac{5}{2}\frac{R}{\mu}$

③ $\Delta U=\frac{7}{2}nRT$より、①と同様にして

モル比熱：$\frac{7}{2}R$ グラム比熱：$\frac{7}{2}\frac{R}{\mu}$

④ $\Delta U=3nRT$より、①と同様にして

モル比熱：$3R$ グラム比熱：$3\frac{R}{\mu}$

＜例＞ 鉄（Fe=56）のモル比熱とグラム比熱

モル比熱：$3R=3\times8.31=25.0$J/molK

グラム比熱：$3\frac{R}{\mu}=\frac{25.0}{56}=0.446$J/gK

水グラム比熱4.2J/gKのモル比熱は$4.2\times18=75.6=9R$

(5) $Q=nC_v\Delta T$で体積が変化しないので、$Q=\Delta U$が成立。よって、

$\Delta U=nC_v\Delta T$

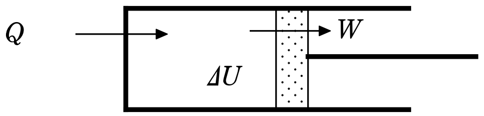
(6) ΔTを微小量とするとdtとなる。よって、$dU=nC_vdt$

全温度領域でこの式が成立するので、0KからT[K]まで積分すると、

$U=\int_0^T nC_vdt=nC_vT$

133．定積変化

(1)　シリンダーの中に気体を入れ滑らかに動くピストンで気体を閉じ込めた。この気体に熱Qを加えると気体の内部エネルギーが$\varDelta U$上昇し、気体がピストンを動かし、



仕事Wを行ったとする。気体の物質量（モル数）をn、温度が$\varDelta T$上昇し、気体定数をR
、定積モル比熱をC_vとする。これに関して以下の問いに答えよ。

①　Qを$\varDelta U$とWで表せ。（熱力学第一法則）

②　$\varDelta U$をn、$\varDelta T$、C_vで表せ。

(2)　(1)の装置でピストンを固定した。他の条件は(1)と同じにして、以下の問いに答えよ。（このような変化を低席変化という）

①　このとき気体がした仕事Wはいくらか。

②　Qを$\varDelta U$で表せ。

③　$\varDelta U$をn、$\varDelta T$、C_vで表せ。

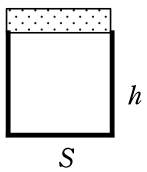
・　気体の温度がTから$T+\varDelta T$に上昇する間に圧力がPから$\varDelta P$に上昇した。

④　熱Qを加える前の気体の状態方程式をたてよ。

⑤　熱を加えた後の気体の状態方程式をたてよ。

⑥　④⑤より$\varDelta P$、$\varDelta T$の関係式を導け。

(3)　右図のような円筒形の容器（底面積S、深さh）を机上の設置し質量mの円盤でふたをした。この状態での温度をT_0、大気圧をP_0とする。手を使ってこの容器を暖めると、ふたが浮き上がった。気体定数をRとして以下の問いに答えよ。重力加速度の大きさをgとする。



①　この円盤に作用する重力の大きさはいくらか

②　円盤を浮き上がらせるためには圧力はいくら上昇しなければならないか。

③　状態方程式を立てて気体のモル数nをP_0、S、h、R、T_0で表せ。

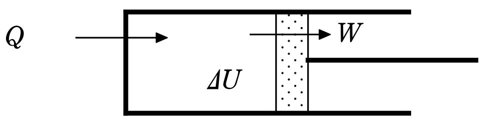
④　温度上昇を$\varDelta T$、圧力上昇を$\varDelta P$とするとき、$\varDelta P$、$\varDelta T$の間に成り立つ関係式を導け。

⑤　円盤が浮き上がる瞬間までに温度はいくら上昇したか。

⑥　円盤が浮き上がるまでに加えた熱はいくらか

134．定圧変化

(1)　断面積Sのシリンダーの中に気体を入れ滑らかに動くピストンで物質量n、絶対温度T_0の気体を閉じ込めた。この気体に熱Qを加えると気体の内部エネルギーが



よって、$U=nC_vT$

解説

(1)　①　$Q=\varDelta U+W$　②　$\varDelta U=nC_v\varDelta T$

(2)　①　ピストンが動いていないので気体は仕事をしていない。よって、0

②　$Q=\varDelta U+W$より　$Q=\varDelta U$

③　$\varDelta U=nC_v\varDelta T$

④　$PV=nRT$

⑤　$(P+\varDelta P)V=nR(T+\varDelta T)$

⑥　⑤を展開すると、$PV+\varDelta PV=nRT+nR\varDelta T$

④を用いて　$\varDelta PV=nR\varDelta T$

(3)　①　mg

②　もともと内部の気体は大気圧とつりあっているのであるから、圧力上昇分の力$\varDelta PS$が重力とつりあっていればよい。

$\varDelta PS=mg$　　$\varDelta P=\dfrac{mg}{S}$

③　$P_0Sh=nRT_0$　　これより、$n=\dfrac{P_0Sh}{RT_0}$

④　(2)⑥より、$\varDelta PV=nR\varDelta T$

$$\varDelta PSh=\frac{P_0Sh}{RT_0}R\varDelta T$$

簡単にすると、　$\varDelta P=\dfrac{P_0}{T_0}\varDelta T$

⑤　②より　$\varDelta P=\dfrac{P_0}{T_0}\varDelta T=\dfrac{mg}{S}$

これより、　$\varDelta T=\dfrac{mg}{S}\dfrac{T_0}{P_0}$

⑥　$Q=\varDelta U=nC_v\varDelta T=\dfrac{P_0Sh}{RT_0}C_v\dfrac{mg}{S}\dfrac{T_0}{P_0}=\dfrac{mgh}{R}C_v$

解説

(1)　①　P_0S　②　P_0Sx　③　$\varDelta V=Sx$　④　$W=P_0\varDelta V$

⑤　$\varDelta U=nC_v\varDelta T$

⑥　$Q=\varDelta U+W=nC_v\varDelta T+P_0\varDelta V$

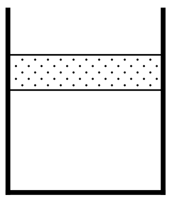
⑦　$P_0V_0=nRT_0$

ΔU上昇し、気体がピストンを距離x動かし、
仕事Wを行ったとする。大気圧をP_0、気体定数をR　、定積モル比熱をC_vとする。これに関して以下の問いに答えよ。

① この気体がピストンに加えた力をP_0、Sで答えよ。
② この気体がピストンにした仕事をP_0、S、xで答えよ。
③ 気体の体積がV_0から$V_0+\Delta V$に変化したとすると、ΔVをS,xで表せ。
④ 気体がピストンにした仕事WをP_0、ΔVで表せ。
⑤ 気体の内部エネルギーの増加ΔUをn、ΔT、C_vで表せ。
⑥ 気体に加えた熱Qをn、ΔT、C_v、P_0、ΔVで表せ。
⑦ 熱を加える前の気体の状態方程式をP_0、V_0、n、T_0、Rで表せ。
⑧ 熱を加えた後の気体の状態方程式をP_0、V_0、n、T_0、ΔT、R、ΔV、で表せ。
⑨ 定圧変化においてΔTとΔVの関係をn、P_0、Rを含めて導け。
⑩ 気体に加えた熱Qをn、ΔT、C_v、Rで表せ。
⑪ 気体を定圧変化で体積変化させた状態でのモル比熱を定圧モル比熱という。⑩式を用いて、この気体の定圧モル比熱をC_v、Rで表せ。

(2) 次の物質の定圧モル比熱を気体定数Rで表せ。
① He
② O_2
③ CO_2
④ Fe（固体は熱を加えても体積がほとんど変わらない。）

(3) 右図のように断面積Sのシリンダー内に質量mのピストンを乗せて定積モル比熱C_v、絶対温度T_0の気体を閉じ込めたところ、高さはhになった。この気体に熱を加えたところ、ピストンはゆっくりとx上昇した。温度がΔT上昇した。大気圧をP_0、気体定数をRとして以下の問いに答えよ。



① 気体の圧力はいくらか
② 気体のモル数をnとして、熱を加える前の気体の状態方程式をP_0、S、h、R、T_0を用いてたて、nを上記文字で表せ。
③ 熱を加えた後の気体の状態方程式をP_0、S、h、R、T_0、x、ΔT、nで表せ。
④ 気体の温度上昇ΔTをx,h,T_0で表せ。
⑤ この気体に加えた熱をC_v、n、ΔT、Rで表せ。
⑥ ⑤の熱をP_0,S,x,R,C_vで表せ。

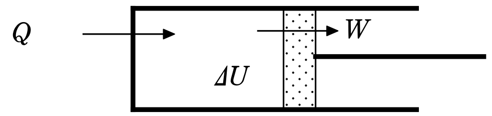
⑧ $P_0(V_0+\Delta V)=nR(T_0+\Delta T)$
⑨ ⑧式を展開して　$P_0V_0+P_0\Delta V=nRT_0+nR\Delta T$
⑦を用いると　$P_0\Delta V=nR\Delta T$
⑩ ⑥に代入して　$Q=nC_v\Delta T+P_0\Delta V=nC_v\Delta T+nR\Delta T$
$=n\Delta T(C_v+R)$
⑪ モル比熱は$n=1$、$\Delta T=1$のときの熱であるので、
⑩より、$C_p=C_v+R$

(2) ① $C_v=\frac{3}{2}R$　なので、$C_p=C_v+R=\frac{3}{2}R+R=\frac{5}{2}R$
② $C_v=\frac{5}{2}R$　なので、$C_p=C_v+R=\frac{5}{2}R+R=\frac{7}{2}R$
③ $C_v=\frac{7}{2}R$　なので、$C_p=C_v+R=\frac{7}{2}R+R=\frac{9}{2}R$
④ $C_p=C_v+R$は気体について成立する。液体や固体では熱を加えて増加する体積は微小なので無視できる。よって、定積モル比熱と定圧モル比熱は等しい。
よって、$C_p=3R$

(3) ① 気体の圧力はピストンの圧力と大気圧の和である。
$$P=P_0+\frac{mg}{S}$$
② $P_0Sh=nRT_0$　　$n=\frac{P_0Sh}{RT_0}$
③ $P_0S(h+x)=nR(T_0+\Delta T)$で表せ。
④ ③を展開して　$P_0Sh+P_0Sx=nRT_0+nR\Delta T$
これは、$P_0Sx=nR\Delta T$
②を代入して　$P_0Sx=\frac{P_0Sh}{RT_0}R\Delta T$
簡単にすると、　$\Delta T=\frac{x}{h}T_0$
⑤ $Q=n\Delta T(C_v+R)$
⑥ $Q=n\Delta T(C_v+R)=\frac{P_0Sh}{RT_0}\frac{x}{h}T_0(C_v+R)=\frac{P_0Sx(C_v+R)}{R}$

135．等温変化

(1)　シリンダー内に体積V_0の気体を滑らかに動くピストンで閉じ込めた。このときの気体はモル数nで、圧力が大気圧P_0と等しく、絶対温度がT_0であった。



熱Qを加え、温度が一定になるようにピストンを引いたところ。圧力がP、体積がVとなった。

これに関して、以下の問いに答えよ。

①　内部エネルギーの増加ΔUはいくらか

②　気体がピストンにした仕事WとQはどのような関係にあるか。

③　熱を加える前と後でそれぞれ状態方程式をたてよ。

④　圧力Pと体積Vの積PVをP_0、V_0で表せ。

(2)　(1)と同じ装置で圧力がp、体積がvのとき、微小熱dQを加え、温度一定になるように微小にピストンを動かして微小体積dvだけ増加させたとき、圧力がdpだけ増加したとする。これに関して以下の問いに答えよ。

①　微小熱を加える前と後で状態方程式を立てよ。

②　dvとdpの関係式を導け。（$dpdv=0$と考えても差し支えない）

③　②式を積の微分公式（$(fg)'=f'g+fg'$）を使うことにより②式を積分せよ。
その結果どのような法則が導かれるか

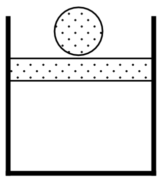
④　体積がdv増加する間に気体がピストンにした仕事をp,dvで表せ。

⑤　pvをP_0、V_0で表せ。

⑥　④の仕事を$v=V_0$からVの範囲で定積分することにより、ピストンが体積V_0からVに増加させるとき、気体がピストンにした仕事を求めよ。

⑥　⑤のとき、この気体に加えた熱はいくらか

(3)　右図のように断面積Sのシリンダー内に温度T_0の気体を質量の無視でき、滑らかに動くピストンで閉じ込めた。大気圧はP_0、気体定数はRである。この状態でピストンはシリンダー下部よりhの高さにあった。静かに質量mのおもりをピストンに乗せたところ、ピストンは下がった。このとき、気体の温度は変わらなかった。重力加速度の大きさをgとして以下の問いに答えよ。



①　ピストンが内部の気体を押す圧力はいくらか。

②　ピストンが下がった後のシリンダー内の気体の圧力はいくらか

③　ピストンが下がった後、シリンダー内の気体の体積はいくらになったか。

④　ピストンが下がった後、ピストンの高さはいくらになったか。

⑤　ピストンが下がった距離はいくらか

⑥　おもりがシリンダー内の気体にした仕事はいくらか

⑦　大気圧がシリンダー内の気体にした仕事はいくらか

解説

(1)　①　$\Delta U=nC_v\Delta T$であり、温度が一定なので、$\Delta T=0$　よって、$\Delta U=0$

②　$Q=\Delta U+W$で$\Delta U=0$より、$Q=W$

③　前：$P_0V_0=nRT_0$
後：$PV=nRT_0$

④　③より$P_0V_0=PV$

これはボイルの法則である。等温変化ではボイルの法則が成立する。

(2)　①　前　$pv=nRT_0$　後　$(p+dp)(v+dv)=nRT_0$

②　①式を展開すると、$pv+vdp+pdv+dpdv=nRT_0$
熱を加える前の式より　$vdp+pdv+dpdv=0$

ここで、$dpdv$はdp、dvが微小量なので、$vdp+pdv$に比べてはるかに小さくなる。よって、
$vdp+pdv=0$

③　両辺をdtで割ると、

$$v\frac{dp}{dt}+p\frac{dv}{dt}=0$$

これは、　$vp'+pv'=0$
となるので、　$(pv)'=0$
微分して0になるものは定数である。よって、$pv=$一定
ボイルの法則である。

④　pdv

⑤　$pv=P_0V_0$　（ボイルの法則）

⑤　$W=\int_{V_0}^{V}pdv$　　pは変化するので、定数扱いできない。

$p=\dfrac{P_0V_0}{v}$より、

$$=\int_{V_0}^{V}\frac{P_0V_0}{v}dv=P_0V_0\Big[\log v\Big]_{V_0}^{V}=P_0V_0\log\frac{V}{V_0}$$

⑥　$Q=W$より、$Q=P_0V_0\log\dfrac{V}{V_0}$

(3)　①　$P_0+\dfrac{mg}{S}$　②　①と同じ$P_0+\dfrac{mg}{S}$

③　ボイルの法則より　$P_0Sh=\left(P_0+\dfrac{mg}{S}\right)v$

これより、$v=\dfrac{P_0Sh}{P_0S+mg}S$

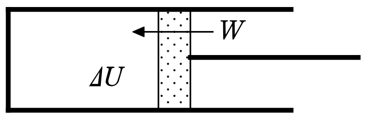
④　③より　$\dfrac{P_0Sh}{P_0S+mg}$

⑧　シリンダー内の気体がピストンにした仕事はいくらか

⑨　シリンダー内の気体から外部に放出された熱はいくらか

136.　断熱変化

(1)　断熱材でできているシリンダー内に大気圧P_0、体積V_0、絶対温度T_0の気体を断熱材でできた滑らかに動くピストンで閉じ込め気体に熱の出入りがないようにピストンを押し込んだ。気体の定積モル比熱をC_v、気体定数をRとし、ピストンを押し込んだときのシリンダー内の気体がされた仕事をWとする。これに関して以下の問いに答えよ。



①　気体が外部から吸収した熱はいくらか

②　気体の内部エネルギーの増加$\varDelta U$をWで表せ。

③　気体のモル数をnとするとき、気体の温度上昇$\varDelta T$をW, n, C_vで表せ。

(2)　(1)と同じ装置でモル数nの気体の圧力がp、体積がv,絶対温度tの瞬間、体積がdv、圧力がdp、温度がdt増加したとする。気体の定積モル比熱を$\frac{3}{2}R$、気体定数をRとして、以下の問いに答えよ。

①　断熱変化させる前の気体の状態方程式を立てよ。

②　変化後の気体の状態方程式をたてよ。

③　$dpdv=0$とおけるとして、dp, dv, dtの関係式を導け

④　気体の内部エネルギーの増加をn, R, dtで表せ。

⑤　気体が外部にした仕事をp, dvで表せ。

⑥　熱力学第一法則よりdvとdtの関係を導け。

⑦　③⑥よりdtを消去しdpとdvの関係式を分母を払った簡潔な形にせよ。

⑨　⑧式の両辺にp^2v^4をかけて積分せよ

⑤　ピストンの下がった距離は$h-\dfrac{P_0Sh}{P_0S+mg}=\dfrac{mgh}{P_0S+mg}$

⑥　$W=Fs=mg\times\dfrac{mgh}{P_0S+mg}=\dfrac{m^2g^2h}{P_0S+mg}$

⑦　$W=Fs=P_0S\times\dfrac{mgh}{P_0S+mg}=\dfrac{P_0Smgh}{P_0S+mg}$

⑧　シリンダー内の気体の圧力はピストンに対して上向きにかかるがピストンが動く方向は下向きなので、この仕事は負である。⑥⑦の仕事で気体がエネルギーを得ているのでこの仕事の和の逆符号がシリンダー内の気体がした仕事である。

よって、

$$W=-\frac{m^2g^2h}{P_0S+mg}-\frac{P_0Smgh}{P_0S+mg}=-mgh$$

⑨　⑧よりシリンダー内の気体が得たエネルギーはmghであり、この場合は等温変化であるから得たエネルギーはすべて熱として放出している。よって、放出した熱は

mgh

解説

(1)　①　断熱変化であるんので　$Q=0$

②　Wは気体がされた仕事なので、気体がした仕事とは逆符号である。

よって、$Q=\varDelta U-W$、$Q=0$より、$\varDelta U=W$

③　$\varDelta U=nC_v\varDelta T$　より、$W=nC_v\varDelta T$　よって、$\varDelta T=\dfrac{W}{nC_v}$

(2)　①　$pv=nRt$　②　$(p+dp)(v+dv)=nR(t+dt)$

③　②式を展開して　$pv+pdv+vdp+dpdv=nRt+nRdt$

①より

$pdv+vdp=nRdt$

④　$dU=\dfrac{3}{2}nRdt$　⑤　$dW=pdv$

⑥　④⑤より

$Q=\varDelta U+W$より　$\dfrac{3}{2}nRdt+pdv=0$

⑦　⑥に③を代入して

$\dfrac{3}{2}(pdv+vdp)+pdv=0$

簡単にして

$5pdv+3vdp=0$

⑧　両辺にp^2v^4をかけて

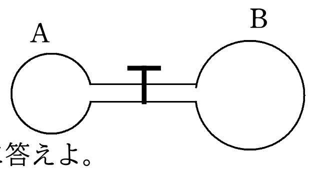
$5p^3v^4dv+3p^2v^5dp=0$

dxで割ると

$\left((fg)'=f'g+fg'\text{及び}nx^{n-1}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{dx^n}{dx}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{dx^n}{dt}=(x^n)'\text{を使うこと}\right)$

137．二つの気室の問題

(1)　右図のように体積vの気質Aと体積Vの気質Bが細い管でつながれており、管に栓をしてある。この気室はともに断熱材でできている。次のような操作をしたとき、気体定数をRとして、以下の問いに答えよ。



・気室Aに温度T、n_1モルの気体を入れた。
気室Bは真空である。

① 気室Aに入れた気体の圧力はいくらか

・栓を開くと気室Aの気体が気室Bに移った。

② 気体の内部エネルギーはいくら増加したか。

③ 気体の温度はいくらになったか

④ 気体の圧力p_1はいくらになったか

・内部の気体を取り出してAを真空、Bにn_2モル、温度Tの気体を入れた。

⑤ 気室Bの気体の圧力はいくらか

・栓を開いた気室Bの気体がAに流れ込んだ

⑥ 気体の温度はいくらになったか

⑦ 気体の圧力p_2はいくらになったか

・内部の気体を取り出して、Aにn_1モル、Bにn_2モル、ともに温度Tの気体を入れて、栓を開いた。

⑧ 気体の圧力pはいくらになったか。

⑨ $p=p_1+p_2$（ドルトンの分圧の法則）が成立していることを確認せよ

(2)　(1)と同じ装置において気室Aにn_1モル、温度T_1の気体を気室Bにn_2モル、温度T_2の気体を入れて栓を開いた。気体はともに定積モル比熱C_vとする。これに関して以下の問いに答えよ。

① 気室Aにn_1モル、温度T_1の気体を入れ、気室Bを真空にして栓を開いたとき、気室内の圧力p_1はいくらか

② 気室Bにn_2モル、温度T_2の気体を入れ、気室Aを真空にして栓を開いたとき、気室内の圧力p_2はいくらか

③ 気室A内の気体、気室B内の気体の内部エネルギーをそれぞれ求めよ。

④ 栓を開いた後の温度をTとするとき、TをT_1、T_2で表せ。

$5p^3v^4\dfrac{dv}{dx}+3p^2v^5\dfrac{dp}{dx}=0$

$p^3(v^5)'+(p^3)'v^5=0$

積分して

$p^3v^5=$一定

これが単原子分子の断熱変化の式である

解説

(1) ① 状態方程式$pv=n_1RT$　より、$p=\dfrac{n_1RT}{v}$

② 気室Bが真空なので、気体分子の速度は変わらず、内部エネルギーは変化しない。
よって、0

③ 内部エネルギーが変わらないので温度は変化しない。とってT

④ 状態方程式　$p_1(V+v)=n_1RT$　より、$p_1=\dfrac{n_1RT}{V+v}$

⑤ 状態方程式$pV=n_2RT$より　$p=\dfrac{n_2RT}{v}$

⑥ 同じくT

⑦ 状態方程式　$p_2(V+v)=n_2RT$　より、$p_2=\dfrac{n_2RT}{V+v}$

⑧ 状態方程式　$p(V+v)=(n_1+n_2)RT$　より、　$p=\dfrac{(n_1+n_2)RT}{V+v}$

⑨ $p=\dfrac{(n_1+n_2)RT}{V+v}=\dfrac{n_1RT}{V+v}+\dfrac{n_2RT}{V+v}=p_1+p_2$

分圧の法則が成立している

(2) ① 状態方程式　$p_1(V+v)=n_1RT_1$より　$p_1=\dfrac{n_1RT_1}{V+v}$

② 状態方程式　$p_2(V+v)=n_2RT_2$より　$p_2=\dfrac{n_2RT_2}{V+v}$

③ A：$C_vn_1RT_1$　B：$C_vn_2RT_2$

④ 栓を開いた後の気体の内部エネルギーは$C_v(n_1+n_2)RT$
よって、　$C_v(n_1+n_2)RT=C_vn_1RT_1+C_vn_2RT_2$
これは、　$T=\dfrac{n_1T_1+n_2T_2}{n_1+n_2}$

⑤ $p(V+v)=(n_1+n_2)RT=n_1RT_1+n_2RT_2$
$p=\dfrac{n_1RT_1}{V+v}+\dfrac{n_2RT_2}{V+v}$

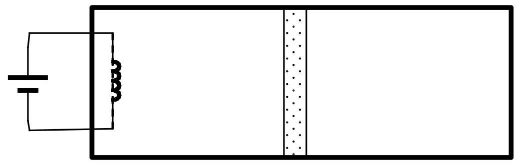
⑥ ⑤より　$p=p_1+p_2$

(3) ① 状態方程式　$pV=nRT_0$　より　$p=\dfrac{nRT_0}{V}$

⑤　栓を開いた後の気体の圧力を状態方程式を立てることにより導け

⑥　$p=p_1+p_2$（ドルトンの分圧の法則）が成立していることを確認せよ

(3)　右図のように断熱材で囲まれた内容積$2V$の直方体の容器の中央に断熱材でできた厚さが無視でき滑らかに動く仕切りを設置した。左側の気室には電熱線が外部とつながっており、熱を加えることができるようになっている。左右の気室にnモル、T_0、定積モル比熱がcの気体を入れた。気体定数をRとして、以下の問いに答えよ。



①　気体の圧力はいくらか

・　気体に熱を加えると仕切り版が右に移動し、左右の体積比が2:1になったところで静止した。このときの気体の圧力は最初の圧力の2倍になっていた。

②　左右の気体の温度はいくらになっているか。T_0で答えよ。

③　左気室内の気体の内部エネルギーの増加量をn,c,T_0で表せ。

④　右気室の気体がされた仕事はいくらか。n,c,T_0で表せ。

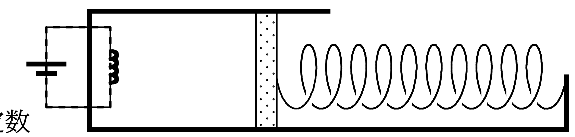
⑤　左気室内の気体の内部エネルギーはいくら増加したか。n,c,T_0で表せ。

⑥　左気室内の気体が外部にした仕事はいくらか。n,c,T_0で表せ。

⑦　電熱線で加えた熱はいくらか。n,c,T_0で表せ。

138.　ばねの問題

断面積Sで断熱材でできているシリンダーとピストンを右図のように設置しシリンダー内に電熱線を使って熱を加えられるようにした。ピストンにはばね定数kのばねを取り付け、シリンダー内に大気圧P_0、絶対温度T_0の気体を閉じ込めたところ、ばねが自然長の状態でピストンが静止した。このとき、シリンダー内の気体の体積はSlであった。電熱線を通して熱を加えると、ピストンは右方向にゆっくりと移動し、気体の体積が$2Sl$になった。気体定数をR、気体の定積モル比熱を$\frac{3}{2}R$として、以下の問いに答えよ。



①　この気体のモル数はいくらか。P_0、S、l、R、T_0で表せ。

②　ピストンが再び静止したとき、ばねがピストンに与えた力はいくらか、k,lで表せ。

②　左気室の状態方程式　$2p\times\frac{4}{3}V=nRT_1$

よって、$T_1=\frac{8pV}{3nR}=\frac{8V}{3nR}\times\frac{nRT_0}{V}=\frac{8}{3}T_0$

右気室の状態方程式　$2p\times\frac{2}{3}V=nRT_2$

$T_2=\frac{4pV}{3nR}=\frac{4V}{3nR}\times\frac{nRT_0}{V}=\frac{4}{3}T_0$

③　右気室内は温度がT_0から$\frac{4}{3}T_0$に増加しているので、

内部エネルギーの増加は$\Delta U=nc\Delta T=nc\left(\frac{4}{3}T_0-T_0\right)=\frac{1}{3}ncT_0$

④　右気室内の気体は熱の出入りがないので、断熱変化である。よって、$Q=0$

気体がした仕事　$W=-\Delta U=-\frac{1}{3}ncT_0$

この場合は気体がされた仕事なので、$\frac{1}{3}ncT_0$

⑤　左気室内は温度がT_0から$\frac{8}{3}T_0$に増加しているので、

内部エネルギーの増加は$\Delta U=nc\Delta T=nc\left(\frac{8}{3}T_0-T_0\right)=\frac{5}{3}ncT_0$

⑥　左気室内の気体が外部にした仕事は右気室内の気体がされた仕事である。

よって、$W=\frac{1}{3}ncT_0$

⑦　熱力学第一法則より

$Q=\Delta U+W=\frac{5}{3}ncT_0+\frac{1}{3}ncT_0=2ncT_0$

(解説)

①　状態方程式より　$P_0Sl=nRT_0$　より、$n=\frac{P_0Sl}{RT_0}$

②　kl　③　$P=P_0+\frac{kl}{S}$

④　$-P_0Sl$　力の向きとピストンの移動方向が逆なので仕事は負

⑤　$-\frac{1}{2}kl^2$　　力の向きとピストンの移動方向が逆なので仕事は負

⑥　大気圧とばねのした仕事は大気圧とばねがもらったエネルギーを意味しているのでこの和の逆符号が気体のした仕事となる。

$W=P_0Sl+\frac{1}{2}kl^2$

⑦　$\left(P_0+\frac{kl}{S}\right)S\cdot 2l=nRT=\frac{P_0Sl}{RT_0}RT=\frac{P_0Sl}{T_0}T$

③　シリンダー内の気体の圧力Pはいくらか。

④　大気圧がピストンにした仕事はいくらか。P_0、S、lで表せ。

⑤　ばねがピストンにした仕事はいくらか。k,lで表せ。

⑥　シリンダー内の気体がピストンにした仕事はいくらか。P_0、S、k、lで表せ。

⑦　ピストンが再び静止したときの気体の状態方程式を立てて、気体の温度を求めよ。
　P_0、S、k、l、T_0で表せ。

⑧　内部エネルギーの増加量を求めよ。P_0、S、k、lで表せ。

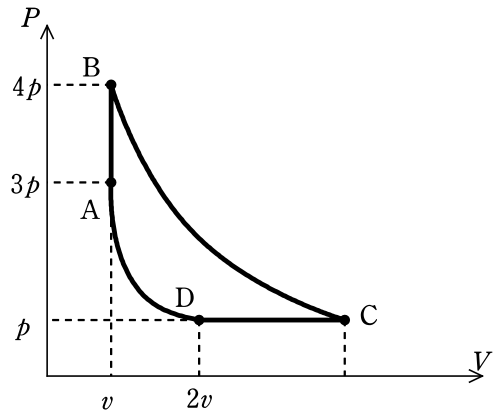
⑨　電熱線で加えた熱はいくらか。P_0、S、k、lで表せ。

139.　熱サイクルの問題

　圧力$3p$、体積v、1モルの気体がシリンダー内に入っている。この状態をAとする。

　この気体に熱を加えて定積変化をさせ、気体の圧力を$4p$の状態にした。この状態をBとする。その後等温変化で圧力がpになる気体の体積を増加させた。このとき気体に熱を$4pv$加えた。この状態をCとする。

　この状態からさらに定圧変化をさて体積を$2v$にした。最後に断熱圧縮でAの状態に戻した。この気体は単原子分子の気体であり、気体定数をRとして、以下の問いに答えよ。



・ AB間において

①　Aの状態の気体の温度はいくらか

②　Bの状態の気体の温度はいくらか

③　AB間で内部エネルギーがいくら増加したか

④　AB間で気体が外部にした仕事はいくらか

⑤　AB間で気体に加えた熱はいくらか

・ BC間において

⑥　Cの状態の気体の温度はいくらか

⑦　Cの状態の気体の体積はいくらか

⑧　このBC間で気体の内部エネルギーはいくら増加したか

⑨　BC間で気体がした仕事はいくらか

・ CD間において

⑩　Dの状態における気体の温度はいくらか

⑪　CD間で内部エネルギーはいくら減少したか

⑫　CD間で気体が外部にした仕事はいくらか

⑬　CD間で気体が放出した熱はいくらか

$$2\left(P_0+\frac{kl}{S}\right)=\frac{P_0}{T_0}T$$

これより、$T=2\left(P_0+\frac{kl}{S}\right)\frac{T_0}{P_0}=2\left(1+\frac{kl}{P_0S}\right)T_0$

⑧　温度変化は

$$\Delta T=T-T_0=2\left(1+\frac{kl}{P_0S}\right)T_0-T_0=\left(1+\frac{2kl}{P_0S}\right)T_0$$

$$\Delta U=\frac{3}{2}nR\Delta T=\frac{3}{2}\frac{P_0Sl}{RT_0}R\left(1+\frac{2kl}{P_0S}\right)T_0=\frac{3}{2}P_0Sl\left(1+\frac{2kl}{P_0S}\right)=\frac{3}{2}P_0Sl+3kl^2$$

⑨　$Q=\Delta U+W=P_0Sl+\frac{1}{2}kl^2+\frac{3}{2}P_0Sl+3kl^2=\frac{5}{2}P_0Sl+\frac{7}{2}kl^2$

解説

①　$3pv=RT_1$　より　$T_1=\frac{3pv}{R}$　②　$4pv=RT_2$　より$T_2=\frac{4pv}{R}$

③　$\Delta U=\frac{3}{2}R\Delta T=\frac{3}{2}R(T_2-T_1)=\frac{3}{2}R\left(\frac{4pv}{R}-\frac{3pv}{R}\right)=\frac{3}{2}pv$

④　体積変化がないので　$W=0$

⑤　$Q=\Delta U+W=\frac{3}{2}pv$

⑥　BCは等温変化なのでBと同じ温度　$\frac{4pv}{R}$

⑦　ボイルの法則が成立するので　$4pv=p\times V$　よって、$V=4v$

⑧　温度変化がないので内部エネルギーは変わらない。よって、$\Delta U=0$

⑨　$Q=\Delta U+W$で、題意より$Q=4pv$なので、$W=4pv$

⑩　状態方程式より　$2pv=RT_4$　$T_4=\frac{2pv}{R}$

⑪　$\Delta U=\frac{3}{2}R\Delta T=\frac{3}{2}R(T_4-T_2)=\frac{3}{2}R\left(\frac{2pv}{R}-\frac{4pv}{R}\right)=-3pv$

　減少した熱であるので、$3pv$

⑫　$W=p\Delta V=p(2v-4v)=-2pv$

⑬　$Q=\Delta U+W=-3pv-2pv=-5pv$

⑭　$\Delta U=\frac{3}{2}R\Delta T=\frac{3}{2}R(T_1-T_4)=\frac{3}{2}R\left(\frac{3pv}{R}-\frac{2pv}{R}\right)=\frac{3}{2}pv$

⑮　断熱変化なので、$Q=0$

⑯　$W=Q-\Delta U=-\frac{3}{2}pv$

⑰　AB間で$\frac{3}{2}pv$、BC間で$4pv$加えているので合わせて、$\frac{11}{2}pv$

　放出した熱は考慮しない

⑱　正の仕事がBC間で$4pv$、CD間で$-2pv$、DA間で$-\frac{3}{2}pv$

・ DA間において

⑭ DA間において内部エネルギーはいくら増加したか。

⑮ DA間で外部から加えた熱はいくらか

⑯ DA間で気体が外部にした仕事はいくらか

・ ABCDAのサイクルについて

⑰ このサイクルの間に気体に外部から加えた熱はいくらか

⑱ このサイクルの間に気体が外部にした仕事はいくらか
（気体の状態を変化させるための仕事は含まない）

⑲ この熱機関の熱効率はいくらか

⑳ 加えた熱のうち外部へ放出された割合はいくらか

である。仕事は外部へのエネルギーの放出であるが、負の仕事はエネルギーを気体の戻すことになるので、外部へ放出することのできる仕事は

$$4pv-2pv-\frac{3}{2}pv=\frac{1}{2}pv$$

⑲ 熱効率は加えた熱に対する外部への仕事の割合である。

よって、 $e=\dfrac{W}{Q}=\dfrac{1}{11}=9.1\%$

⑳ 放出した熱はCD間で$-5pv$である。

よって、 $\dfrac{5pv}{\dfrac{11}{2}pv}=\dfrac{10}{11}=90.9\%$

加えた熱は放出されるものと仕事になるものに分けられるのである。
これを下のような表にまとめるとわかりやすい。
問題に与えられているところだけを表すと

	P	V	T
A	$3p$	v	
B	$4p$	v	
C	p		
D	p	$2v$	

	Q	ΔU	W
AB			0
BC	$4pv$	0	
CD			
DA	0		

わかるところから埋めていくとよい。

	P	V	T
A	$3p$	v	$\dfrac{3pv}{R}$
B	$4p$	v	$\dfrac{4pv}{R}$
C	p	$4v$	$\dfrac{4pv}{R}$
D	p	$2v$	$\dfrac{2pv}{R}$

	Q	ΔU	W
AB	$\dfrac{3}{2}pv$	$\dfrac{3}{2}pv$	0
BC	$4pv$	0	$4pv$
CD	$-5pv$	$-3pv$	$-2pv$
DA	0	$\dfrac{3}{2}pv$	$-\dfrac{3}{2}pv$