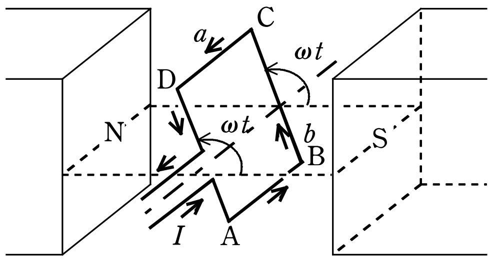
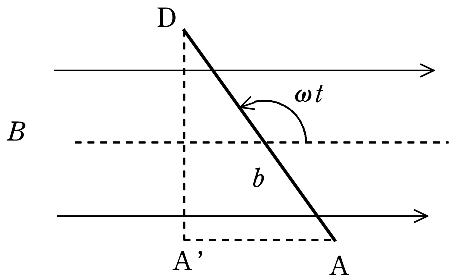
112．交流発電機

(1)　一様な磁束密度Bの磁場内で奥行き（CD）＝a、高さ（BC）＝bの長さを持つ長方形の形をしたコイルABCDを角速度ωで回転させた。コイルはN回巻である。右図はその回転の様子を立体的に表したもので、その下の図は正面から見たものである。この図はコイルが回転を始めてからの時刻がtの時のものである。　これに関して以下の問いに答えよ。



①　AD＝bである。ADの磁束に直角な成分をA’Dとするとき、∠DAA’をω, tで表せ。



②　A’Dの長さをb, ω, tで表せ。

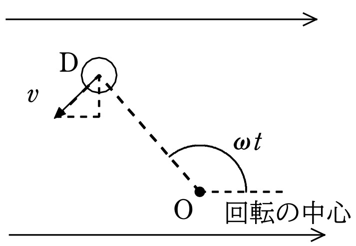
③　①と同様にしてB’を決めると、長方形A’B’CDが磁束を受け止める面となる。この面の面積をa, b, ω, tで表せ。

④　コイル内の磁束ϕをa, b, ω, t, Bで表せ。

⑤　誘導起電力は$V=-N\dfrac{d\phi}{dt}$で表される。
誘導起電力をa, b, ω, t, B, Nで表せ。

⑥　誘導起電力の最大値をV_0と置くとき、誘導起電力をV_0, ω, tで表せ。符号は無視してよい。

(2)　(1)と同じ装置の誘導起電力を導線CDの起電力に注目して誘導してみよう。
右図は導線CDをDの側から見た図である。この導線はOを回転の中心として角速度ωで等速円運動をしている。導線CDの速さをvとして以下の問いに答えよ。



①　回転半径はいくらか

②　速さvをb, ωで表せ。

③　vの鉛直成分をb, ω, tで表せ。

④　導線CDの誘導起電力の大きさをa, b, ω, t, Bで表せ。

⑤　導線AB間での誘導起電力の大きさをa, b, ω, t, Bで表せ。

⑥　このコイルはN回巻である。このコイルの誘導起電力をa, b, ω, t, B, Nで表せ。

113．三角関数の平均値（数学）

(1)　$y=\sin^2 x$について以下の問いに答えよ。

①　二倍角の公式を用いて$\cos 2x$を$\sin x$で表せ。

②　$\sin^2 x$を$\cos 2x$で表せ。

解説

(1)　①　$\pi-\omega t$　②　$b\sin(\pi-\omega t)=b\sin\omega t$　③　$S=ab\sin\omega t$

④　$\phi=BS=Bab\sin\omega t$

⑤　$V=-N\dfrac{d\phi}{dt}=-N\dfrac{d}{dt}(Bab\sin\omega t)=-NBab\omega\cos\omega t$

⑥　$V_0\cos\omega t$

(2)　①　$\dfrac{b}{2}$　②　$v=r\omega$より　$v=\dfrac{1}{2}b\omega$

③　$-v\cos(\pi-\omega t)=v\cos\omega t=\dfrac{1}{2}b\omega\cos\omega t$

④　$V=vBl$より、$V=\dfrac{1}{2}b\omega\cos\omega t\times Ba=\dfrac{1}{2}Bab\omega\cos\omega t$

⑤　CD間と等しいので、$\dfrac{1}{2}Bab\omega\cos\omega t$

⑥　BC間DA間での誘導起電力は0なので、コイル1巻き当たり$2\times\dfrac{1}{2}Bab\omega\cos\omega t$

よって、$Bab\omega\cos\omega t$である。　コイルはN巻きなので、
$NBab\omega\cos\omega t$

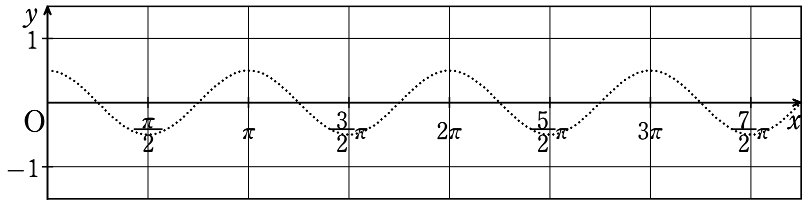
((1)、(2)ともに同じ答えとなる。このように起電力が時間とともに常に変化する電流を交流という。）

解説

①　$\cos 2x=1-2\sin^2 x$　②　$\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$

③　下のグラフは$y=\dfrac{\cos 2x}{2}$のグラフである。このグラフを元に②を用いて

$y=\sin^2 x$のグラフを書き込め



④　$y=\sin^2 x$において、$0\leqq x\leqq 2\pi$の区間での平均値はいくらになるか

⑤　$y=A\sin^2 x$において、$0\leqq x\leqq 2\pi$の区間での平均値はいくらになるか

⑥　$y=A\sin^2 ax$において、$0\leqq x\leqq \dfrac{2\pi}{a}$の区間での平均値はいくらになるか

⑦　定義域を十分に広く取ったとき、$y=A\sin x$の相加平均はいくらになるか。

(2)　実数a,bに対して$\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$を二乗平均という。二乗平均に対して以下の問いに答えよ。

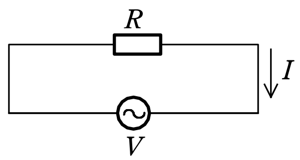
①　実数a,b,cの二乗平均を表す式を書け

②　$y=\sin^2 x$において、$0\leqq x\leqq 2\pi$の区間での平均値を利用して、同区間の$y=\sin x$の二乗平均を求めよ。

③　xの定義域を十分に広く取るとき、$y=A\sin x$の二乗平均はいくらになるか

114.　抵抗と交流

(1)　交流と直流は異なるが、非常に短い時間を考えれば、交流は直流と同じように考えることができる。つまり、瞬間値（tを含んだ式）を用いる限りにおいては直流の公式がそのまま適用できるのである。右図は起電力$V=V_0\sin\omega t$で表される交流電源に抵抗値Rの抵抗を取り付けた。これに関して以下の問いに答えよ。



①　電流IをV_0,ω,t,Rで表せ。

②　電流の最大値をI_0とするとき、I_0をV_0,Rで表せ。

③　電圧の最大値をV_0、電流の最大値をI_0としたオームの法則は成立するかどうか判定せよ。

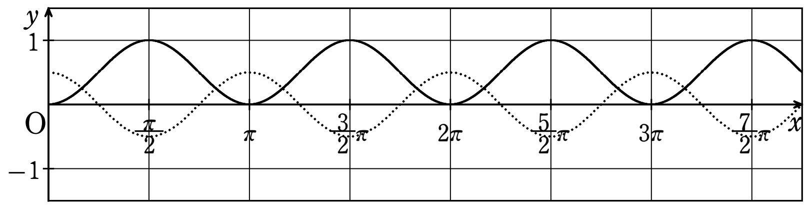
④　$P=IV$である。この抵抗の消費電力をR,V_0,ω,tで表せ。

⑤　消費電力は瞬間の消費に意味がなく、一定期間の消費電力となるため、消費電力の平均値が意味を持つようになる。消費電力の平均値$\overline{P}$をR,V_0で表せ。

⑥　②を用いて平均消費電力をR,I_0で表した式、及びI_0,V_0で表した式を求めよ。

(2)　(1)の回路において電源の起電力が$V=V_0\sin\omega t$で表されるとき、電流が$I=I_0\sin\omega t$で

③



④　グラフより$\dfrac{1}{2}$

⑤　yの値がA倍になるので、平均値もA倍になる。よって、$\dfrac{1}{2}A$

⑥　x方向のサイズが変化するのみであるからyの平均値には影響しない。

よって、$\dfrac{1}{2}A$

⑦　＋と－が同数あるので、0。

三角関数は基本的に相加平均がすべて0になるので、2乗平均を使うことが多い。

(2)　①　$\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}$

②　$y=\sin^2 x$の平均値は(1)より$\dfrac{1}{2}$。これより、二乗平均は$\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

③　$y=A\sin^2 x$の平均値が$\dfrac{1}{2}A$なので、$y=A^2\sin^2 x$の平均値は$\dfrac{1}{2}A^2$となる。

よって、$y=A\sin x$の二乗平均は$\sqrt{\dfrac{1}{2}A^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}A$

解説

(1)　①　$V=RI$より$I=\dfrac{V}{R}=\dfrac{V_0\sin\omega t}{R}=\dfrac{V_0}{R}\sin\omega t$

②　$I=I_0\sin\omega t$　①と比較して　$I_0=\dfrac{V_0}{R}$

③　②より　$V_0=RI_0$　　これはオームの法則に他ならない。

④　$P=IV=\dfrac{V_0}{R}\sin\omega t\cdot V_0\sin\omega t=\dfrac{{V_0}^2}{R}\sin^2\omega t$

⑤　$y=A\sin^2 x$の平均値は$\dfrac{1}{2}A$である。これより、　④の平均値は$\overline{P}=\dfrac{{V_0}^2}{2R}$

⑥　$V_0=RI_0$より、

$\overline{P}=\dfrac{{V_0}^2}{2R}=\dfrac{1}{2}I_0V_0=\dfrac{1}{2}{I_0}^2{V_0}^2$

(2)　①　$y=A\sin^2 x$の平均値は$\dfrac{1}{2}A$である。これより、$V^2={V_0}^2\sin^2\omega t$の平均値は$\dfrac{1}{2}{V_0}^2$

である。よって、二乗平均$V_e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}V_0$

あるとする。以下の問いに答えよ。

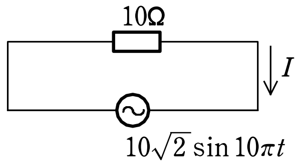
① 起電力Vの二乗平均V_e（実効値）をV_0で表せ。

② 電流Iの二乗平均I_e（実効値）をI_0で表せ。

③ (1)の結果を用いて抵抗の消費電力の平均値$\overline{P}$をI_e,V_eで表した式、R,I_eで表した式、R,V_eで表した式をそれぞれ求めよ。

④ V_eをR,I_eで表し、実効値でオームの法則が成立するかどうか答えよ。

(3) 右図のように起電力$V=10\sqrt{2}\sin 10\pi t$[V]で表される交流電源に10Ωの抵抗をつないだ。これに関して以下の問いに答えよ。



① 最大電圧はいくらか

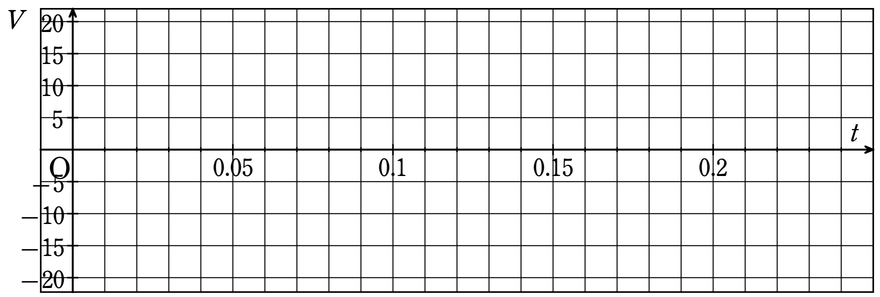
② 最大電流はいくらか

③ 電圧･電流の実効値はそれぞれいくらか。

④ この交流の周期はいくらか

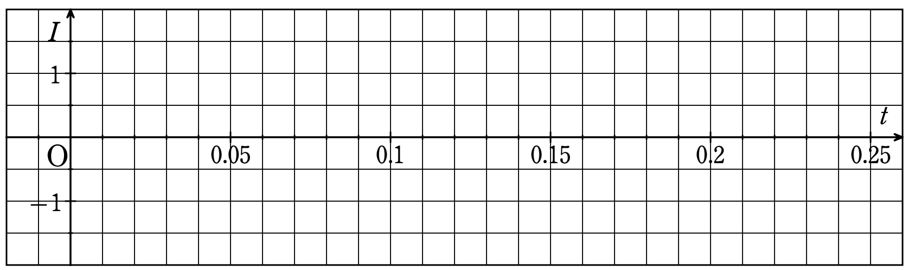
⑤ この交流の周波数（振動数）はいくらか

⑥ 電圧のグラフを描け



⑦ 電流の瞬間値を導け

⑧ 電流のグラフを描け



⑨ 消費電力の瞬間値を導け

⑩ 消費電力のグラフを描け

これが電圧の実効値である。

② ①と同様にして　二乗平均$I_e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}I_0$

③ (1)より、$\overline{P}=\dfrac{V_0{}^2}{2R}=\dfrac{1}{2}I_0V_0=\dfrac{1}{2}I_0{}^2V_0{}^2$

①②より　$I_0=\sqrt{2}\,I_e$、$V_0=\sqrt{2}\,V_e$

これを代入して、　$\overline{P}=\dfrac{V_e{}^2}{R}=I_eV_e=I_e{}^2V_e{}^2$

（実効値を使えば直流の電力の式と同じ式が使える。）

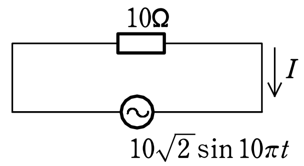
④ $V_0=RI_0$の両辺を$\sqrt{2}$で割ると、$\dfrac{V_0}{\sqrt{2}}=R\dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$

$I_0=\sqrt{2}\,I_e$、$V_0=\sqrt{2}\,V_e$を代入すると、

$V_e=RI_e$

これはオームの法則である。これより、実効値でもオームの法則が成立していることが分かる

(3) ① $V_0=10\sqrt{2}\,\mathrm{V}$



② $V_0=RI_0$より　$I_0=\dfrac{V_0}{R}=\dfrac{10\sqrt{2}}{10}=\sqrt{2}\,\mathrm{A}$

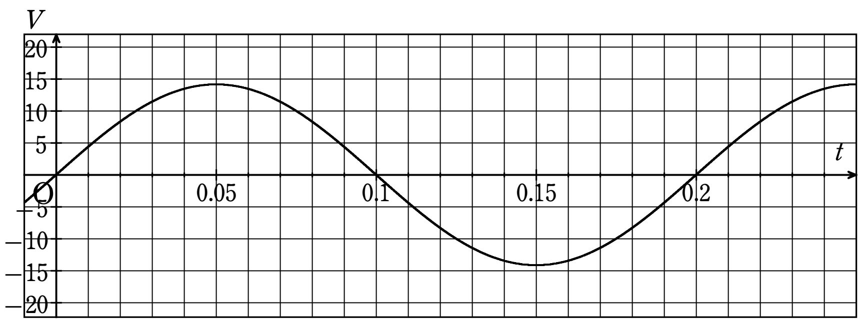
③ $V_e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}V_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times 10\sqrt{2}=10\mathrm{V}$

$I_e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}I_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}=1\mathrm{A}$

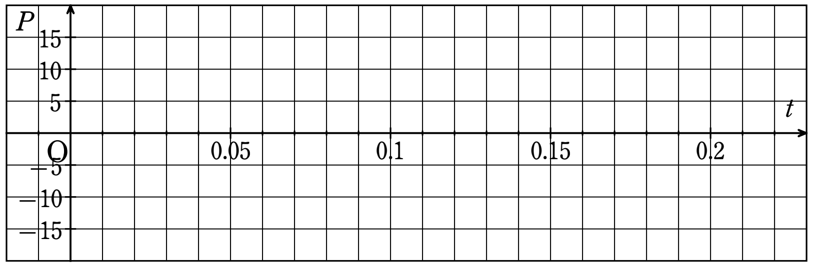
④ $\omega=10\pi$　周期$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{10\pi}=0.2\mathrm{s}$

⑤ 周波数$f=\dfrac{1}{T}=\dfrac{1}{0.2}=5\mathrm{Hz}$

⑥

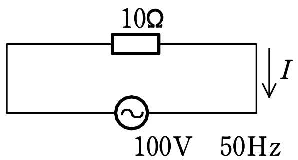


⑦ $I=\dfrac{V}{R}=\dfrac{10\sqrt{2}\sin 10\pi t}{10}=\sqrt{2}\sin 10\pi t$



⑪　消費電力の平均値はいくらか

(4)　右図のように100V（実効値）50Hzの交流電源に10Ωの抵抗をつないだ。これに関して以下の問いに答えよ。



①　振動周期はいくらか

②　最大電圧はいくらか

③　電流の周波数はいくらか

④　電流の実効値はいくらか

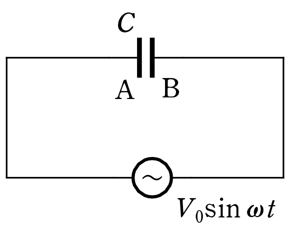
⑤　最大電流はいくらか

⑥　消費電力の平均値はいくらか

⑦　瞬間最大消費電力はいくらか

115.　交流とコンデンサー

(1)　電気容量Cのコンデンサーに電源電圧が$V_0\sin\omega t$で表される交流電源をつないだ。交流の瞬間値に関しては直流公式が使える。このことを利用して以下の問いに答えよ。

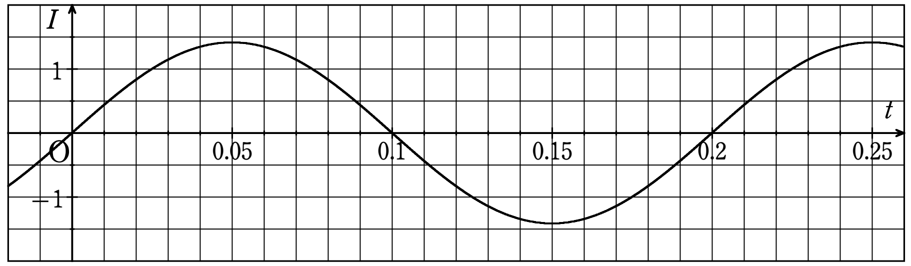


・ 交流における電圧の符号は右回りを正とする。回路に沿って右回りに回るとき、電位が上昇すれば正電圧、電位が下降すれば負電圧と定義する。電流も右周りに流れるとき正とする。

①　交流電源の電圧が正のとき、コンデンサーの電圧の符号を答えよ。

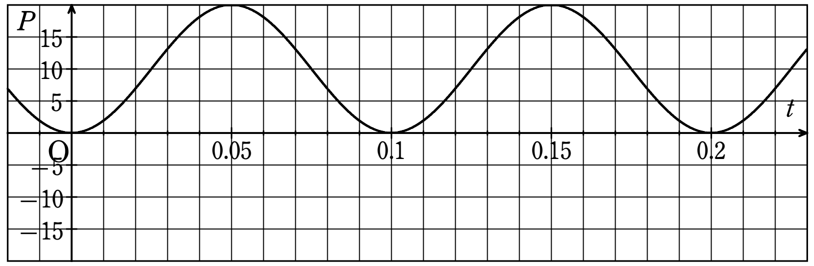
②　電源電圧が$V_0\sin\omega t$のとき、コンデンサーの電圧を式で表せ。

⑧



⑨　$P=IV=\sqrt{2}\sin 10\pi t\times 10\sqrt{2}\sin 10\pi t=20\sin^2 10\pi t$

⑩　$P=20\sin^2 10\pi t=10(1-\cos 20\pi t)$　　　$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$



⑪　グラフより10W

(4)　①　$T=\dfrac{1}{f}=\dfrac{1}{50}=0.02\text{s}$

②　$V_0=\sqrt{2}V_e=100\sqrt{2}\,\text{V}$

③　電圧の周波数がそのまま電流の周波数になっている。50Hz

④　$V_e=RI_e$より、$I_e=\dfrac{V_e}{R}=\dfrac{100}{10}=10\text{A}$

⑤　$I_0=\sqrt{2}I_e=10\sqrt{2}\,\text{A}$

⑥　$\overline{P}=I_eV_e=10\times 100=1000\text{W}$

⑦　(3)のグラフより最大値は平均値の2倍であることが分かる。よって、2000W

解説

(1)　①　電圧一周が0である。回路に沿って電圧の和を取ったとき、0にならなければならない。そのため、電源が正であればコンデンサーは負でなければならない。この場合右回りに電圧を測るのであるからA極が正極、B極が負極となっている。

電圧は負

②　電圧を回路に沿って一周させると０になるので、コンデンサーの電圧をVとすれば、$V_0\sin\omega t+V=0$。これより、$V=-V_0\sin\omega t$

③　$Q=CV$より、$-\dfrac{Q}{C}$　　（②より、コンデンサーの符号は負である。）

④　$-V_0\sin\omega t=-\dfrac{Q}{C}$　　簡単にして、　$V_0\sin\omega t=\dfrac{Q}{C}$

・ コンデンサーにQの電荷がたまっているとき、微小時間dtに微小電荷dQが電源からコンデンサーに流れ込んだとする。

③ 電源電圧を正としてコンデンサーの電圧をQ,Cを用いて表せ。（符号に注意せよ）

④ ②③を用いて方程式を作れ

⑤ 電流Iをdt,dQで表せ。（電流は1秒間に流れた電気量である）

⑥ ④式を$Q=$の形にして⑤に代入し電流IをV_0,ω,tで表せ。

⑦ 最大電流I_0をV_0,ω,Cで表せ。

⑧ 電圧の実効値をV_eとするとき、電流の実効値I_eをV_e,ω,Cで表せ。

⑨ リアクタンスとはコンデンサーを抵抗と考えたときの抵抗値のことである。コンデンサーのリアクタンスをω,Cで表せ。

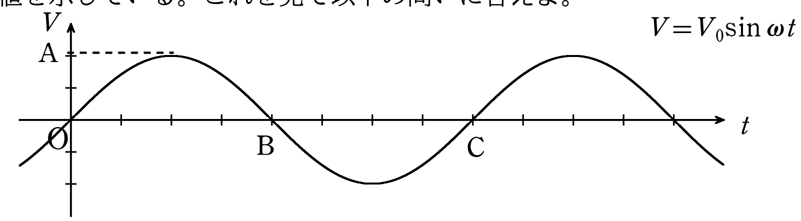
⑩ コンデンサーの瞬間消費電力PをV_0,ω,C,tで表せ。$2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$ を用いて簡略化せよ。

⑪ コンデンサーの消費電力の平均値はいくらか。

⑫ コンデンサーの消費電力が⑩のようになる理由を書いた下の文章を完成せよ。

・ 電源が正のとき、電源から出た電気エネルギーは（　ア　）に蓄えられ、電源の電圧が負になったとき、（　イ　）にたまった電気エネルギーが（　ウ　）に戻るため、電気エネルギーの消費がない。

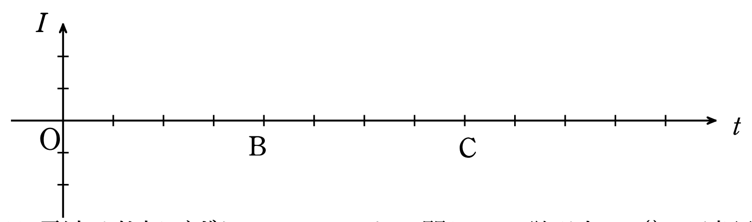
(2) (1)と同じ問題において下のグラフは電源電圧のグラフである。グラフ中A,B,Cは目盛りの値を示している。これを見て以下の問いに答えよ。



① AをV_0で表せ。

② B,Cをωで表せ。

③ 下に電流Iのグラフを描け



④ 電圧と電流は位相がずれている。これに関しての説明文の（）に適語を入れよ。

・ 電源に最大電圧がかかったときは、コンデンサーも（　ア　）になっており、コンデンサーに最も多くの（　イ　）がたまっていることになる。コンデンサーに電流が流れ込むと電気量が（　ウ　）するので、最大電荷がたまっているときは電流が（　エ　）ことになる。そのために、電源電圧が最大のとき、電流は（　オ　）となっている。

⑤ 電流は1秒間に流れた電気量であるので、$I=\dfrac{dQ}{dt}$

⑥ ④より、$Q=CV_0\sin\omega t$

$$I=\frac{dQ}{dt}=\frac{d(CV_0\sin\omega t)}{dt}=\omega CV_0\cos\omega t$$

⑦ ⑥より、$I_0=\omega CV_0$

⑧ 実効値は最大値の$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$であるから、⑦に$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$をかけると、

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}I_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\omega CV_0$　これより、$I_e=\omega CV_e$

⑨ ⑧より、$V_e=\dfrac{1}{\omega C}I_e$となる。オームの法則　$V=RI$と比較することにより、

抵抗に相当するのは$\dfrac{1}{\omega C}$であることが分かる。

よって、リアクタンスは　$\dfrac{1}{\omega C}$

⑩ $P=IV=\omega CV_0\cos\omega t\times V_0\sin\omega t=\dfrac{1}{2}\omega CV_0{}^2\times 2\sin\omega t\cos\omega t$

$=\dfrac{1}{2}\omega CV_0{}^2\sin 2\omega t$

⑪ $y=\sin x$の平均値は0なので、$\overline{P}=0$

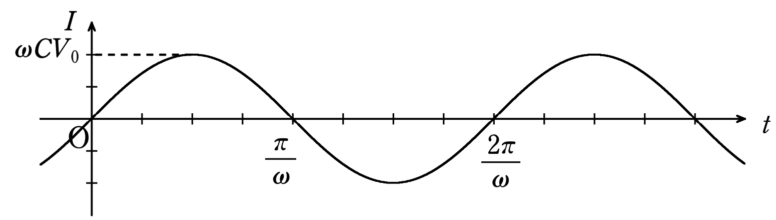
⑫ ア・コンデンサー　イ・コンデンサー　ウ・電源

(2) ① 最大電圧なので、V_0

② Bの位相はπなので、$\omega t=\pi$　よって、$t=\dfrac{\pi}{\omega}$

Cも同様にして　$\dfrac{2\pi}{\omega}$

③



④ ア・最大電圧　イ・電荷　ウ・増加　エ・流れない　オ・0

⑤ オームの法則より　$I=\omega CV_0\cos\omega t$

これは、　$\omega CV_0\cos\omega t=\omega CV_0\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{2}\right)$

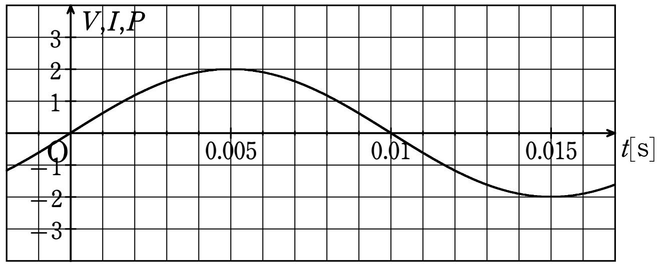
よって、　カ・ωCV_0　　キ・$\dfrac{\pi}{2}$

(4) グラフ

⑤　コンデンサーを流れる電流を表した式の（）に適当な式又は数値を入れよ。

$I=$（　カ　）$\sin(\omega t+$（　キ　））

(3)　下のグラフの縦軸は電圧[V]を示している。このグラフのように電圧が変化している交流電源に20mF（2.0×10^{-2}F）のコンデンサーをつないだ。これに関して以下の問いに答えよ。根号、円周率はそのままで良い。



①　この交流電源の最大電圧V_0はいくらか

②　この交流電源の実効値V_eはいくらか

③　この交流電源の周波数fはいくらか

④　この交流電源の角振動数ωはいくらか

⑤　このコンデンサーのリアクタンスはいくらか

⑥　このコンデンサーを流れる電流の最大値･実効値をそれぞれ求めよ。

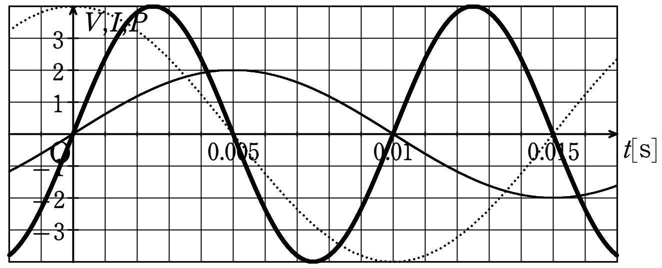
⑦　グラフの縦軸が電流(A)であり1目盛りがπ[A]として電流のグラフを上のグラフに重ね描きせよ。

⑧　消費電力の最大値はいくらか

⑨　消費電力の最小値はいくらか

⑩　グラフの縦軸を消費電力(W)であり、1目盛りがπ[W]として電力のグラフを重ね描きせよ。

116．交流とコンデンサーのベクトル表示



①　2V　②　$2\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ V

③　グラフより周期は0.02s

$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{0.02}=50$Hz

④　単振動又は円運動と同じ式、$f=\frac{\omega}{2\pi}$が使える。

$\omega=2\pi f=2\pi\times50=100\pi$[rad/s]　　単位は角速度の単位である。

⑤　$R=\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{100\pi\times0.02}=\frac{1}{2\pi}\Omega$

⑥　$I_0=\frac{V_0}{R}=\frac{2}{\frac{1}{2\pi}}=4\pi$[A]　　$I_e=\frac{I_0}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}\pi$[A]

⑦　上の破線のグラフ

$V=V_0\sin\omega t$のとき、$I=\omega CV_0\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$なので、電圧のグラフを左に$\frac{\pi}{2}$平行移動したグラフを基に考えると良い。最大電圧のとき電流が0である。

⑧　$P=IV=\omega CV_0\cos\omega t V_0\sin\omega t=\frac{1}{2}\omega CV_0{}^2\sin2\omega t$なので、

最大電力は$\frac{1}{2}\omega CV_0{}^2$で表される。これは、$\frac{1}{2}\times100\pi\times0.02\times2^2=4\pi$[W]

⑨　上のグラフの太線

$P=IV$より、電流又は電圧が0になっているところが$P=0$となる。電流と電圧が同符号のとき正、異符号のとき負となるようにサインカーブを描けばよい。

解説

(1)　①　$\frac{1}{\omega C}$　②　$\omega CV_0\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$　③　位相とはsinの中である。$\frac{\pi}{2}$

④　$V_0\sin\omega t$　　⑤　電圧　⑥　$\omega CV_0\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$　⑦　電流

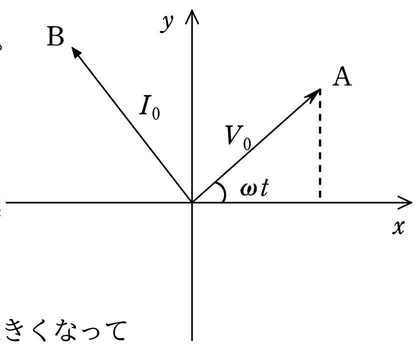
交流

(1)　起電力が$V=V_0\sin\omega t$で表される交流

電源に電気容量Cのコンデンサーをつないだ。

このときの電流を導く方法にベクトルを使う

ことができる。これについて考えてみよう。



①　コンデンサーのリアクタンスはいくらか

②　コンデンサーを流れる電流を表した下の式を完成せよ。

$I=$（　　　　　　）$\sin(\omega t+($　　　　$))$

③　電流の位相は電圧の位相に比べていくら大きくなっているか

- xy平面上にx軸正の方向から角度ωtをとり、大きさV_0の原点を始点とするベクトル$\vec{V}$を書き込み、その終点をAとする。

④　Aのy座標をV_0,ω,tで表せ。

⑤　Aのy座標は何を表しているか。

- xy平面上に先ほどの$\vec{V}$より、角度$\dfrac{\pi}{2}$だけ大きくして、大きさをωC倍したベクトル$\vec{I}$を書き込み、その終点をBとする。

⑥　Bのy座標をV_0,ω,t,Cで表せ。

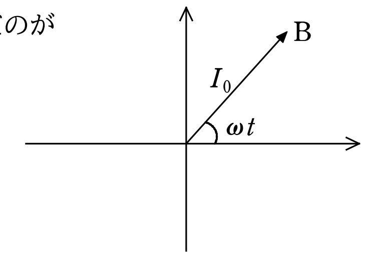
⑦　Bのy座標は何を表しているか。

(2)　交流電源にコンデンサーを接続したところ$I=I_0\sin\omega t$で表される電流が流れた。

このときの電流ベクトルをxy平面上に書き込んだのが

右図である。ベクトルの終点をBとする。

これを見て以下の問いに答えよ。



①　電流は点Bの何の座標を読み取れば分かるか

②　電圧のベクトルを右図に書き込め。

③　コンデンサーのリアクタンスはいくらか

④　電圧ベクトルの大きさをω,C,I_0で表せ。

⑤　電圧ベクトルの終点をAとするとき、電圧はAのどの座標を読めばよいか

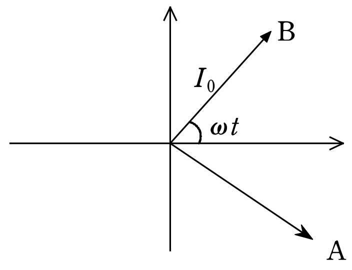
⑥　電圧を表す式を求めよ。

(3)　交流電源に電気容量Cのコンデンサーをつないだときの電流と電圧の関係を表したのが下の表である。次の各場合において欠けているところに式を当てはめよ。

	電圧	電流
①	$V_0\sin\omega t$	
②		$I_0\sin\omega t$
③	$V_0\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{3}\right)$	
④		$I_0\cos\omega t$

(2)　①　y座標

②　右図



③　$\dfrac{1}{\omega C}$

④　$V=RI$より、$\dfrac{I_0}{\omega C}$

⑤　y座標

⑥　$\dfrac{I_0}{\omega C}\sin\left(\omega t-\dfrac{\pi}{2}\right)$

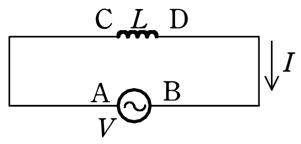
(3)

	電圧	電流
①	$V_0\sin\omega t$	$\omega CV_0\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{2}\right)$
②	$\dfrac{I_0}{\omega C}\sin\left(\omega t-\dfrac{\pi}{2}\right)$	$I_0\sin\omega t$
③	$V_0\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{3}\right)$	$\omega CV_0\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}\right)$
④	$\dfrac{I_0}{\omega C}\cos\left(\omega t-\dfrac{\pi}{2}\right)$	$I_0\cos\omega t$

大きさはリアクタンス（抵抗）が$\dfrac{1}{\omega C}$として、オームの法則を利用して計算し、位相のずれはωが分母にあるときは$-\dfrac{\pi}{2}$、分子にあるときは$+\dfrac{\pi}{2}$すればよいことが分かる。実際はこの方法でコンデンサー回路の電流と電圧を計算すればよい。

117．コイルと交流

(1)　起電力$V=V_0\sin\omega t$で表される交流電源に自己インダクタンスLのコイルを接続した。回路を右周りに流れる向きを正とする。流れに沿って電位があがる場合を正とし、下がる場合を負とする。図のように電源の両端をA,B、コイルの両端をC,Dとする。これに関して以下の問いに答えよ。



①　Aが正極で電流が増加しているとき、C,Dどちらの電位が高いか

②　コイルの電圧の符号を答えよ。

③　コイルの両端にかかる電圧を符号に注意して、V_0、ω、tを用いて答えよ。

④　微少時間dtの間に電流がdIだけ増加したとき、コイルに生じる誘導起電力を符号に注意してL、$\dfrac{dI}{dt}$を用いて表せ。

⑤　③④を用いて、$\dfrac{dI}{dt}$をL、V_0、ω、tで表せ。

⑥　⑤を不定積分することによりIをL、V_0、ω、tで表せ。（積分定数をCとせよ）

⑦　積分定数Cは一定電流を意味している。導線に抵抗がなければ一度流れた電流は永久に流れることを意味している。しかし、実際問題としては導線に抵抗がある。このことを考慮してCの値を答えよ。

⑧　⑥⑦より電流IをL、V_0、ω、tで表せ。

⑨　この回路を流れる電流を表す式の（）内に式又は数値を入れよ。

$I=($　ア　$)\sin(\omega t+($　イ　$))$

⑩　電流の最大値I_0をL、V_0、ωで表せ。

⑪　電圧の実効値をV_eとするとき、V_eを電流の実効値I_e、L、ωで表せ。

⑫　実効値を用いてオームの法則を使うとき抵抗に相当するものをリアクタンスという。コイルのリアクタンスをL、ωで表せ。

⑬　コイルの消費電力PをL、ω、V_0、tで表せ。$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ を用いて簡略化せよ。

⑭　コイルの消費電力の平均値$\overline{P}$はいくらになるか

⑮　コイルの電圧と電流との関係を説明した以下の文章の（）内に適当な語又は数値を入れよ。

　電源電圧が最大になったとき、コイルの電圧は（　ウ　）になっている。このときは電流変化が（　エ　）になっており、電流は最大値ではない。電流が最大になっているときは電流の変化が（　オ　）ので、電源電圧は（　カ　）Vであり、コイルの電圧も

解説

(1)　①電流がコイルを右から左に増加するので、それを妨げるようにコイルの左側が正極となる。よって、C

②　右回りに回路に沿って移動するとき、電位が上がる方向を電圧の正としており、この場合は下がることになるので電圧は負となる。

③　電圧の絶対値は電源と同じなので、$-V_0\sin\omega t$

④　$V=-L\dfrac{dI}{dt}$　（公式の符号と一致していることに注意）

⑤　$-L\dfrac{dI}{dt}=-V_0\sin\omega t$

⑥　$\dfrac{dI}{dt}=\dfrac{V_0}{L}\sin\omega t$

両辺を不定積分すると、

$I=-\dfrac{V_0}{\omega L}\cos\omega t+C$

⑦　直流電源がないので、永久電流は流れない。　$C=0$

⑧　$I=-\dfrac{V_0}{\omega L}\cos\omega t$

⑨　$I=-\dfrac{V_0}{\omega L}\cos\omega t=\dfrac{V_0}{\omega L}\sin\left(\omega t-\dfrac{\pi}{2}\right)$

よって、　（ア）$=\dfrac{V_0}{\omega L}$　（イ）$=-\dfrac{\pi}{2}$

（（ア）の分母にωがあるときは$\dfrac{\pi}{2}$の符号は負になっていることに注意）

⑩　$I_0=\dfrac{V_0}{\omega L}$　　（オームの法則のようにすると　$V_0=\omega LI_0$）

⑪　⑩の両辺に$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$をかけると、

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}V_0=\omega L\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}I_0$　これは、$V_e=\omega LI_e$

⑫　⑪より　$R=\omega L$

⑬　$P=IV=-\dfrac{V_0}{\omega L}\cos\omega t\times V_0\sin\omega t=-\dfrac{V_0{}^2}{2\omega L}\sin 2\omega t$

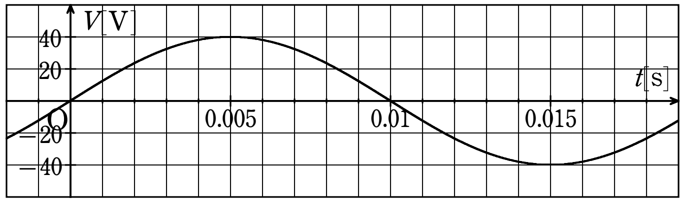
⑭　$y=\sin x$の平均値は0なので、

$\overline{P}=0$

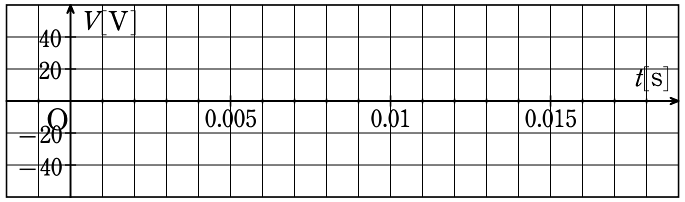
⑮　電源電圧が最大になったとき、コイルの電圧は（　ウ　最大　）になっている。このときは電流変化が（　エ　最大　）になっており、電流は最大値ではない。電流が最大になっているときは電流の変化が（　オ　ない　）ので、電源電圧は（　カ　0）Vであり、コイルの電圧も（　カ　0　）Vとなる。よって、電源電圧が（　カ　0　）Vのときに（　キ　最大　）の電流が流れる。

（　カ　）Vとなる。よって、電源電圧が（　カ　）Vのときに（　キ　）の電流が流れる。

(2)　下のグラフは(1)と同じ回路で電源の電圧を示したものである。電圧･電流の符号は(1)と同じであり、コイルの自己インダクタンスを20mHとして以下の問いに答えよ。



①　コイルにかかる電圧のグラフを下に描け



②　この交流電源の周期、周波数、角振動数、最大電圧、電圧実効値をそれぞれ求めよ。

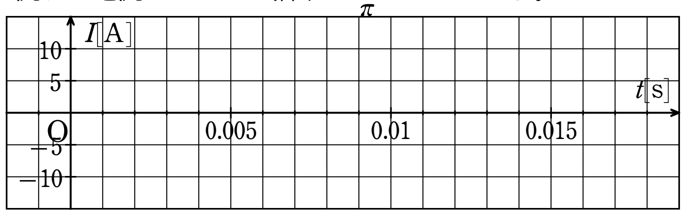
③　コイルのリアクタンスはいくらか

④　コイルを流れる電流の最大値、及び実効値を求めよ。

⑤　コイルを流れる電流を表す式の（）に適当な数値を入れよ。

$I=$（　ア　）$\sin(\omega t+$（　イ　））

⑥　コイルを流れる電流のグラフを描け　$\dfrac{20}{\pi}=6.36$とせよ。

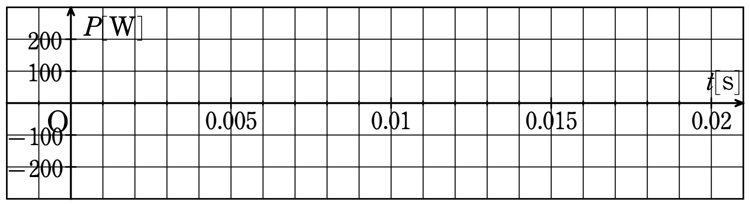


⑦　電力Pの式の（）に適当な数値を入れよ。

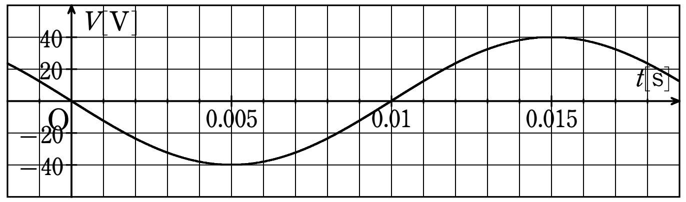
$P=IV=$（　ウ　）$\sin\omega t\cos\omega t=$（　エ　）$\sin 2\omega t$

⑧　電力の最大値はいくらか

⑨　コイルの消費電力のグラフを描け　$\dfrac{400}{\pi}=127$とせよ。



(2)　①　この問題の題意によりコイルにかかる電圧は電源電圧と比べ正負逆になっている。



②　周期　0.02秒　周波数　$f=\dfrac{1}{T}=50\mathrm{Hz}$　角振動数　$\omega=2\pi f=100\pi$　rad/s

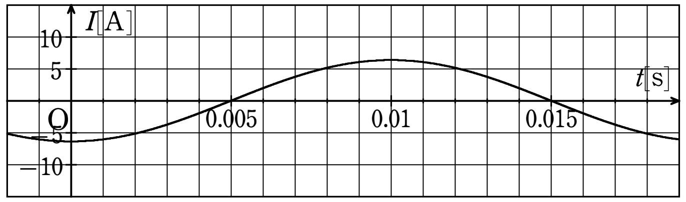
最大電圧　40V　　実効値　$V_e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}V_0=40\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=20\sqrt{2}\,\mathrm{V}$

③　$R=\omega L=100\pi\times 20\times 10^{-3}=2\pi\Omega$

④　$I_0=\dfrac{V_0}{R}=\dfrac{V_0}{\omega L}=\dfrac{40}{2\pi}=\dfrac{20}{\pi}\mathrm{A}$　　実効値は　$I_e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}I_0=\dfrac{20}{\pi}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{10\sqrt{2}}{\pi}\mathrm{A}$

⑤　$I=\dfrac{V_0}{\omega L}\sin\left(\omega t-\dfrac{\pi}{2}\right)$　より、ア$=\dfrac{20}{\pi}$　、イ$=-\dfrac{\pi}{2}$

⑥　$I=\dfrac{20}{\pi}\sin\left(100\pi t-\dfrac{\pi}{2}\right)$



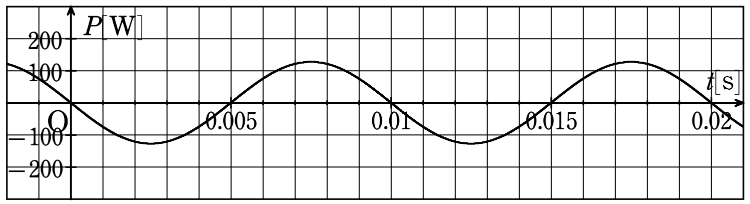
⑦　$P=IV=-\dfrac{V_0}{\omega L}\cos\omega t V_0\sin\omega t=-\dfrac{V_0{}^2}{\omega L}\sin\omega t\cos\omega t=-\dfrac{V_0{}^2}{2\omega L}\sin 2\omega t$

（ウ）$=-\dfrac{V_0{}^2}{\omega L}=-\dfrac{40^2}{100\pi\times 20\times 10^{-3}}=-\dfrac{800}{\pi}$

（エ）$=-\dfrac{V_0{}^2}{2\omega L}=-\dfrac{400}{\pi}$

⑧　電力の最大値は$\dfrac{400}{\pi}$

⑨　$P=-\dfrac{V_0{}^2}{2\omega L}\sin 2\omega t=-\dfrac{400}{\pi}\sin 200\pi t$



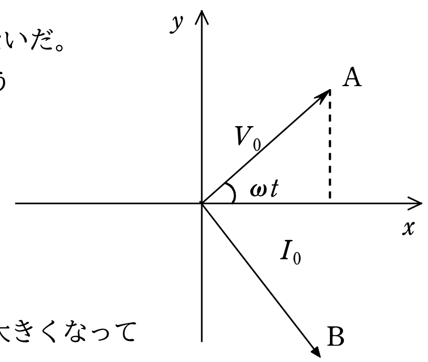
118.

(1)　起電力が$V=V_0\sin\omega t$で表される交流

電源に自己インダクタンスLのコイルをつないだ。

このときの電流を導く方法にベクトルを使う

ことができる。これについて考えてみよう。



①　コイルのリアクタンスはいくらか

②　コイルを流れる電流を表した下の式

を完成せよ。

$I=$（　　　　　　）$\sin(\omega t+($　　　　$))$

③　電流の位相は電圧の位相に比べていくら大きくなって

いるか

・ xy平面上にx軸正の方向から角度ωtをとり、大きさV_0の原点を始点とするベクトル$\vec{V}$を

書き込み、その終点をAとする。

④　Aのy座標をV_0,ω,tで表せ。

⑤　Aのy座標は何を表しているか。

・ xy平面上に先ほどの$\vec{V}$より、角度$\frac{\pi}{2}$だけ小さくして、大きさを$\frac{1}{\omega L}$倍したベクトル$\vec{I}$を

書き込み、その終点をBとする。

⑥　Bのy座標をV_0,ω,t,Lで表せ。

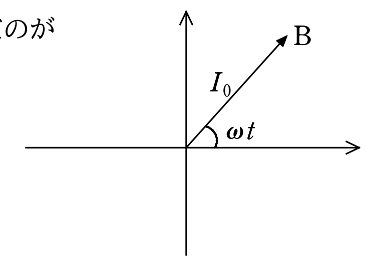
⑦　Bのy座標は何を表しているか。

(2)　交流電源にコイルを接続したところ$I=I_0\sin\omega t$で表される電流が流れた。

このときの電流ベクトルをxy平面上に書き込んだのが

右図である。ベクトルの終点をBとする。

これを見て以下の問いに答えよ。



①　電流は点Bの何の座標を読み取れば分かるか

②　電圧のベクトルを右図に書き込め。

③　コイルのリアクタンスはいくらか

④　電圧ベクトルの大きさをω,L,I_0で表せ。

⑤　電圧ベクトルの終点をAとするとき、電圧はAのどの座標を読めばよいか

⑥　電圧を表す式を求めよ。

(3)　交流電源に自己インダクタンスLのコイルつないだときの電流と電圧の関係を表した

のが下の表である。次の各場合において欠けているところに式を当てはめよ。

	電圧	電流
①	$V_0\sin\omega t$	
②		$I_0\sin\omega t$
③	$V_0\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)$	
④		$I_0\cos\omega t$

解説

(1)　①　ωL　②　$\frac{V_0}{\omega L}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$　③　位相とはsinの中である。$-\frac{\pi}{2}$

④　$V_0\sin\omega t$　　⑤　電圧　⑥　$\frac{V_0}{\omega L}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$　⑦　電流

(2)　①　y座標

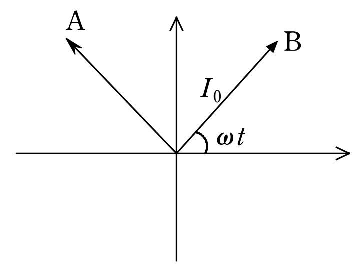
②　右図

③　ωL

④　$V=RI$より、ωLI_0

⑤　y座標

⑥　$\omega LI_0\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$



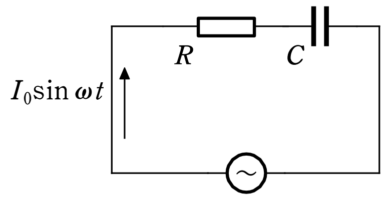
(3)

	電圧	電流
①	$V_0\sin\omega t$	$\frac{V_0}{\omega L}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$
②	$\omega LI_0\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$	$I_0\sin\omega t$
③	$V_0\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{V_0}{\omega L}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)$
④	$\omega LI_0\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$	$I_0\cos\omega t$

大きさはリアクタンス（抵抗）がωLとして、オームの法則を利用して計算し、位相のずれはωが分母にあるときは$-\frac{\pi}{2}$、分子にあるときは$+\frac{\pi}{2}$すればよいことが分かる。実際はこの方法でコイル回路の電流と電圧を計算すればよい。

119.　コイルと抵抗の交流回路

(1)　ある交流電源に抵抗値Rの抵抗と電気容量Cのコンデンサーを直列につないだところ$I=I_0\sin\omega t$の電流が流れた。電流及び電圧は右回りを正として以下の問いに答えよ。
電圧の符号は右回りに進むと電位が高くなる場合を正とする。



①　抵抗にかかる電圧とコンデンサーにかかる電圧を符号に注意してI_0、ω、t、R、Cを用いて表せ。

②　①の結果を利用して電源電圧を符号に注意してI_0、ω、t、R、Cを用いて表せ。

③　三角関数の合成公式を用いることにより、電源電圧の最大値V_0と位相のずれϕの$\tan\phi$をI_0、ω、R、Cを用いて表せ。

三角関数の合成公式

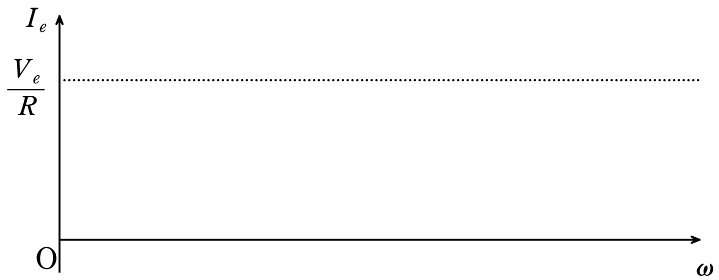
$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\phi)$$

$$\tan\phi=\frac{b}{a}$$

④　電流の実効値をI_e、電圧の実効値をV_eとするとき、I_eをC,R,ω,V_eで表せ。

⑤　$\lim\limits_{\omega\to 0}I_e$、$\lim\limits_{\omega\to\infty}I_e$はそれぞれいくらになるか。

⑥　④式を用いて縦軸にI_e、横軸にωを取ったグラフの概形を描け



⑦　周波数と電流の関係について説明した下の文章の（）内に適語を入れよ。
コンデンサーは極板間が繋がっていないために、（　ア　）を流さない。角振動数ωを用いて$\frac{\omega}{2\pi}$が交流の周波数を表している。ωが限りなく0に近づいたときは（　ア　）と考えることができき、⑥のグラフよりこのとき電流が（　イ　）いないことが分かる。交流は電子が（　ウ　）しており、コンデンサーの極板間に電場が繋がっていれば両極間の電子は（　ウ　）し、交流は流れたことになる。周波数が高くなると、コンデンサーは電流を（　エ　）やすくなる。

解説

(1)　①　抵抗　$V_R=RI=-RI_0\sin\omega t$

コンデンサー　$V_C=RI=\frac{I_0}{\omega C}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{I_0}{\omega C}\cos\omega t$

ともに右回りに進むと電位が下がるので電圧は負である。

②　電源電圧をVとすると、電圧1周＝0より、

$V_R+V_C+V=0$　これより、

$$V=-V_R-V_C=RI_0\sin\omega t+\frac{I_0}{\omega C}\cos\omega t$$

③　$a=RI_0$　$b=\frac{I_0}{\omega C}$　$x=\omega t$と置くと、

三角関数の合成公式

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\phi)$$

$$\tan\phi=\frac{b}{a}$$

より、

$$V=\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}\,I_0\sin(\omega t+\phi)$$

$$\tan\phi=\frac{b}{a}=\frac{1}{\omega CR}$$

④　③より電源電圧の最大値V_0は

$V_0=\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}\,I_0$　両辺に$\frac{\sqrt{2}}{2}$を掛ければ実行値になるので、

$$V_e=\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}\,I_e$$

よって、

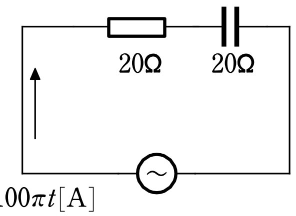
$$I_e=\frac{V_e}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}$$

⑤　$$\lim_{\omega\to 0}I_e=\lim_{\omega\to 0}\frac{V_e}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}=0$$

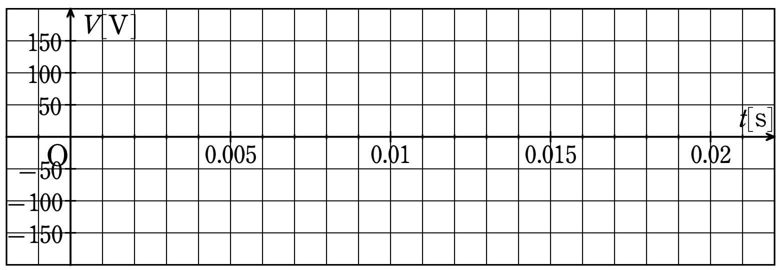
$$\lim_{\omega\to\infty}I_e=\lim_{\omega\to\infty}\frac{V_e}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}=\frac{V_e}{R}$$

⑥　⑤を用いることにより、

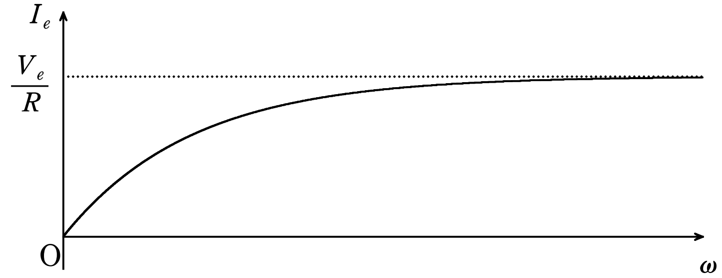
⑵　ある交流電源に20Ωの抵抗とリアクタンス20Ωのコンデンサーを直列につないだところ$2\sqrt{2}\sin 100\pi t$で表される電流が流れた。
電流･電圧は右回りを正とする。
これに関して以下の問いに答えよ。



①　交流電源の周波数はいくらか
②　コンデンサーの電気容量はいくらか
③　電流の最大値及び実効値はいくらか
④　抵抗にかかる電圧V_Rを表す式を導け。（符号に注意せよ）
⑤　コンデンサーにかかる電圧V_Cを表す式を導け
⑥　抵抗とコンデンサーの抵抗の和Vを表す式を導け
⑦　電源電圧をVで表せ。（符号に注意せよ）
⑧　V_R、V_C、Vのグラフを下に描け



⑨　V_R、V_C、Vの実効値v_R、v_C、vをそれぞれ求めよ。
⑩　$v=v_R+v_C$の等式が成立していない。⑥のグラフを見てその理由を答えよ。



⑦
コンデンサーは極板間が繋がっていないために、（　ア　直流　）を流さない。角振動数ωを用いて$\frac{\omega}{2\pi}$が交流の周波数を表している。ωが限りなく0に近づいたときは（　ア　直流　）と考えることができき、⑥のグラフよりこのとき電流が（　イ　流れて　）いないことが分かる。交流は電子が（　ウ　振動　）しており、コンデンサーの極板間に電場が繋がっていれば両極間の電子は（　ウ　振動　）し、交流は流れたことになる。周波数が高くなると、コンデンサーは電流を（　エ　流し　）やすくなる。

⑵　①　$\omega=100\pi$　より、$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{100\pi}{2\pi}=50\text{Hz}$

②　$R=\frac{1}{\omega C}$より　$20=\frac{1}{100\pi C}$　　$C=\frac{1}{2000\pi}\text{F}$　（$1.59\times10^{-4}\text{F}=159\mu\text{F}$）

③　最大値　$2\sqrt{2}\,\text{A}$　実効値　$2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\text{A}$

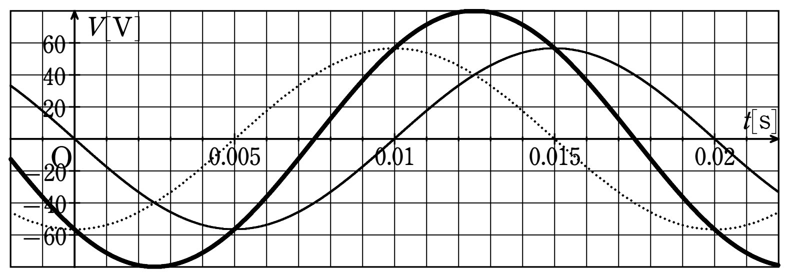
④　$V_R=IR=-20\times2\sqrt{2}\sin 100\pi t=-40\sqrt{2}\sin 100\pi t$[V]
右回りに進むと電圧が下がるので負である。

⑤　$V_C=\frac{I_0}{\omega C}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)=40\sqrt{2}\sin\left(100\pi t-\frac{\pi}{2}\right)=-40\sqrt{2}\cos 100\pi t$

⑥　$V=-V_R-V_C=40\sqrt{2}\sin 100\pi t+40\sqrt{2}\cos 100\pi t$
三角関数の合成を行うと
$=80\sin\left(100\pi t+\frac{\pi}{4}\right)$

⑦　電源電圧をV'とすると、電圧一周＝0より、$V'+V=0$　よって、$V'=-V$

⑧　実線がV_R、破線がV_C、太線がV



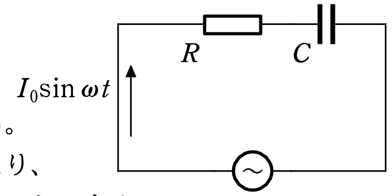
⑨　V_R、V_C、Vの実効値v_R、v_C、vをそれぞれ求めよ。

120.　コンデンサーと抵抗のベクトル表示

(1)

右図のように電気容量Cのコンデンサーと抵抗値Rのコンデンサーを直列にして交流電源につないだところ$I=I_0\sin\omega t$で表される電流がながれた。

このときの電流の向き、電圧は右回りを正とする。



　このときの電圧をベクトルで表示することにより、実効値による計算方法を以下の手法により考えることにする。

以下の問いに答えよ。

・ 交流の位相をx軸から左回りの角度で表し、電流及び電圧の最大値を大きさとした原点を始点とするベクトルを考える。

①　抵抗にかかる電圧V_Rを表した下の式の（）内に適当な式又は数値を入れよ。

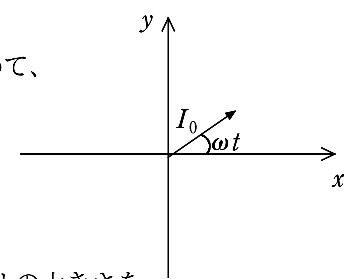
$-V_R=$（　ア　）$\sin(\omega t+$(　イ　))

②　コンデンサーにかかる電圧V_Cを表した下の式の（）内に適当な式又は数値を入れよ。

$-V_C=$（　ウ　）$\sin(\omega t+$(　エ　))

③　右図は電流$I=I_0\sin\omega t$をベクトルで表したものである。これを元に、大きさを適当に決めて、$-V_R$、$-V_C$をベクトル表示せよ。

（角度に注意。大きさは適当でよい）



④　$-(V_R+V_C)$において、三角関数を合成し、電源電圧の最大値をR,C,ω,I_0で表せ。

⑤　③のベクトル$-V_R$、$-V_C$を合成したベクトルの大きさをR,C,ω,I_0で表し、④と一致していることを確認せよ。

⑥　電源電圧の最大値をV_0とするとき、$V_0=rI_0$とおいたときのrをインピーダンスという。インピーダンスとはリアクタンスと同じく抵抗のようなものである。この回路のインピーダンスをR,C,ωで表せ。

⑦　この回路のインピーダンスをrとするとき、電流実効値I_eが流れたときの電源電圧の

$v_R=\frac{\sqrt{2}}{2}V_R=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 40\sqrt{2}=40\mathrm{V}$

$v_C=\frac{\sqrt{2}}{2}V_C=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 40\sqrt{2}=40\mathrm{V}$

$v=\frac{\sqrt{2}}{2}V=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 80=40\sqrt{2}\,\mathrm{V}$

⑩

各時刻の電圧の和は全体の電圧になっているが、実効値は最大値の$\frac{\sqrt{2}}{2}$となっている。各電圧が最大になる時刻が一致していないために実効値の和が全体の電圧実効値にならない。

解説

(1)　①　オームの法則より

$-V_R=RI_0\sin\omega t$　　　ア$=RI_0$　　イ$=0$

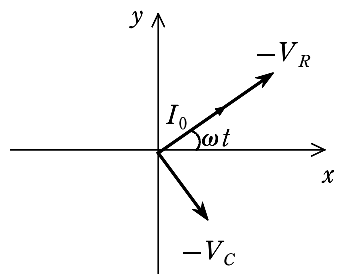
（V_Rは電圧が右回りなので、負となる。よって、$-V_R$は正である。）

②　リアクタンスが$\frac{1}{\omega C}$なので、電圧最大値は$\frac{I_0}{\omega C}$で、ωが分母にあるので、位相は$-\frac{\pi}{2}$ずれる。よって、

$-V_C=\frac{I_0}{\omega C}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$　　ウ$=\frac{I_0}{\omega C}$　　エ$=-\frac{\pi}{2}$

（V_Cは電圧が右回りなので負である。よって、$-V_C$は正となる。）

③　下図のようになる。



④　$V=RI_0\sin\omega t+\frac{I_0}{\omega C}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$

$=RI_0\sin\omega t-\frac{I_0}{\omega C}\cos\omega t$

$=\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}\,I_0\sin(\omega t+\phi)$　　$\tan\phi=-\frac{1}{R\omega C}$

よって、電源電圧の最大値は$\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}\,I_0$

実効値V_eをr, I_eで表せ。

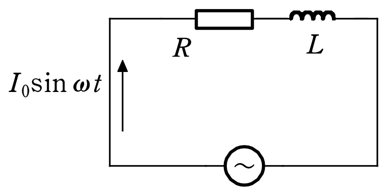
(2)　(1)を参考として(1)の回路において抵抗$R=10\Omega$、コンデンサーのリアクタンス$=10\Omega$を実効値100Vの交流電源につないだ。このとき、以下の問いに答えよ。

①　インピーダンスはいくらか

②　電流実効値はいくらか

121.　コイルと抵抗の交流回路

(1)　ある交流電源に抵抗値Rの抵抗と自己インダクタンスLのコイルを直列につないだところ$I=I_0\sin\omega t$の電流が流れた。電流及び電圧は右回りを正として以下の問いに答えよ。
電圧の符号は右回りに進むと電位が高くなる場合を正とする。



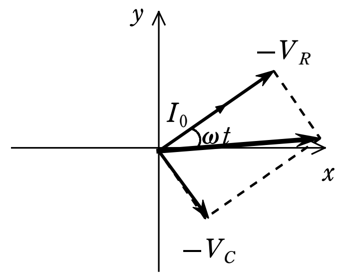
①　抵抗にかかる電圧とコンデンサーにかかる電圧を符号に注意してI_0、ω、t、R、Lを用いて表せ。

②　①の結果を利用して電源電圧を符号に注意してI_0、ω、t、R、Lを用いて表せ。

③　三角関数の合成公式を用いることにより、電源電圧の最大値V_0と位相のずれϕの$\tan\phi$をI_0、ω、R、Lを用いて表せ。

三角関数の合成公式

⑤　$-V_R$、$-V_C$を合成したベクトルは右図の太線である。$-V_R$の大きさはRI_0、$-V_C$の大きさは$\dfrac{I_0}{\omega C}$であり、互いに直角であるので、三平方の定理により大きさが求められる。



よって、$\sqrt{R^2+\left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}\,I_0$

④と⑤は同じ値になる。

（抵抗とコンデンサーは互いに直角であるとして三平方の定理で合成すれば速く求められる。）

⑥　⑤より、$V_0=\sqrt{R^2+\left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}\,I_0$

よって、　$r=\sqrt{R^2+\left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$

（⑤の計算方法は電流だけでなく抵抗･リアクタンスでも同じ計算が可能であることを示している。）

⑦　$V_0=rI_0$の両辺に$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$を掛ければ実行値になる。よって、

$V_e=rI_e$

(2)　①　三平方の定理より　$r=\sqrt{10^2+10^2}=10\sqrt{2}\,\Omega$

②　$V_e=rI_e$より、

$100=10\sqrt{2}\,I_e$

よって、$I_e=\dfrac{100}{10\sqrt{2}}=5\sqrt{2}\,\mathrm{A}$

(解説)

(1)　①　抵抗　　$V_R=RI=-RI_0\sin\omega t$

コイル　　$V_L=RI=\omega LI_0\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{2}\right)=\omega LI_0\cos\omega t$

ともに右回りに進むと電位が下がるので電圧は負である。

②　電源電圧をVとすると、電圧1周$=0$より、

$V_R+V_L+V=0$　これより、

$V=-V_R-V_L=RI_0\sin\omega t-\omega LI_0\cos\omega t$

③　$a=RI_0$　$b=-\omega LI_0$　$x=\omega t$と置くと、

三角関数の合成公式

$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\phi)$

$\tan\phi=\dfrac{b}{a}$

より、

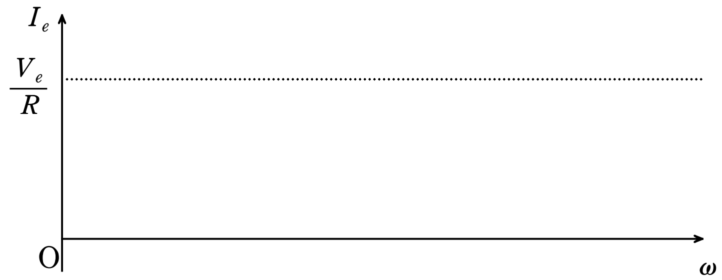
$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\phi)$$

$$\tan\phi = \frac{b}{a}$$

④　電流の実効値をI_e、電圧の実効値をV_eとするとき、I_eをL,R,ω,V_eで表せ。

⑤　$\lim_{\omega\to 0} I_e$、$\lim_{\omega\to\infty} I_e$はそれぞれいくらになるか。

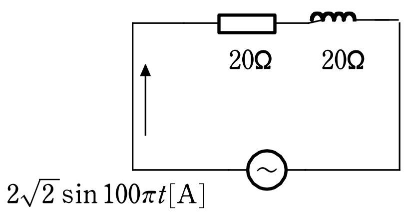
⑥　④式を用いて縦軸にI_e、横軸にωを取ったグラフの概形を描け



⑦　周波数と電流の関係について説明した下の文章の（）内に適語を入れよ。

コイルは電流変化に比例する（　ア　）を生じる。周波数が低い場合は電流変化がないので、（　ア　）をほとんど生じず、電流が流れ（　イ　）くなる。直流は周波数（　ウ　）の交流と考えられるので、リアクタンスは（　ウ　）となる。交流周波数が大きくなればなるほど電流変化が（　エ　）なるので、コイルは電流を流し（　オ　）くなる。

⑵　ある交流電源に20Ωの抵抗とリアクタンス20Ωのコイルを直列につないだところ$2\sqrt{2}\sin 100\pi t$で表される電流が流れた。
電流･電圧は右回りを正とする。
これに関して以下の問いに答えよ。



①　交流電源の周波数はいくらか

②　コイルの自己インダクタンスはいくらか

③　電流の最大値及び実効値はいくらか

④　抵抗にかかる電圧V_Rを表す式を導け。（符号に注意せよ）

⑤　コイルにかかる電圧V_Lを表す式を導け

⑥　抵抗とコイルの抵抗の和Vを表す式を導け

⑦　電源電圧をVで表せ。（符号に注意せよ）

⑧　V_R、V_L、Vのグラフを下に描け

$$V = \sqrt{R^2+\omega^2L^2}\,I_0\sin(\omega t+\phi)$$

$$\tan\phi = \frac{b}{a} = -\frac{\omega L}{R}$$

④　③より電源電圧の最大値V_0は

$V_0 = \sqrt{R^2+\omega^2L^2}\,I_0$　両辺に$\frac{\sqrt{2}}{2}$を掛ければ実行値になるので、

$$V_e = \sqrt{R^2+\omega^2L^2}\,I_e$$

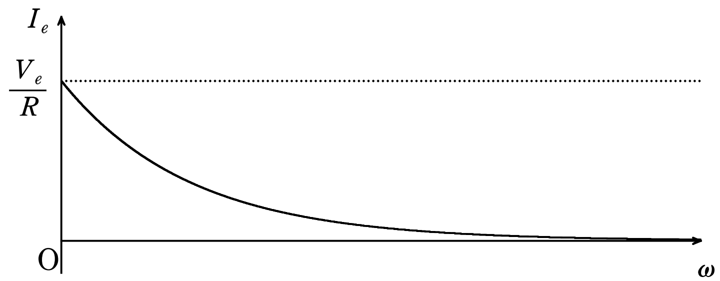
よって、

$$I_e = \frac{V_e}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$$

⑤　$\lim_{\omega\to 0} I_e = \lim_{\omega\to 0}\frac{V_e}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} = \frac{V_e}{R}$

$\lim_{\omega\to\infty} I_e = \lim_{\omega\to\infty}\frac{V_e}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} = 0$

⑥　⑤を用いることにより、



⑦　コイルは電流変化に比例する（　ア　誘導起電力）を生じる。周波数が低い場合は電流変化がないので、（　ア　誘導起電力）をほとんど生じず、電流が流れ（　イ　やす）くなる。直流は周波数（　ウ　0）の交流と考えられるので、リアクタンスは（　ウ　0）となる。交流周波数が大きくなればなるほど電流変化が（　エ　大きく）なるので、コイルは電流を流し（　オ　にくく）くなる。

⑵　①　$\omega = 100\pi$　より、$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{100\pi}{2\pi} = 50\text{Hz}$

②　$R = \omega L$より　$20 = 100\pi L$　　$L = \frac{1}{5\pi}\text{H}$　（0.0635H＝63.5mH）

③　最大値　$2\sqrt{2}$A　実効値　$2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\text{A}$

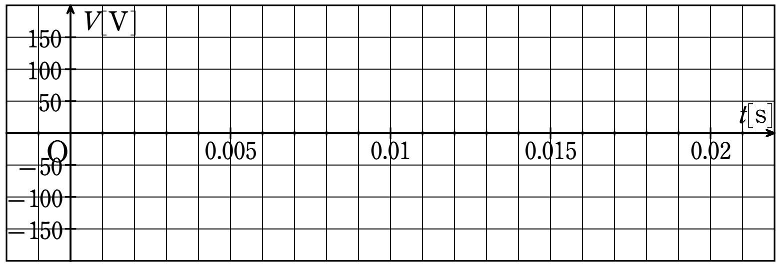
④　$V_R = IR = -20\times 2\sqrt{2}\sin 100\pi t = -40\sqrt{2}\sin 100\pi t$[V]

右回りに進むと電圧が下がるので負である。

⑤　$V_L = \omega L I_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 40\sqrt{2}\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 40\sqrt{2}\cos 100\pi t$

⑥　$V = -V_R - V_C = 40\sqrt{2}\sin 100\pi t - 40\sqrt{2}\cos 100\pi t$

三角関数の合成を行うと



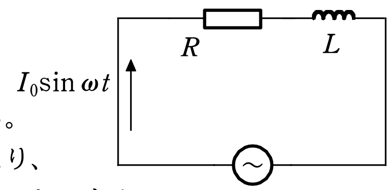
⑨　V_R、V_L、Vの実効値v_R、v_L、vをそれぞれ求めよ。

⑩　$v = v_R + v_L$の等式が成立していない。⑥のグラフを見てその理由を答えよ。

122.　コイルと抵抗のベクトル表示

(1)

右図のように自己インダクタンスLのコイルと抵抗値Rの抵抗を直列にして交流電源につないだところ$I = I_0 \sin \omega t$で表される電流がながれた。このときの電流の向き、電圧は右回りを正とする。



このときの電圧をベクトルで表示することにより、実効値による計算方法を以下の手法により考えることにする。

以下の問いに答えよ。

・ 交流の位相をx軸から左回りの角度で表し、電流及び電圧の最大値を大きさとした原点を始点とするベクトルを考える。

①　抵抗にかかる電圧V_Rを表した下の式の（）内に適当な式又は数値を入れよ。

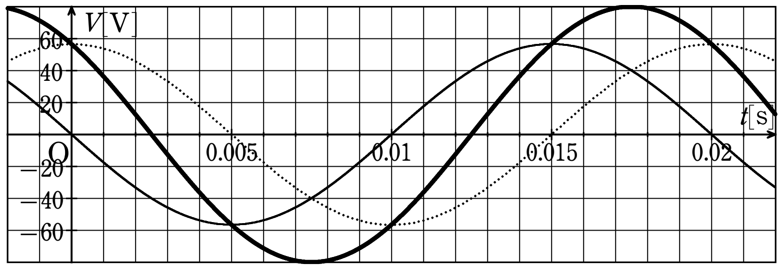
$-V_R =$（　ア　）$\sin(\omega t +$（　イ　））

②　コイルにかかる電圧V_Lを表した下の式の（）内に適当な式又は数値を入れよ。

$= 80 \sin\left(100\pi t - \dfrac{\pi}{4}\right)$

⑦　電源電圧をV'とすると、電圧一周$= 0$より、$V' + V = 0$　よって、$V' = -V$

⑧　実線がV_R、破線がV_L、太線がV



⑨

$$v_R = \frac{\sqrt{2}}{2} V_R = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 40\sqrt{2} = 40\text{V}$$

$$v_L = \frac{\sqrt{2}}{2} V_C = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 40\sqrt{2} = 40\text{V}$$

$$v = \frac{\sqrt{2}}{2} V = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 80 = 40\sqrt{2}\,\text{V}$$

⑩

各時刻の電圧の和は全体の電圧になっているが、実効値は最大値の$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$となっている。各電圧が最大になる時刻が一致していないために実効値の和が全体の電圧実効値にならない。

(解説)

(1)　①　オームの法則より

$-V_R = RI_0 \sin \omega t$　　　ア$= RI_0$　　　イ$= 0$

（V_Rは電圧が右回りなので、負となる。よって、$-V_R$は正である。）

②　リアクタンスがωLなので、電圧最大値ωLI_0はで、ωが分子にあるので、位相は$+\dfrac{\pi}{2}$ずれる。よって、

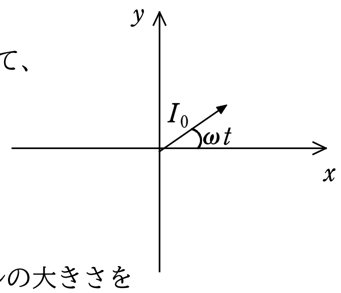
$-V_L = \omega LI_0 \sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right)$　　ウ$= \omega LI_0$　　エ$= +\dfrac{\pi}{2}$

（V_Lは電圧が右回りなので負である。よって、$-V_L$は正となる。）

③　下図のようになる。

$-V_L=$（　ウ　）$\sin(\omega t+($　エ　$))$

③　右図は電流$I=I_0\sin\omega t$をベクトルで表したものである。これを元に、大きさを適当に決めて、$-V_R$、$-V_L$をベクトル表示せよ。
（角度に注意。大きさは適当でよい）



④　－（V_R+V_L）において、三角関数を合成し、電源電圧の最大値をR,L,ω,I_0で表せ。

⑤　③のベクトル$-V_R$、$-V_L$を合成したベクトルの大きさをR,L,ω,I_0で表し、④と一致していることを確認せよ。

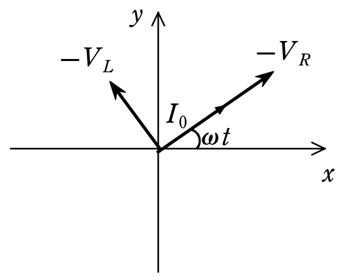
⑥　電源電圧の最大値をV_0とするとき、$V_0=rI_0$とおいたときのrをインピーダンスという。インピーダンスとはリアクタンスと同じく抵抗のようなものである。この回路のインピーダンスをR,L,ωで表せ。

⑦　この回路のインピーダンスをrとするとき、電流実効値I_eが流れたときの電源電圧の実効値V_eをr,I_eで表せ。

⑵　⑴を参考として⑴の回路において抵抗$R=10\Omega$、コイルのリアクタンス$=10\Omega$を実効値100Vの交流電源につないだ。このとき、以下の問いに答えよ。

①　インピーダンスはいくらか

②　電流実効値はいくらか



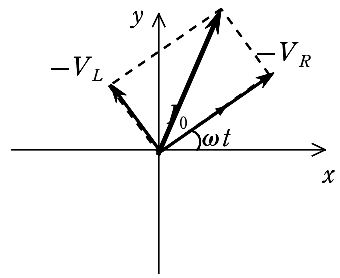
④　$V=RI_0\sin\omega t+\omega LI_0\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{2}\right)$

$=RI_0\sin\omega t+\omega LI_0\cos\omega t$

$=\sqrt{R^2+(\omega L)^2}\,I_0\sin(\omega t+\phi)$　　　$\tan\phi=\dfrac{\omega L}{R}$

よって、電源電圧の最大値は$\sqrt{R^2+(\omega L)^2}\,I_0$

⑤　$-V_R$、$-V_L$を合成したベクトルは右図の太線である。$-V_R$の大きさはRI_0、$-V_L$の大きさはωLI_0であり、互いに直角であるので、三平方の定理により大きさが求められる。
よって、$\sqrt{R^2+(\omega L)^2}\,I_0$
④と⑤は同じ値になる。
（抵抗とコイルは互いに直角であるとして
三平方の定理で合成すれば速く求められる。）



⑥　⑤より、$V_0=\sqrt{R^2+(\omega L)^2}\,I_0$

よって、　$r=\sqrt{R^2+(\omega L)^2}$

（⑤の計算方法は電流だけでなく抵抗・リアクタンスでも同じ計算が可能であることを示している。）

⑦　$V_0=rI_0$の両辺に$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$を掛ければ実行値になる。よって、

$V_e=rI_e$

⑵　①　三平方の定理より　$r=\sqrt{10^2+10^2}=10\sqrt{2}\,\Omega$

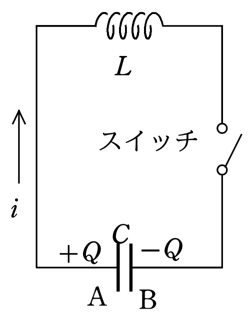
②　$V_e=rI_e$より、

$100=10\sqrt{2}\,I_e$

よって、$I_e=\dfrac{100}{10\sqrt{2}}=5\sqrt{2}\,\mathrm{A}$

123．共振回路（コンデンサーとコイルの回路）

(1)　電気容量Cのコンデンサーの極板Aを正極として電気量Qに帯電させ、自己インダクタンスLのコイルとスイッチを右図のように接続した。電流･電圧の符号は右回りを正とする。



- スイッチを入れた直後に関して

① コンデンサーの電圧はいくらか。Q,Cで表せ。

② コイルの電圧はいくらか。Q,Cで表せ。
（符号に注意せよ）

③ この回路を流れている電流はいくらか

④ コイル、コンデンサーにたまっている電気エネルギーをそれぞれ答えよ。

- スイッチを入れてしばらくすると、コンデンサーにたまっている電気量が0になる。その瞬間について。

⑤ コンデンサーの電圧はいくらか

⑥ コイルの電圧はいくらか

⑦ $V=-L\dfrac{dI}{dt}$を参考にして、$\dfrac{dI}{dt}$はいくらか

⑧ コンデンサーにたまっている電気エネルギーはいくらか

⑨ この瞬間の電流をI_0とすると、コイルにたまっている電気エネルギーをL,I_0で表せ。

⑩ ④⑧⑨より、この瞬間に流れている電流をQ,C,Lで表せ。

- 更にしばらくすると、流れている電流が0になる。その瞬間について。

⑪ コンデンサーにたまっている電気量はいくらか。また、コンデンサーの正極はA,Bどちらか

⑫ コンデンサーの電圧はいくらか。Q,Cで答えよ。（符号に注意せよ）

⑬ コイルの電圧はいくらか。（符号に注意せよ）

- 更にしばらくすると、コンデンサーにたまっている電気量が0になる。その瞬間について。

⑭ コンデンサーの電圧はいくらか

⑮ コイルの電圧はいくらか

⑯ $V=-L\dfrac{dI}{dt}$を参考にして、$\dfrac{dI}{dt}$はいくらか

⑰ コンデンサーにたまっている電気エネルギーはいくらか

⑱ この瞬間の電流をI_0とすると、コイルにたまっている電気エネルギーをL,I_0で表せ。

⑲ この瞬間に流れている電流をQ,C,Lで表せ。（符号に注意せよ）

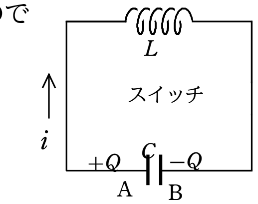
⑳ この回路を流れる電流の最大値をQ,C,Lで表せ

(2)　(1)の装置でこの回路を流れる電流の実効値をI_eとし、スイッチを入れた瞬間の時刻を0、この回路を流れる交流の角振動数をωとして、以下の問いに答えよ。

① コンデンサーの電圧実効値はいくらか。I_e、ω、Cで表せ。

解説

(1) ① $Q=CV$　より$V=\dfrac{Q}{C}$　右回りで電位があがるので電圧は正　よって、$\dfrac{Q}{C}$



② 電圧1周＝0なので、　コイルの電圧は

$-\dfrac{Q}{C}$

③ コンデンサーが最大電圧（満タン）になっている。コンデンサーが満タンのときは電流は0

④ 電気エネルギーは　コイル　$\dfrac{1}{2}LI^2$　コンデンサー　$\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$

である。この場合$I=0$なので、コイルのエネルギーは0

コンデンサーは$\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$

⑤ コンデンサーの電気量が0なので、0V

⑥ 電圧1周＝0なので、コイルも0V

⑦ $V=-L\dfrac{dI}{dt}=0$　より、$\dfrac{dI}{dt}=0$

⑧ $Q=0$なので、電気エネルギーは0J

⑨ 公式より　$\dfrac{1}{2}LI_0{}^2$

⑩ スイッチを入れた直後のコンデンサーとコイルのエネルギー和は$\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$である。

この瞬間はコイルにエネルギーがすべてたまっており、$\dfrac{1}{2}LI_0{}^2$である。

よって、　$\dfrac{1}{2}LI_0{}^2=\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$

これより、　$I_0=\dfrac{Q}{\sqrt{LC}}$

⑪ 電流が0であるからコンデンサーは満タンである。
よって、たまっている電気量はQ
電流がAからBに流れたのであるからBが正極

⑫ 電圧は$\dfrac{Q}{C}$であるが、Bが正極であるため、右回りすると電位が下がる。よって、

$-\dfrac{Q}{C}$

⑬ 電圧1周＝0より、　$\dfrac{Q}{C}$

⑭ コンデンサーは空であるので、電圧は0V

⑮ 電圧1周＝0より、コイルも0V

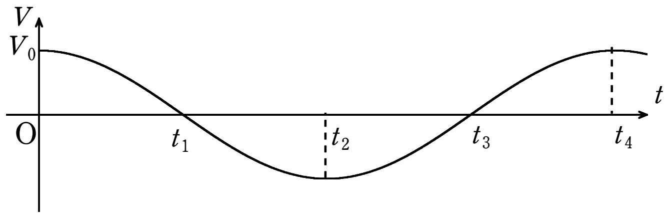
② コイルの電圧実効値はいくらか。I_e、ω、Lで表せ。

③ 直流回路における直列接続は各装置の電圧の和が全体の全圧になるが、交流回路の電圧実効値の和は全体の電圧になるとは限らない。このことを説明した下の文章の（）に適語を入れよ。

交流回路における各電圧実効値の和が全体の和にならないのは、電圧が最大になる瞬間が（ ア ）ためである。実効値は最大値の（ イ ）倍であるから、最大値が一致しなければ電圧実効値の和が全体の電圧にならない。この回路の場合は、コンデンサーの電圧とコイルの電圧は常に（ ウ ）なるので、それぞれの電圧が最大になる瞬間が（ エ ）する。よって、この回路の場合は電圧実効値の和が全体の電圧になっている。

④ ①②③の結果よりωをL,Cで表せ。

・ 下のグラフはスイッチを入れてからのコンデンサーの電圧を時間ごとに表したものである。

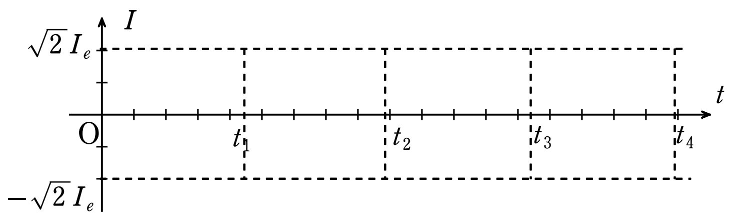


⑤ この共振回路の電気振動の周期、及び共振周波数をL,Cで表せ。

⑥ 上のグラフのt_1、t_2、t_3、t_4の時刻をL,Cで表せ。

⑦ 上のグラフのV_0をI_e、L,Cで表せ。

⑧ 下の図にスイッチを入れてからこの回路を流れる電流のグラフを描け。電流は右回りを正とする。



⑨ スイッチを入れた直後のコンデンサーの電圧、電流をそれぞれI_e、L,Cで求めよ。

⑩ スイッチを入れてから、最初にコンデンサーにたまっている電気量が0になる時刻をL,Cで表せ。

⑪ スイッチを入れてから、最初に電流が最大になる時刻をL,Cで表せ。

⑫ スイッチを入れてから、最初にコンデンサーにたまっている電気量が正負逆になりしかも最大電気量になる時刻をL,Cで表せ。

⑬ スイッチを入れてから最初にコイルにたまっている磁気エネルギーが最大になる時刻をL,Cで表せ。

⑭ スイッチを入れてから最初に電流が最初と逆向きで最大電流になる時刻をL,Cで表せ。

⑮ コンデンサーの電気量が最初と同じ状態になるまでの時間をL,Cで表せ。

⑯ $V=-L\dfrac{dI}{dt}=0$ より、$\dfrac{dI}{dt}=0$

⑰ 0J

⑱ ⑨と同様にして$\dfrac{1}{2}LI_0{}^2$

⑲ ⑩と同様にして$I_0=\dfrac{Q}{\sqrt{LC}}$であるが、⑩と逆向きに流れているので

$I_0=-\dfrac{Q}{\sqrt{LC}}$

⑳ $\dfrac{dI}{dt}=0$の時の電流が最大電流である。よって、$\dfrac{Q}{\sqrt{LC}}$

(2) ① コンデンサーのリアクタンスが$\dfrac{1}{\omega C}$なので、電圧実効値は$\dfrac{I_e}{\omega C}$

② コイルのリアクタンスはωLなので、電圧実効値はωLI_e。

③ ア）一致しない　イ）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　ウ）等しく　エ）一致

④ この回路では電圧が最大になる瞬間が一致するので$\dfrac{I_e}{\omega C}=\omega LI_e$

これを解くと　$\omega=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

⑤ 共振周期は$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{LC}$

共振周波数は　$f=\dfrac{1}{T}=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

⑥ t_1～t_4は共振周期を４等分したものであるから、

$t_1=\dfrac{\pi}{2}\sqrt{LC}$、$t_2=\pi\sqrt{LC}$、$t_3=\dfrac{3}{2}\pi\sqrt{LC}$、$t_4=2\pi\sqrt{LC}$

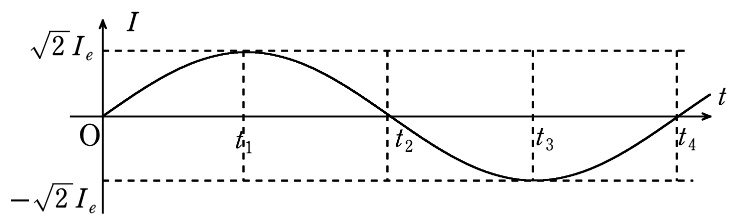
⑦ コンデンサーの電圧実効値は$\dfrac{I_e}{\omega C}$なので、④を代入すると、

$V_e=\dfrac{I_e}{\omega C}=I_e\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

V_0は最大値であるからこれの$\sqrt{2}$倍になる。よって、

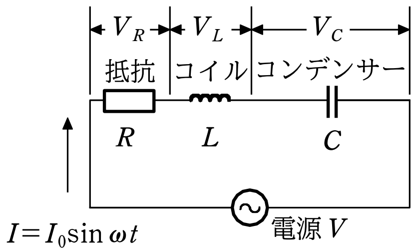
$V_0=I_e\sqrt{\dfrac{2L}{C}}$

⑧



124. RLC直列回路

(1) ある交流電源に抵抗値Rの抵抗、自己インダクタンスLのコイル、電気容量Cのコンデンサーを直列につないだところ電流Iが、$I_0\sin\omega t$で表される電流が流れた。I_0、ωは定数であり、tは時間を表している。抵抗、コイル、コンデンサーにかかっている電圧をそれぞれV_R、V_L、V_Cとする。この回路を図で示したのが右図である。これに関して、以下の問いに答えよ。



① 電流の最大値、及び実効値をI_0で表せ。

② この交流の電源周波数はいくらか。ωで表せ。

③ コイル、コンデンサーのリアクタンスをω、C、Lで表せ。

④ V_R、V_L、V_Cの最大値をω、C、L、R、I_0で表せ。

⑤ 電流実効値をI_eとするとき、V_R、V_L、V_Cの実効値をω、C、L、R、I_eで表せ。

⑥ V_RをR、I_0、ω、tで表せ。

⑦ V_LをL、I_0、ω、tで表せ。

⑧ V_CをC、I_0、ω、tで表せ。

⑨ 電源電圧VをV_R、V_L、V_Cで表せ。

⑩ 電源電圧VをR、L、C、I_0、ω、tで表せ。

⑪ 三角関数の合成公式

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\phi)$$

$$\tan\phi=\frac{b}{a}$$

を用いて、⑩を合成し、$\sqrt{a^2+b^2}$と$\tan\phi$をR、L、C、I_0、ωで表せ。

⑨ 電圧は最大電圧$V_0=I_e\sqrt{\frac{2L}{C}}$、電流は0

⑩ $t_1=\frac{\pi}{2}\sqrt{LC}$

⑪ $t_1=\frac{\pi}{2}\sqrt{LC}$

⑫ $t_2=\pi\sqrt{LC}$

⑬ 磁気エネルギーは電流によって決まるので電流が最大になる時刻

$t_1=\frac{\pi}{2}\sqrt{LC}$

⑭ $t_3=\frac{3}{2}\pi\sqrt{LC}$

⑮ $t_4=2\pi\sqrt{LC}$

解説

(1) ① 最大値I_0、実効値$\frac{\sqrt{2}}{2}I_0$

② $f=\frac{\omega}{2\pi}$ （等速円運動の回転数の公式と同じ）

③ コイル ωL コンデンサー$\frac{1}{\omega C}$

④ $V_R:RI_0$ $V_L:\omega LI_0$ $V_C:\frac{I_0}{\omega C}$

⑤ $V_R:RI_e$ $V_L:\omega LI_e$ $V_C:\frac{I_e}{\omega C}$

⑥ $V_R=RI_0\sin\omega t$

⑦ $V_L=\omega LI_0\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$

⑧ $V_C=\frac{I_0}{\omega C}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$

⑨ $V=V_R+V_L+V_C$

⑩ $V=RI_0\sin\omega t+\omega LI_0\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{I_0}{\omega C}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$

$$=RI_0\sin\omega t+\omega LI_0\cos\omega t-\frac{I_0}{\omega C}\cos\omega t$$

$$=RI_0\sin\omega t+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)I_0\cos\omega t$$

⑪ $V=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}\sin(\omega t+\phi)$

$$\tan\phi=\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}$$

⑫　電源の最大電圧V_0をR、L、C、ω、I_0で表せ。

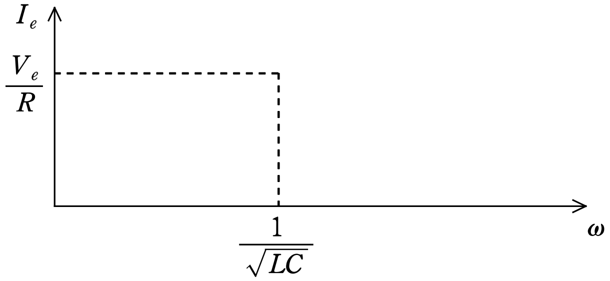
⑬　電流実効値I_eをR、L、C、ω及び電圧実効値V_eで表せ。

⑭　$\lim_{\omega\to 0} I_e$、$\lim_{\omega\to\infty} I_e$はいくらになるか。

⑮　I_eが最大になるときのωをL,Cで表せ。

⑯　I_eの最大値をR,V_eで表せ。

⑰　縦軸にI_e、横軸にωを採ったグラフの概形を描け。

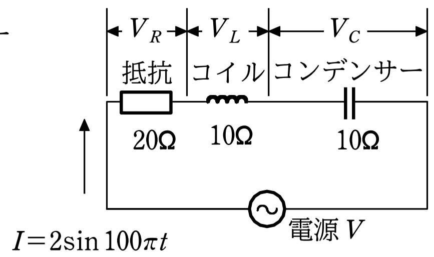


⑱　ここ回路の性質を示した以下の文章の（）に適語を入れよ。

RLC直列回路はコイルとコンデンサーの（　　　）と等しい周波数の交流を最もよく流す。電源に複数の（　　　）の交流電圧がかかっているとき、特定の周波数の交流のみ取り出すときに使われる。たとえば、ラジオ受信機において、アンテナから受信したさまざまな周波数の交流の中から聞きたい放送局の電波のみを取り出すときである。

125.　RCL直列回路（数値）

交流周波数50Hzの交流電源につないだところリアクタンスが10Ωとなるコイルとコンデンサー及び20Ωの抵抗を直列につないだ。この回路に交流電源をつなぐと$I=2\sin 100\pi t$[A]の交流電流が流れた。これに関して以下の問いに答えよ。



①　コイルの自己インダクタンス及び、コンデンサーの電気容量をπを用いて

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

⑫　$V_0=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}\,I_0$

⑬　⑫より$V_e=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}\,I_e$

よって、$I_e=\dfrac{V_e}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$

⑭　$\lim_{\omega\to 0}\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)=\infty$　$\lim_{\omega\to\infty}\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)=\infty$より

$\lim_{\omega\to 0} I_e=0$　、$\lim_{\omega\to\infty} I_e=0$

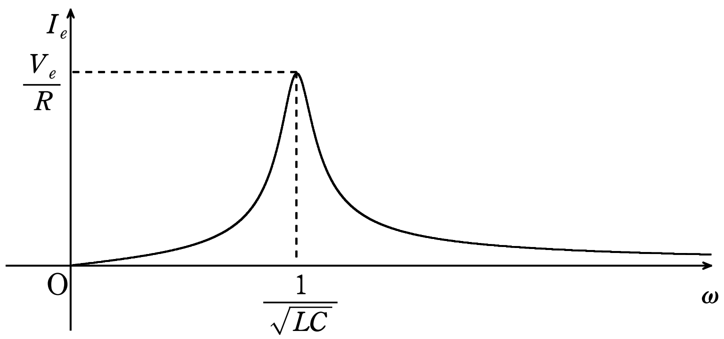
⑮　$I_e=\dfrac{V_e}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$より、$\omega L-\dfrac{1}{\omega C}=0$のとき$I_e$が最大値になる。

よって、$\omega=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

⑯　$I_e=\dfrac{V_e}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$に$\omega=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$を代入して、

$I_e=\dfrac{V_e}{R}$

⑰



⑱　共振周波数　周波数

解説

①　$\omega=100\pi$　　コイル：ωLより　$100\pi L=10$　　よって、$L=\dfrac{1}{10\pi}$H

コンデンサー：$\dfrac{1}{\omega C}$より　$\dfrac{1}{100\pi C}=10$　よって、$C=\dfrac{1}{1000\pi}$F

②　$I=2\sin 100\pi t$　より　最大値は2A　実効値は$\sqrt{2}$A

③　$V_R=RI_0\sin\omega t=40\sin 100\pi t$

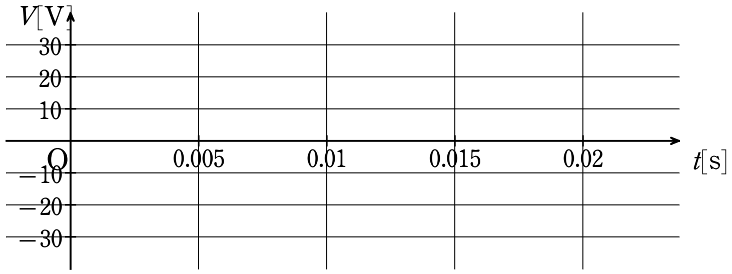
$V_L=\omega LI_0\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)=20\cos 100\pi t$

表せ。

② 電流の最大値、実効値はいくらか。根号はそのままでよい。

③ V_R、V_L、V_Cをtで表せ。

④ V_R、V_L、V_Cのグラフを描け。



⑤ 電源電圧のグラフを上のグラフに重ねて描け。

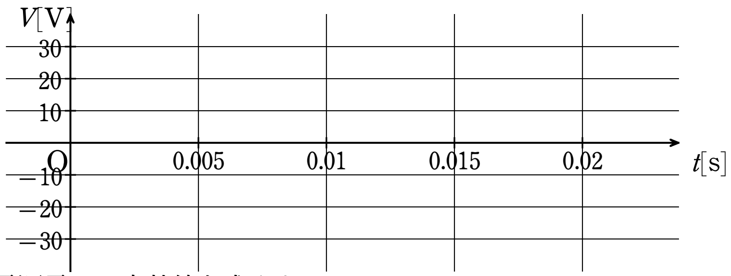
⑥ 電源電圧の実効値はいくらか

・ 交流周波数を2倍にして同じ実験をしたところ、電流が$I=2\sin 200\pi t$[A]となった。

⑦ コイル及びコンデンサーのリアクタンスはいくらになったか。

⑧ V_R、V_L、V_Cをtで表せ。

⑨ V_R、V_L、V_Cのグラフを描け。



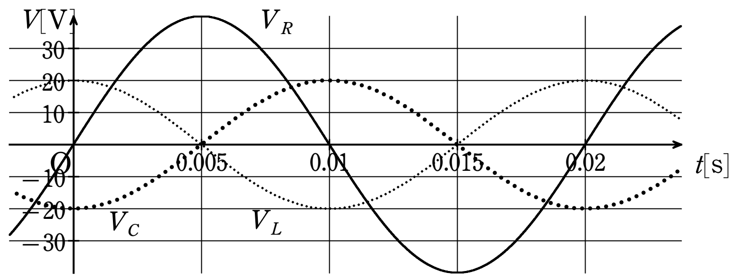
⑩ ⑧より電源電圧の実効値を求めよ。

⑪ これらの実験に関する考察の文章の（）に適語を入れよ。

コイルとコンデンサーのリアクタンスが等しい場合は、コイルとコンデンサーの電圧が互いに（　ア　）関係になり、抵抗のみの電圧が電源電圧となる。周波数を2倍にすると、コイルの電圧は（　イ　）倍になるが、コンデンサーの電圧が（　ウ　）になるため、コイルとコンデンサーの電圧が打ち消さなくなり、電源電圧が（　エ　）くなる。逆に言えばその分だけ電流が流れ（　オ　）くなっているということである。

$$V_C=\frac{I_0}{\omega C}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)=-20\cos 100\pi t$$

④



⑤ 上のグラフのV_Rと同じ

⑥ 最大値が40Vなので、実効値は$20\sqrt{2}$ V

⑦ コイル：ωLよりωが2倍になっているので、リアクタンスは2倍になる。よって、20Ω

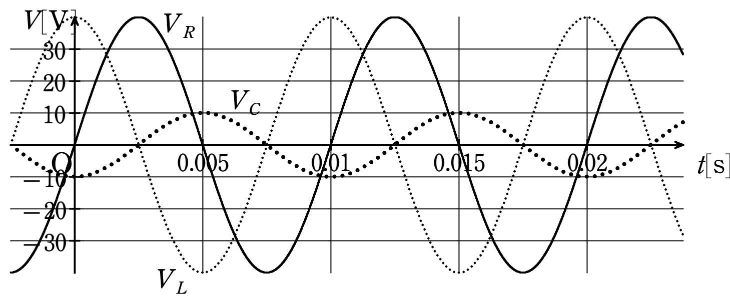
コンデンサー：$\dfrac{1}{\omega C}$よりリアクタンスは$\dfrac{1}{2}$倍。よって、5Ω

⑧ $V_R=RI_0\sin\omega t=40\sin 100\pi t$

$$V_L=\omega LI_0\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)=40\cos 100\pi t$$

$$V_C=\frac{I_0}{\omega C}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)=-10\cos 100\pi t$$

⑨



⑩ $V=V_R+V_L+V_C=40\sin 100\pi t+40\cos 100\pi t-10\cos 100\pi t$

$=40\sin 100\pi t+30\cos 100\pi t$

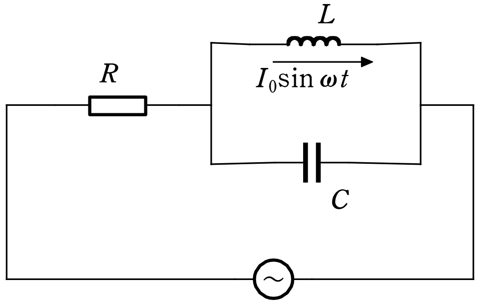
$=50\sin(100\pi t+\phi)\quad \tan\phi=\dfrac{3}{4}$

これより、50V

⑪ ア　打ち消しあう、イ　2、ウ　$\dfrac{1}{2}$、エ　高、オ　にく

126. RLC並列回路

抵抗値Rの抵抗、自己インダクタンスLのコイル、電気容量Cのコンデンサー及び交流電源を右図のように接続すると、コイルに$I_0\sin\omega t$で表される電流が流れた。ここで、I_0、ωは定数でtは時刻を表している。



① コイルにかかっている電圧V_Lはいくらか。ω、L、I_0、tで表せ。

② コンデンサーにかかっている電圧V_Cはいくらか。ω、L、I_0、tで表せ。

③ コンデンサーを流れている電流はいくらか。ω、L、C、I_0、tで表せ。

④ コイルとコンデンサーを流れる電流の向きにはどのような関係があるか

⑤ 抵抗を流れる電流I_Rはいくらか。ω、L、C、I_0、tで表せ。

⑥ 抵抗にかかっている電圧はいくらか。ω、L、C、R、I_0、tで表せ。

⑦ 電源電圧をω、L、C、R、I_0、tで表せ。

⑧ 抵抗に電流が流れていないとき、ωをL,Cで表せ。

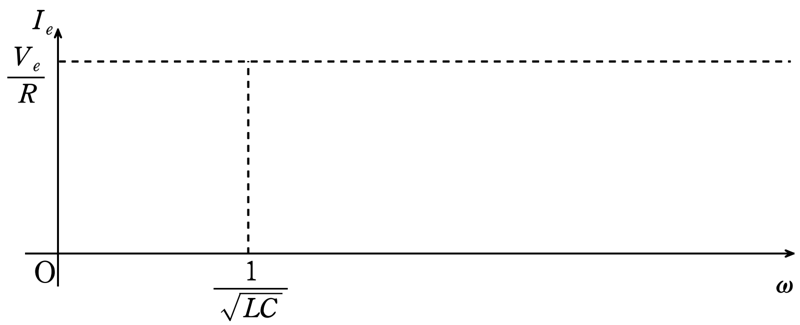
⑨ コイルとコンデンサーの電流の大きさの比$\dfrac{I_C}{I_L}$をω、L、Cで表せ。

⑩ $\omega\to0$のとき、コイル･コンデンサーのリアクタンスはいくらに近づくかを考慮し、電源電圧の実効値をV_eとするとき、$\omega\to0$における抵抗Rを流れる電流の実効値を求めよ。

⑪ $\omega\to0$の時、コンデンサー、コイルに流れる電流$\lim\limits_{\omega\to0}I_C$及び$\lim\limits_{\omega\to0}I_L$の実効値を求めよ。

⑫ $\omega\to\infty$の時、コンデンサー、コイルに流れる電流$\lim\limits_{\omega\to\infty}I_C$及び$\lim\limits_{\omega\to\infty}I_L$を求めよ。

⑬ ωを変化させたときの抵抗、コンデンサー、コイルを流れる電流のグラフの概形を描け。



⑭ この回路の性質についての以下の文章の（）に適語を入れよ。

この回路に低周波の交流を流したとき、コンデンサーのリアクタンスが（　ア　）、コイルのリアクタンスが（　イ　）ので、電流は（　ウ　）のほうを流れ、（　エ　）を流

解説

① $V_L=\omega LI_0\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{2}\right)$

② 並列なので、$V_C=V_L=\omega LI_0\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{2}\right)$

③ コンデンサーにかかる電圧を$V_0\sin(\omega t+\phi)$とするとき、

電流は$I=\omega CV_0\sin\left(\omega t+\phi+\dfrac{\pi}{2}\right)$

なので、

$$I_C=\omega CV_0\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\omega^2LCI_0\sin(\omega t+\pi)=-\omega^2LCI_0\sin\omega t$$

④ コンデンサーとコイルの電流の符号が逆なので、必ず逆方向に電流が流れる。

⑤ 抵抗に流れる電流はコンデンサーとコイルの流れる電流の和なので、

$I_R=I_0\sin\omega t-\omega^2LCI_0\sin\omega t=(1-\omega^2LC)I_0\sin\omega t$

⑥ オームの法則より　$V_R=RI_R=(1-\omega^2LC)I_0R\sin\omega t$

⑦ 電源電圧は$V=V_R+V_L$なので

$$V=(1-\omega^2LC)I_0R\sin\omega t+\omega LI_0\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=(1-\omega^2LC)I_0R\sin\omega t+\omega LI_0\cos\omega t$$

⑧ $I_R=(1-\omega^2LC)I_0\sin\omega t=0$

となるようなωを求めればよいので、$1-\omega^2LC=0$

よって、　$\omega=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

⑨ $\dfrac{I_C}{I_L}=\dfrac{LC\omega^2I_0\sin\omega t}{I_0\sin\omega t}=\omega^2LC$

⑩ コイルはωL･コンデンサーは$\dfrac{1}{\omega C}$のリアクタンスなので、$\omega\to0$のとき、コイルは0にコンデンサーは無限大に近づく、コイルを無抵抗に電流が流れることができるので、電圧はすべて抵抗にかかる。よって、抵抗に流れる電流は$\dfrac{V_e}{R}$

⑪ コイルが無抵抗なので、抵抗を流れた電流はすべてコイルを流れる。よって、

$\lim\limits_{\omega\to0}I_C$の実効値0　$\lim\limits_{\omega\to0}I_L$の実効値$=\dfrac{V_e}{R}$

⑫ $\omega\to\infty$の時、はコイルのリアクタンスが無限大になり、コンデンサーのリアクタンスが0となる。

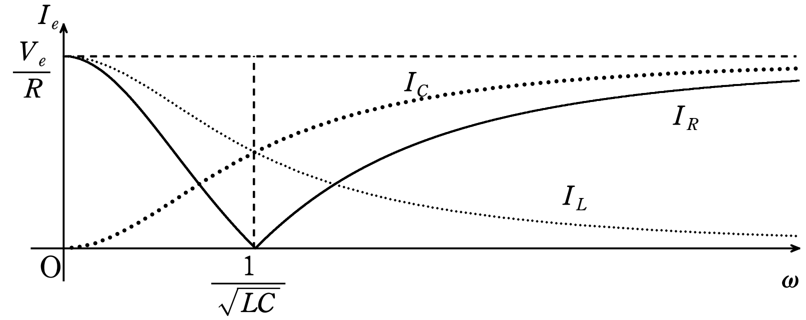
れる電流はほぼ0である。交流周波数が高くなるに連れて、コンデンサーのリアクタンスが（　オ　）なりコイルのリアクタンスが（　カ　）なるので、次第にコンデンサーのほうに電流が流れ出し、コイルの電流は減少する。交流周波数がLC回路の（　キ　）と一致したとき、コイル･コンデンサーを流れる電流が（　ク　）なり、両者が逆に流れているために、この瞬間抵抗を流れる電流が（　ケ　）になる。周波数がさらに高くなると、コイルのリアクタンスはさらに高くなり、コンデンサーのリアクタンスは0に近づいていくので、（　コ　）に電流が流れ、（　サ　）には流れなくなる。

　この回路は交流を流さない瞬間があるので、交流と直流が混ざった電流から（　シ　）のみ取り出すのに使うことができる。

127.

$\lim_{\omega\to\infty} I_C$の実効値$=\frac{V_e}{R}$　$\lim_{\omega\to\infty} I_L=0$

⑬



$\omega=0$で$I_R=I_L=\frac{V_e}{R}$、$I_C=0$

$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$で$I_R=0$、$I_L=I_C$

$\omega\to\infty$で$I_R=I_C=\frac{V_e}{R}$、$I_L=0$

となっていればよい。

⑭　この回路に低周波の交流を流したとき、コンデンサーのリアクタンスが（　ア　大きく　）、コイルのリアクタンスが（　イ　小さい）ので、電流は（　ウ　コイル）のほうを流れ、（　エ　コンデンサー）を流れる電流はほぼ0である。交流周波数が高くなるに連れて、コンデンサーのリアクタンスが（　オ　小さく）なりコイルのリアクタンスが（　カ　大きく）なるので、次第にコンデンサーのほうに電流が流れ出し、コイルの電流は減少する。交流周波数がLC回路の（　キ　共振周波数）と一致したとき、コイル･コンデンサーを流れる電流が（　ク　等しく）なり、両者が逆に流れているために、この瞬間抵抗を流れる電流が（　ケ　0）になる。周波数がさらに高くなると、コイルのリアクタンスはさらに高くなり、コンデンサーのリアクタンスは0に近づいていくので、（　コ　コンデンサー）に電流が流れ、（　サ　コイル）には流れなくなる。

　この回路は交流を流さない瞬間があるので、交流と直流が混ざった電流から（　シ　直流）のみ取り出すのに使うことができる。