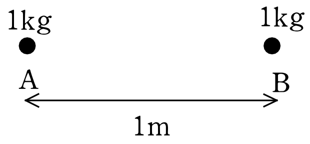
21．万有引力の法則

(1)　二つの物体が離れて存在しているとき、この二物体間には弱いながら引力が作用している。この引力を万有引力という。等しい質量1kgの二物体A,Bが1m離れて存在しているとき、この二物体間には6.7×10^{-11}Nの大きさの万有引力が作用していることが分かっている。この大きさをGとして、次の各問いに答えよ。

①　二物体A、Bが右のように配置されているとき A、Bそれぞれに作用する万有引力の方向（右･左）と大きさをGで表せ。



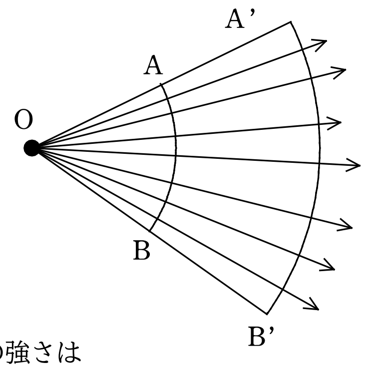
②　Aのみを質量2kgの物体と置き換えた。（Aに1kgの物体が二つ並んでいると考えると良い）A、Bそれぞれに作用する万有引力の方向（右･左）と大きさをGで表せ。

③　Aのみを質量m[kg]の物体と置き換えた。A、Bそれぞれに作用する万有引力の大きさをGで表せ。

④　③の状態からさらにBの物体の質量を2kgに置き換えた。A、Bそれぞれに作用する万有引力の大きさをGで表せ。

⑤　③の状態からさらにBの物体の質量をM[kg]に置き換えた。A、Bそれぞれに作用する万有引力の大きさをGで表せ。

(2)　O点を光源と考え、O点を中心とする球面ABとA’B’がある。OAA’、OBB’は同一直線上にあるものとする。Oから放射状に等方的に光が出ているとき、以下の問いに答えよ。



①　球面ABを通過する光の量を1とするとき、球面A’B’を通過する光の量はいくらか。

②　2OA＝OA’とするとき、球面A’B’の面積は球面ABの面積の何倍になるか

③　②のとき、球面A’B’上の単位面積あたりの光の強さは球面AB上の単位面積あたりの光の強さの何倍か

④　②のとき、球面A’B’上に球面ABと同じ面積の領域Sを考えたとき、領域Sの受ける光の量は球面ABの光の量の何倍か。

⑤　rOA＝OA’とするとき、球面A’B’上に球面ABと同じ面積の領域Sを考えたとき、領域Sの受ける光の量は球面ABの光の量の何倍か。

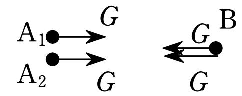
⑥　光源からの距離がr倍になったとき、その物体が光源から受ける光の量は何倍になると考えられるか。

⑦　万有引力は物体から重力子と呼ばれる粒子が飛び出し、その重力子を受け取ることにより生じると考えられている。重力子を光（光子）と同じように考え、万有引力の強さは重力子の量に比例するとすれば、物体間の距離がr倍になったとき、その二物体間に作用する万有引力の強さは何倍になるか。

⑧　(1)と同じ条件で質量M、mの二物体が距離r離れているときの万有引力の大きさを

(解説)

(1)　①　2物体に作用する万有引力は作用反作用の関係にあるので常に同じ大きさ逆向きである。　A：右向きG[N]　B：左向きG[N]



②　Aを1kgの２物体A1,A2と考えると、A_1Bの間にG[N]が作用し、A_2Bの間にG[N]が作用していることになるので、A,Bそれぞれ2G[N]の力が作用していることになる。方向は①と同じ

③　Aの質量が２倍になると万有引力は２倍になるので、万有引力の大きさはAの質量に比例するといえる。よって、A,Bともに、mG[N]

④　②と同じ考え方でBの質量が２倍になっても万有引力は２倍になる。よって、$2mG$[N]

⑤　Bの質量がM倍になったとき、万有引力の大きさもM倍となる。よって、GMm[N]

(2)　①　ABを通過した光はすべてA’B’を通過するので、1

②　面積比は相似比の２乗なので、４倍

③　ABの４倍の面積でABと同じ光量を受けるので、単位面積あたりにすると、A’B’面が受ける光量は$\frac{1}{4}$となる。よって、$\frac{1}{4}$倍

④　③と同じく$\frac{1}{4}$倍　　⑤　$\frac{1}{r^2}$倍

⑥　⑤と同じく$\frac{1}{r^2}$倍　　⑦　$\frac{1}{r^2}$倍

⑧　距離1m離れているときの万有引力の強さがGMm[N]なので、距離がr[m]になったときは、その$\frac{1}{r^2}$倍になると思われ、$F=G\frac{Mm}{r^2}$[N]

(3)　①　面積比は距離比の2乗倍なので、r^2倍となる。

②　球殻A,Bの厚さは同じなので、面積比が体積比となる。よって、r^2倍

③　物質の密度が同じなので、体積比が質量比になる。よって、r^2倍

④　Aに対してBは距離がr倍で質量がr^2倍である。点Pにある物体に作用する力は質量の積（r^2）に比例し距離の２乗に反比例（$\frac{1}{r^2}$）するので、互いに打ち消しあい１倍となる。よって、１：１

⑤　④の場合万有引力が互いに逆向きに同じ大きさで作用するので互いに打ち消しあうために万有引力は0となる。球殻内に万有引力はない。

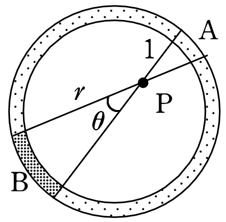
(4)　①　万有引力の作用する距離は互いの重心までの距離と考えてよいので、地球の半径となる。よって、R

②　$F=G\frac{Mm}{R^2}$

③　高さhであるが、互いの重心までの距離なので、$R+h$

M,m,G,rを用いて表せ。

(3)　右図のような球殻を考える。球殻内に空洞があり、その空洞内の1点Pがある。Pから微小角θで互いに反対方向に直線を引いて球殻の直線にはさまれた部分をA,Bとする。PとA,Bまでの距離を1:rとする。この球殻は十分に薄く、密度は一様であるとして、以下の問いに答えよ。



①　球面Bの面積はAの何倍か。rで表せ。

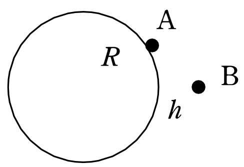
②　球殻Bの体積はAの何倍か。rで表せ。

③　球殻Bの質量はAの何倍か。rで表せ。

④　点Pにある小物体が球殻A、Bから受ける力の大きさの比はいくらか。

⑤　球殻内にある物体に作用する万有引力にはどのような特徴があるか。

(4)　半径R、質量Mの球形の地球上に質量mの物体Aが、地上からの高さがhの空間に質量mの物体Bが存在している。万有引力定数をGとして、以下の問いに答えよ。ただし、万有引力の作用点は重心と考えてよい。



①　万有引力の作用点を重心と考えた場合、Aと地球との距離はいくらになるか

②　Aに作用する万有引力の大きさはいくらか

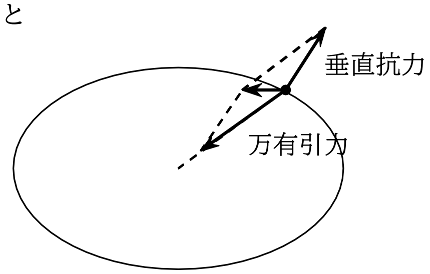
③　Bと地球との距離はいくらになるか

④　Bに作用する万有引力の大きさはいくらか

22.　万有引力と重力の関係

(1)　地球は完全な球体ではなく、回転楕円体と呼ばれる楕円形をしている。右図はそれを極端に描いたものである。

　この場合、地球上にある物体に作用している万有引力は地球の中心を向き、垂直抗力は楕円面に直角に作用している。



この点に関して以下の問いに答えよ。

①　垂直抗力と万有引力の合力は0ではない。物体に力が作用している以上地球上の物体に何か運動をさせているはずである。この合力は地球上の物体にどういう運動をさせる力か。地球が自転しているという事実に基づいて答えよ。

②　地球が自転（向心加速度がある）しているため、地球上の物体には慣性力（遠心力）が作用する。上の図の場合遠心力はどの方向に作用するか。

④　$F=G\dfrac{Mm}{(R+h)^2}$

解説

(1)　①　地球の自転にあわせて地球上の全物体は周期24時間の等速円運動をしている。合力はその向心力となっている。

②　向心力の逆向きで図では右向きとなる。

③　静止しているのであるから合力は0となる。$\vec{F}+\vec{N}+\vec{f}=0$

④　$\vec{F}+\vec{N}+\vec{f}=0$なので、$\vec{F}+\vec{f}=-\vec{N}$

⑤　重力という。$-\vec{N}$であることから、垂直抗力の逆向きで鉛直下向きとなる。

⑥　赤道付近では万有引力は地球中心方向向き、遠心力はその逆向きになるので、合力は　9.8N−0.03N＝9.77N

北極点では回転半径が0なので、遠心力がない。よって、重力は9.80N

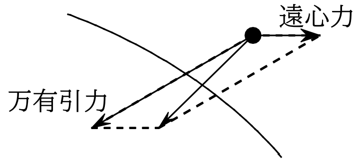
⑦　有効数字2桁の場合　赤道付近で9.8N　北極点で9.8N

有効数字2桁の範囲内では等しくなる。

⑧　万有引力は　$F=G\dfrac{Mm}{R^2}$　重力はmgである。この二つの力は等しいと考えるので、

$G\dfrac{Mm}{R^2}=mg$　よって、$g=\dfrac{GM}{R^2}$

・ 地球上にある物体に万有引力$\vec{F}$、垂直抗力$\vec{N}$、遠心力$\vec{f}$が作用しているとする。



③　地球上に静止している物体に作用する物体に関して$\vec{F}+\vec{N}+\vec{f}$はいくらか。

④　空中にある物体には垂直抗力が作用していないので、$\vec{F}$と$\vec{f}$の力のみが作用することになる。$\vec{F}+\vec{f}$を$\vec{N}$で表せ。

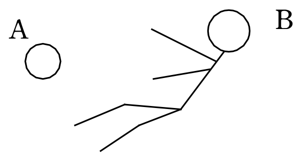
⑤　$\vec{F}+\vec{f}$はなんと呼ばれる力か。また、どの方向を向いているか。

⑥　地球上にある1kgの物体に作用している万有引力の大きさは9.80Nであり、遠心力は赤道付近で0.03N作用している。赤道付近と北極点での重力の大きさはそれぞれいくらか。有効数字3桁で答えよ。

⑦　⑥の場合において有効数字2桁とすると、赤道付近と北極点での重力の大きさはいくらになるか。また、2桁の有効数字の範囲内において万有引力と重力の大きさはどういった関係にあるか。

⑧　万有引力定数をG、地球の質量をM、地球の半径をRとするとき、地球上にある質量mの物体に対する万有引力と重力は等しいと考えて、重力加速度の大きさgをG,M,Rで表せ。

(2)　宇宙船の中では無重力状態になり、周りの物体は浮き上がるといわれている。地上すれすれに飛んでいる宇宙船が向心加速度gで等速円運動しているとき、宇宙船内の質量mの物体Aと人Bについて以下の問いに答えよ。ただし、地球の中心は図の下にあるとする。



①　宇宙船が向心加速度gの等速円運動をしているということは船内の物体も向心加速度gの等速円運動をしていることになる。この向心加速度を生じさせる力の名称を答えよ。

②　物体Aに作用している万有引力の方向及び大きさをm,gで表せ。

③　人の向心加速度の方向を答えよ。

④　この人から見て、物体Aに作用しているように見える慣性力（遠心力）の方向と大きさをm,gで表せ。

⑤　人Bから見て物体Aに作用している万有引力と慣性力の合力はいくらか。

⑥　人Bから見て物体Aに作用している重力の大きさはいくらになるか。

23.　円軌道の人工衛星

(1)　万有引力定数をG、地球の質量をM、地球の半径をRとする。地球表面の重力加速度の大きさをgとし、重力と万有引力は等しいとして、地球表面すれすれに等速円運動をする質量mの人工衛星について以下の問いに答えよ。

①　この人工衛星に作用している万有引力の大きさをG,M,m,Rで表せ。

②　この人工衛星の速さをvとするとき、向心加速度の大きさをR,vで表せ。

③　この人工衛星の運動方程式を立てよ。

④　この人工衛星の速さをG,M,Rで表せ。

(2)　①　万有引力（宇宙船は万有引力によって等速円運動している。）
（重力ではない。重力は万有引力と遠心力の合力である。）

②　向心加速度がgなので、万有引力はmgとなる。方向は下向き

③　人の加速度も同じくgで下向き

④　Aの加速度の逆向きであるので上向きにmg

⑤　万有引力が下向きにmgで遠心力が上向きにmgであるから、合力は0

⑥　万有引力と遠心力の合力が重力なので、この場合重力は0となる。

解説

(1)　①　$G\dfrac{Mm}{R^2}$　②　$\dfrac{v^2}{R}$　③　$G\dfrac{Mm}{R^2}=m\dfrac{v^2}{R}$

④　③を解いて、$v=\sqrt{\dfrac{GM}{R}}$

⑤　$G\dfrac{Mm}{R^2}=mg$より、$GM=gR^2$

⑥　⑤を④に代入して$v=\sqrt{\dfrac{GM}{R}}=\sqrt{gR}$

⑤　万有引力と重力を等しいと置いてGMをg,Rで表せ。

⑥　この人工衛星の速さをg,Rで表せ。

⑦　人工衛星の周期Tをv,Rで表せ。

⑧　人工衛星の周期をg,Rで表せ。

(2)　(1)と同じ条件で地上hの高さのところを等速円運動する人工衛星について以下の問いに答えよ。

①　この人工衛星と地球との距離はいくらと考えればよいか。R,hで答えよ。

②　この人工衛星に作用している万有引力の大きさをG,M,m,R,hで表せ。

③　地上における重力と万有引力は等しいことを利用し、GMをg,Rで表せ。

④　この人工衛星に作用している万有引力の大きさをg,R,m,hで表せ。

⑤　この人工衛星の向心加速度を人工衛星の速さvとR,hで表せ。

⑥　この人工衛星の運動方程式を立てよ。

⑦　この人工衛星の速さをR,g,hで表せ。

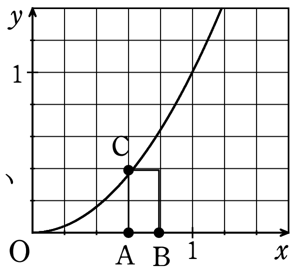
⑧　地上すれすれに飛んでいる人工衛星に比べて、この人工衛星は何倍の速さで動いているか。

24.　積分について（数学）

(1)　xy平面上に$y=x^2$のグラフがある。このグラフと$x=1$、$y=0$の直線で囲まれる部分の面積を求めるために次のような手順で計算した。以下の問いに答えよ。

・　x軸上$0<x<1$の領域内に座標$(x,0)$、$(x+dx,0)$をとり、この点をA、Bとする。dxはきわめて0に近い値をとるものとする。

・　Aからx軸に垂直な線を引きグラフとの交点をCとする。AC、ABを辺とする長方形を考える。

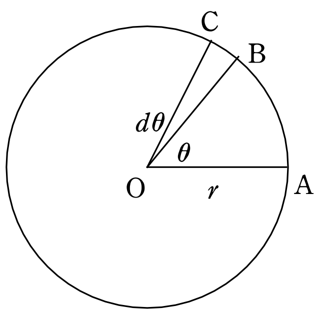


①　この長方形の面積をx,dxで表せ。

②　微小値　adxを$0<x<1$の範囲ですべて合計することを$\int_0^1 adx$と表すことができるものとする。この例にならって、この領域の面積を表せ。

③　この領域の面積はいくらになるか。

(2)　半径rの円Oの半径AOから角度θの円周上に点Bをとり、BOより微小角$d\theta$取った円周上に点Cをとる。これに関して以下の問いに答えよ。



①　弧BCの長さを$r,d\theta$で表せ。

②　$d\theta$は微小角のため、弧BCは直線と考えて良く、また、∠OBC＝90°と考えてよい。
このことを利用して△OBCの面積を$r,d\theta$で表せ。

③　円の面積は②の面積をθが0から2πまですべて合計したものとなる。このことを利用

⑦　周期は円周を1周する時間なので、円周を速さで割ればよい。$T=\dfrac{2\pi R}{v}$

⑧　⑦に⑥を代入して　$T=\dfrac{2\pi R}{v}=\dfrac{2\pi R}{\sqrt{gR}}=2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$

(2)　①　互いの重心までの距離と考えるので、$R+h$

②　$G\dfrac{Mm}{(R+h)^2}$　③　前問と同じく　$GM=gR^2$

④　③を②に代入する　$\dfrac{mgR^2}{(R+h)^2}$

⑤　$\dfrac{v^2}{R+h}$　⑥　$\dfrac{mgR^2}{(R+h)^2}=m\dfrac{v^2}{R+h}$　⑦　$v=R\sqrt{\dfrac{g}{R+h}}$

⑧　(1)⑥より地上すれすれのときは$\sqrt{gR}$なので、$\dfrac{R\sqrt{\dfrac{g}{R+h}}}{\sqrt{gR}}=\sqrt{\dfrac{R}{R+h}}$

解説

(1)　①　x^2dx　②　$\int_0^1 x^2dx$　③　$\int_0^1 x^2dx=\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^1=\dfrac{1}{3}$

(2)　①　$rd\theta$　②　$\dfrac{1}{2}r^2d\theta$

③　$\int_0^{2\pi}\dfrac{1}{2}r^2d\theta=\dfrac{1}{2}r^2\int_0^{2\pi}d\theta=\pi r^2$

(3)　①　三平方の定理より、$\sqrt{r^2-x^2}$

②　円の面積の公式より、$\pi\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2=\pi(r^2-x^2)$

③　この円盤は円柱と考えてよいので、$\pi(r^2-x^2)dx$

④　球の体積は

$$\int_{-r}^{r}\pi(r^2-x^2)dx=\pi r^2\int_{-r}^{r}dx-\pi\int_{-r}^{r}x^2dx=\pi r^2\Big[x\Big]_{-r}^{r}-\pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r}=\frac{4}{3}\pi r^3$$

(4)　①　$rd\theta$

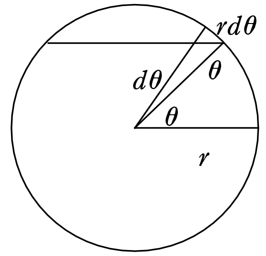
②　$r\cos\theta$

③　$2\pi r\cos\theta$

④　$2\pi r\cos\theta\cdot rd\theta$

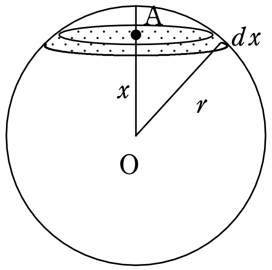
⑤　$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

⑥　$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\pi r^2\cos\theta\,d\theta$



して円の面積を求めよ。

(3)　半径rの球Aにおいて中心Oからx離れたところに点Aをとり、そこからAOに垂直に厚さdxの円盤を切り取った。dxは微小なので、この円盤は円柱と考えてよい。これに関して以下の問いに答えよ。



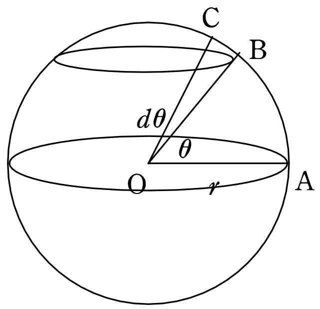
①　この円盤の半径をr,xで表せ。

②　この円盤の底面積をr,xで表せ。

③　この円盤の体積をr,x,dxで表せ。

④　球の体積はこの円盤の体積を$-r<x<r$の範囲ですべて合計したものである。これを基に、球の体積を求めよ。

(4)　半径rの球Oの中心を通る円Aから角度θ取った位置に円Aと平行に円B、$\theta+d\theta$の位置に円Cを考える。これに関して以下の問いに答えよ。



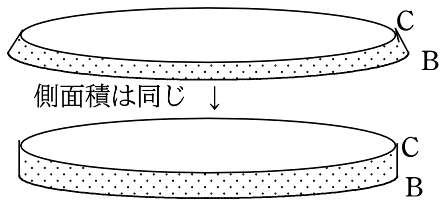
①　円Bと円Cに挟まれた部分の弧BCの長さをr、$d\theta$を用いて表せ。

②　円Bの半径をr,θであらわせ。

③　円Bの円周をr,θであらわせ。

④　円Bと円Cで挟まれた部分の側面の面積を$r,\theta,d\theta$で表せ。

⑤　④の面積を合計して球の全表面積にするためにはθの値がいくらからいくらまで合計する必要があるか



⑥　球の表面積を積分形で表せ。

⑦　球の表面積を求めよ。

(5)　初速度v_0、一定の加速度aで等速直線運動している物体がある。以下の問いに答えよ。

①　加速度aの意味は1秒間に速度がaだけ変化するという意味である。この物体は微小時間dtにどれだけ速度が変化するか。

②　最初からT秒間に速度はどれだけ変化するかを求めるには微小時間の速度変化を$0<t<T$の範囲ですべて合計すればよい。T秒間の速度変化を積分の形でかけ。

③　T秒後の速度をa,T,v_0で表せ。

④　t秒後の速度をa,t,v_0で表せ。

⑤　時刻t秒の瞬間の微小時間dt秒間の移動距離を④とdtを用いて表せ。

⑥　最初のT秒間の移動距離は微小時間の移動距離を$0<t<T$の範囲ですべて合計すればよい。T秒間の移動距離を積分形で表せ。

⑦　最初のT秒間の移動距離をv_0,T,aで表せ。

25.　万有引力による位置エネルギー

(1)　半径R、質量Mの地球中心から距離x離れた

⑦ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi r^2\cos\theta\, d\theta = 2\pi r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta = 2\pi r^2\Big[\sin\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi r^2$

(5)　①　adt　②　$\displaystyle\int_0^T adt$　③　$v=v_0+\displaystyle\int_0^T adt=v_0+aT$　④　$v=v_0+at$

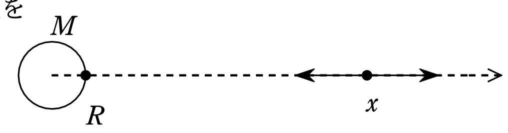
⑤　$vdt=(v_0+at)dt$　⑥　$\displaystyle\int_0^T (v_0+at)dt$　⑦　$\displaystyle\int_0^T (v_0+at)dt=v_0T+\frac{1}{2}aT^2$

積分は微小量の合計という形で使うことができる。

解説

(1)　①　左向き（地球のほうを向く）　大きさ　$\dfrac{GMm}{x^2}$

位置に質量mの物体がある。万有引力定数をGとして、以下の問いに答えよ。



① この物体に作用している万有引力の方向及び大きさをM,m,x,Gで表わせ。

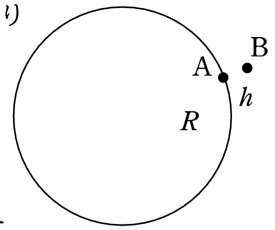
② 万有引力による位置エネルギーの基準は天体間を移動しても変化しない場所でなければならない。どこにすればよいか。

③ 質量mの物体がxの位置にあるとき、ゆっくりと運ぶために、この物体に加えなければならない力（外力）の方向と大きさをM,m,x,Gで表わせ。

④ 質量mの物体をxの位置から$x+dx$の位置（dxは微小量）までゆっくりと移動させる時、外力のする仕事をM,m,x,G,dxで表わせ。（符号に注意せよ。）

⑤ 地表（$x=R$）の位置における万有引力による位置エネルギーは、外力が無限の彼方から、$x=R$まで運ぶ仕事で表わされる。この仕事は④を$x=\infty$から$x=R$まで積分して求められる。地表における万有引力による位置エネルギーをG,M,m,Rで表わせ。

(2) 半径R、質量Mの地球表面上の点Aと、A点よりhだけ高い位置にあるB点の万有引力による位置エネルギーに関して以下の問いに答えよ。ただし、万有引力定数をG、地表の重力加速度の大きさをgとする。



① A,B点における万有引力による位置エネルギーをそれぞれ求めよ。

② 地表の重力加速度の大きさをG,M,Rで表わせ。（地球の自転は考えなくて良い）

③ A,B点の万有引力による位置エネルギーはどちらが大きいか。

④ $R>>h$と考えて、A,B点の万有引力による位置エネルギーの差をm,g,hで表わせ。

26. 楕円の性質(数学)

(1) 円を上下方向あるいは左右方向に拡大･縮小した図形を楕円という。楕円に関して次の問いに答えよ。

② 無限の彼方は天体間の移動があっても変わらないところである。よって、無限の彼方が基準となる。

③ 「ゆっくりと運ぶ」とは一定速度で運ぶことを意味しているので「等しい力で運ぶ」ことである。よって、①と逆向きで同じ大きさの力。

右向き　大きさ　$\dfrac{GMm}{x^2}$

④ 運ぶ距離はdxで力は$\dfrac{GMm}{x^2}$なので、仕事は$\dfrac{GMm}{x^2}dx$

動かす方向に指定がない以上、正の方向に動かすものとして考える。よって、この仕事は正である。

（負の方向に動かす場合は$dx<0$となるので、$\dfrac{GMm}{x^2}dx$は負となる。）

⑤ $W=\displaystyle\int_{\infty}^{R}\frac{GMm}{x^2}dx=GMm\int_{\infty}^{R}x^{-2}dx=GMm\left[-\frac{1}{x}\right]_{\infty}^{R}=-\frac{GMm}{R}$

(2) ① A：$-\dfrac{GMm}{R}$　B：$-\dfrac{GMm}{R+h}$

② 地上では地球の自転を無視すると万有引力＝重力なので、$mg=\dfrac{GMm}{R^2}$

よって、$g=\dfrac{GM}{R^2}$

③ 万有引力による位置エネルギーは　$-\dfrac{GMm}{x}$　で表わされるので、xが大きいほど位置エネルギーは大きくなる。よって、Bの方が大きい。

④ 差$=-\dfrac{GMm}{R+h}-\left(-\dfrac{GMm}{R}\right)=GMm\dfrac{h}{R(R+h)}$

ここで、$R>>h$なので、$R+h\fallingdotseq R$となり、$R(R+h)=R^2$とおける。

差$=\dfrac{GMm}{R^2}h$

②より　この差はmghとなる

（これは重力による位置エネルギーである。重力による位置エネルギーは地上付近の万有引力による位置エネルギーの差である。）

解説

(1) ① $x^2+y^2=a^2$　② $y=\sqrt{a^2-x^2}$　③ $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{4-x^2}$

④ $ay=b\sqrt{a^2-x^2}$　より、$a^2y^2=a^2b^2-b^2x^2$

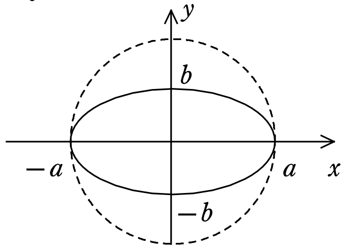
$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$　　これは、$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

⑤ 半径aの面積はπa^2である。y座標が$\dfrac{b}{a}$になっているので、面積も$\dfrac{b}{a}$になってい

① xy平面上で原点を中心とする半径aの円の方程式を表せ。

② $y>0$のとき、①を$y=$　の形に変形せよ。

③ ②式のy座標が$\frac{b}{a}$になったグラフの方程式を導け



④ 右図の実線はy方向が$\frac{b}{a}$になった楕円である。

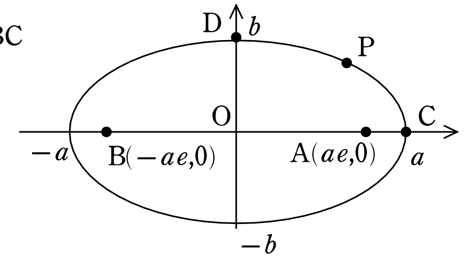
この楕円の方程式を$○x^2+○y^2=1$の形に変形せよ。

⑤ 右図の楕円は点線の円のy方向が$\frac{b}{a}$になった図形である。このことに注意して、この楕円の面積をa,bで表せ。

(2) (1)の楕円上の点をPとするとき、x軸上の2点A$(ae,0)$、B$(-ae,0)$からの距離の和AP＋BPが一定となるように定数eの値を求めることにする。以下の問いに答えよ。

① 点PがC点にあるとき、AP＋BP＝AC＋BCをaで表せ。

② 点PがD点にあるとき、AP＋BP＝AC＋BC＝AD＋BDとするとき、△ADOで三平方の定理を考えることによりeをa,bで表せ。



③ 楕円の方程式$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$で$x=a\cos\theta$と置くとき、$y$を$b,\theta$で表せ。

（$b>0$、$0<\theta<\frac{\pi}{2}$のとき$y>0$とする。）

④ 楕円上の点P$(a\cos\theta, b\sin\theta)$とA$(ae,0)$,B$(-ae,0)$の距離の和を$a,b,e,\theta$で表せ。

⑤ eが②で表されるとき、AP＋BPが一定となることを証明せよ。

$(a^2-b^2)\cos^2\theta+2\sqrt{a^2-b^2}\,a\cos\theta+a^2=(\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta+a)^2$

$\sqrt{x^2}=|x|$　（$x>0$のとき、$|x|=x$、$x<0$のとき、$|x|=-x$）である。

＜まとめ＞

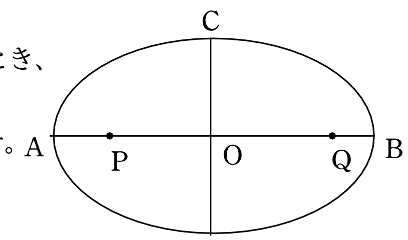
- A,Bをこの楕円の焦点という。
- 楕円は2焦点からの距離の和が一定となる点の軌跡である。
- eを離心率という。
- aを長半径、bを短半径という。
- 惑星は太陽をひとつの焦点とする楕円軌道を描く（ケプラーの第一法則）

(3) 右図のような楕円がある。Oは中心でP,Qは焦点である。AP＝r、BP＝Rとするとき、以下の問いに答えよ。

① AOを長半径という。長半径aをr,Rで表せ。

② BQはいくらか。rで表せ。

③ ABはいくらか。r,Rで表せ。



る。よって、楕円の面積$=\pi a^2\times\frac{b}{a}=\pi ab$

(2) ① 点C$(a,0)$なので、CA$=a-ae$、CB$=a-(-ae)=a$　よって、CA＋CB$=2a$

② AD＋BD$=2a$となり、AD＝BDなので、AD$=a$である。OD$=b$であるから、

AO$=ae=\sqrt{a^2-b^2}$　よって、$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

③ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$に$x=a\cos\theta$を代入すると、$\frac{a^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

これを解くと　$y=\pm b\sin\theta$となるが、$0<\theta<\frac{\pi}{2}$のとき$y>0$なので、

$y=b\sin\theta$となる。

④ PA＋PB$=\sqrt{(a\cos\theta-ae)^2+(b\sin\theta)^2}+\sqrt{(a\cos\theta+ae)^2+(b\sin\theta)^2}$

⑤ ④に$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$を代入すると、

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{PA}+\mathrm{PB}\\
&=\sqrt{(a\cos\theta-\sqrt{a^2-b^2})^2+(b\sin\theta)^2}+\sqrt{(a\cos\theta+\sqrt{a^2-b^2})^2+(b\sin\theta)^2}\\
&=\sqrt{a^2\cos^2\theta+2\sqrt{a^2-b^2}\,a\cos\theta+a^2-b^2+b^2(1-\cos^2\theta)}\\
&\qquad+\sqrt{a^2\cos^2\theta-2\sqrt{a^2-b^2}\,a\cos\theta+a^2-b^2+b^2(1-\cos^2\theta)}\\
&=\sqrt{(a^2-b^2)\cos^2\theta+2\sqrt{a^2-b^2}\,a\cos\theta+a^2}\\
&\qquad+\sqrt{(a^2-b^2)\cos^2\theta+2\sqrt{a^2-b^2}\,a\cos\theta+a^2}\\
&=\sqrt{(\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta+a)^2}+\sqrt{(\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta-a)^2}\\
&=|\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta+a|+|\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta-a|\\
&=\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta+a-(\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta-a)\\
&=2a
\end{aligned}
$$

$a>\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta$であることに注意

aは定数なので、AP＋BPは一定となる。

(3) ① AB＝AP＋BP$=r+R$なので、$a=\mathrm{AO}=\frac{r+R}{2}$

② 楕円は軸対象であるからBQ＝AP$=r$

③ ①よりAB$=r+R$

④ PO＝AO−AP$=\frac{r+R}{2}-r=\frac{R-r}{2}$

⑤ $\frac{PO}{AO}=\frac{\frac{R-r}{2}}{\frac{R+r}{2}}=\frac{R-r}{R+r}$

⑥ SP＋SQ＝BP＋BQ＝BP＋AP＝AB$=2a$

⑦ SP＋SQ＝CP＋CQ＝2CP$=2a$　よって、CP$=a$

（軸対称なので、CP＝CQといえる。）

④　POはいくらか。r,Rで表せ。

⑤　$\dfrac{PO}{AO}$を離心率という。離心率をr,Rで表せ。

⑥　楕円の周上の点をSとすると、SP＋SQの値は一定となる。SがB点にあると考えてSP＋SQを長半径aで表せ。

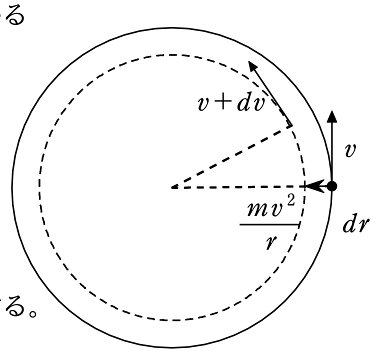
⑦　⑥でSがC点にあると考えてCPをaで表せ。

⑧　COを短半径という。短半径bをR,rで表せ。

27.　ケプラーの第二法則

(1)　回転半径rの円周を速さvで等速円運動をしている質量mの物体がある。この物体を円の中心方向にゆっくりと引張って回転半径を縮めた。

回転半径が縮んだとき、この物体が速くなる。この状態について以下の問いに答えよ。



・回転半径を縮めるための力の大きさは変化するため、微小距離drだけ縮めるものとする。

dr縮めたとき物体の速さが$v+dv$になったとする。

①　回転半径が縮むと物体が速く回転する理由を以下のように説明した。（）に適語を入れよ。

等速円運動している物体に対して回転の中心方向に力を加えると、物体の回転半径は縮まる。このとき、この力は物体に対して（a）をしたことになり、物体は（b）を受け取り、その分だけ物体のもつ（c）が増加する。

②　drは変位ベクトルである。回転半径が小さくなる方向に動かしていることに注意してdrの符号を答えよ。

③　物体に力を加えてゆっくりと回転半径を縮めるために物体を引く力をm,r,vで表せ。
（ゆっくりと動かすということは等速で動かすという意味である。この場合遠心力と等しい力で動かすことになる。）

④　③の力がした仕事の符号を答えよ。

⑤　③の力がした仕事を符号に注意してm,r,v,drで表せ。

⑥　回転半径が縮まる前に物体が持っていた運動エネルギーをm,vで表せ。

⑦　回転半径がdr縮んだ後、この物体が持っている運動エネルギーをm,v,dvで表せ。

⑧　⑤⑥⑦の間に成り立つ関係式を導け

⑨　⑧式を簡略化し、dv,drの関係式を求めよ。
（$dv>>dv^2$なので、dvの項とdv^2の項の和のときはdv^2の項を省略できる。）

⑩　$x\dfrac{dy}{dt}+y\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{dxy}{dt}$（$xy'+yx'=(xy)'$）を用いて⑨式を積分せよ。

＜参考＞

$$\int(xdy+ydx)=\int\left(x\frac{dy}{dx}dx+ydx\right)=\int\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)dx=\int(xy'+x'y)dx$$

⑧　$b=\sqrt{CP^2-PO^2}=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{R-r}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{R+r}{2}\right)^2-\left(\dfrac{R-r}{2}\right)^2}$
$=\sqrt{2Rr}$

解説

(1)　①　a：仕事　b：エネルギー　c：運動エネルギー

②　変位ベクトルは増加するとき正、減少するときが負である。
例　座標1から3へ動くときは変位＋2　座標3から1へ動くときは変位－2である。
よって、$dr<0$

③　この場合の遠心力は$\dfrac{mv^2}{r}$なので、ゆっくりと引くためにはこれと等しい力になる。よって、$\dfrac{mv^2}{r}$

④　引く力が中心方向を向き、動かす方向も中心方向なので、仕事は正

⑤　引く力がした仕事は力×距離＝$\dfrac{mv^2}{r}dr$であるが、仕事＞0、$dr<0$なので、マイナスが付かなければならない。よって、$W=-\dfrac{mv^2}{r}dr$

⑥　$\dfrac{1}{2}mv^2$　⑦　$\dfrac{1}{2}m(v+dv)^2$

⑧　⑥の運動エネルギーに⑤の仕事が加わって⑦の運動エネルギーになるので、

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{mv^2}{r}dr=\frac{1}{2}m(v+dv)^2$$

⑨　$\dfrac{1}{2}mv^2-\dfrac{mv^2}{r}dr=\dfrac{1}{2}mv^2+mvdv+\dfrac{1}{2}mdv^2$

$mvdv>>\dfrac{1}{2}mdv^2$より、$\dfrac{1}{2}mdv^2$は省略できるので、

$$-\frac{mv^2}{r}dr=mvdv$$

これは、　$rdv+vdr=0$　となる。

⑩　$rdv+vdr=0$の両辺をdtで割って、

$$r\frac{dv}{dt}+v\frac{dr}{dt}=0\quad\rightarrow\quad rv'+r'v=0$$

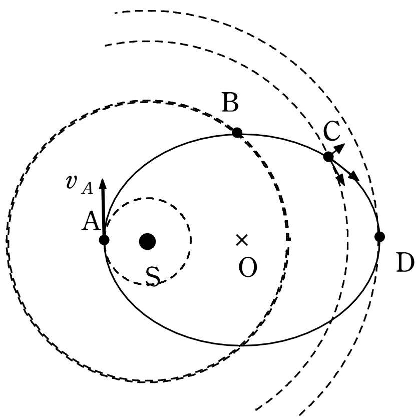
これは　数学公式　$xy'+yx'=(xy)'$　を使うと、
$(rv)'=0$
これを積分すると、
$rv=c$　　cは定数。

$=\int (xy)'dx = xy + c$　cは積分定数

⑪　回転半径rと回転速度vはどのような関係があるか。

(2)　(1)は円の半径を変化させたが楕円の場合で考えてみよう。

太陽をSとしてある惑星が右図のような楕円軌道を回っているとする。Aは軌道上で太陽に最も近い点（近日点）、Dは最も遠い点（遠日点）、Bは楕円の中心Oからの距離が最も小さい点であり、Cは任意の点である。点線の円は太陽を中心とする各点を半径とする円である。A,B,C,D各点と太陽までの距離をr_A、r_B、r_C、r_Dとし、各点での惑星の速さをv_A、v_B、v_C、v_Dとする。これに関して以下の問いに答えよ。



①　点Aと点Dを通る円で考えると、点Dを通る円軌道から点Aを通る円軌道に半径を短くした場合に該当することを考慮し、r_A、r_D、v_A、v_Dの間に成り立つ関係式を示せ。

②　惑星と太陽を結ぶ線分を動径といい、動径が単位時間（1秒間）に描く面積を面積速度という。A点、D点での面積速度をr_A、r_D、v_A、v_Dで表せ。

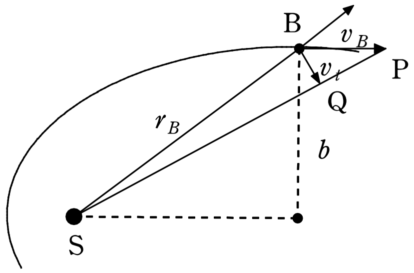
（楕円の周は曲線であるが、単位時間は短いので直線と考えても良い。）

③　A点とD点の面積速度にはどのような関係があるか示せ。

④　A,D点は惑星の速度と動径は直角であり、(1)の計算した条件と適合しているが、点Cは直角ではない。点Cの動径に直角な方向成分（円の接線方向成分）をv_Sとするとき、面積速度はいくらになるか。

⑤　(1)の結果は動径と速度が直角の場合で計算しているので、④の面積速度は一定となる。このことを利用してv_Sをr_A、v_A、r_Cで表せ。

・　点Bについて速度v_Bの終点をP、v_Bの動径に直角成分をv_tとし、その終点をQとする。また、この楕円の短半径をb、長半径をaとする。



⑥　△SBQの面積をr_B、v_tで表せ。

⑦　r_Bをaで表せ。

⑧　∠BSO＝θとするとき、$\sin\theta$をa,bで表せ。

⑨　v_tをv_B、θで表すことにより、v_tをv_B、a,bで表せ。（$r_B >> v_B$であることに注意）

⑩　△SBQの面積をv_B、bで表せ。

⑪　面積速度（△SBPの面積）をv_B、bで表せ。

⑫　⑩⑪と比較することにより、速度の動径と直角方向の速度と動径が作る三角形と、面積速度は等しいことを示せ。

（天体の面積速度は一定である。…ケプラーの第二法則）

⑪　⑩より、rとvの積が一定となるので、rとvは反比例するといえる。

(2)　①　(1)の結果より　$r_A v_A = r_D v_D$

②　A点D点では動径が描く図形は直角三角形になっている。よって、

A点：$\frac{1}{2}r_A v_A$　　D点：$\frac{1}{2}r_D v_D$

③　①より面積速度は等しい。

④　$\frac{1}{2}r_C v_S$

⑤　$\frac{1}{2}r_C v_S = \frac{1}{2}r_A v_A$　これより、$v_S = \frac{r_A}{r_C}v_A$

⑥　$\triangle\mathrm{SBQ} = \frac{1}{2}r_B v_t$

⑦　$r_B = a$

⑧　$\sin\theta = \frac{b}{a}$

⑨　$v_t = v_B \sin\theta = v_B\frac{b}{a}$

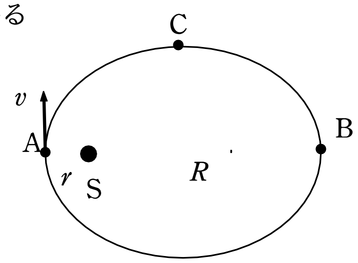
⑩　$\triangle\mathrm{SBQ} = \frac{1}{2}r_B v_t = \frac{1}{2}a v_t = \frac{1}{2}a \times v_B \frac{b}{a} = \frac{1}{2}b v_B$

⑪　$\triangle\mathrm{SBP} = \frac{1}{2}b v_B$

⑫　⑩⑪より、△SBQと△SBPはともに$\frac{1}{2}b v_B$となるので、速度の動径と直角方向の速度と動径が作る三角形と、面積速度は等しいといえる。

(3)　①　$\frac{1}{2}rv$　②　$\frac{1}{2}RV$　③　$\frac{1}{2}RV = \frac{1}{2}rv$より、$V = \frac{r}{R}v$

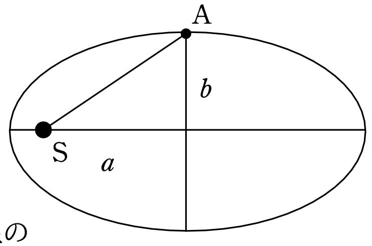
(3) 右図でSを太陽とし、その周りをある惑星が回っている
この惑星の近日点Aまでの距離SA＝rで、近日点での
惑星の速さはvであった。この惑星はしばらく後遠日点
Bに達した。SB＝Rとして以下の問いに答えよ。



① この惑星の面積速度をr,vで表せ。
② Bでの惑星の速さをVとするとき、Bでの面積速度をR,Vで表せ。
③ Vをr,R,vで表せ。

28. ケプラーの第三法則

(1) 太陽をSとする楕円軌道上を運動している惑星がある。
この楕円軌道は長半径がa、短半径がbであり、
太陽の質量がM、惑星の質量がm、万有引力
定数がGである。これに関して以下の問いに
答えよ。



① この楕円の面積をa,bで表わせ。
② 惑星がA点で速さ$\overline{v}$で動いている時、この惑星の面積速度を$b,\overline{v}$で表わせ。
③ 距離ASをaで表わせ。
④ 楕円は２焦点からの距離の和が一定（$2a$）である点の軌跡であることを利用して、ASは惑星が楕円軌道を回るときの平均距離であることを確認せよ。
（$\overline{v}$は平均距離にある速さであるから速さの平均といえる）
⑤ 面積速度が単位時間に動径が描く面積であることに注目し、この惑星が太陽の周りを一周する時間（公転周期）Tを、$a,\overline{v}$で表わせ。
⑥ 半径aの円軌道上を速さ$\overline{v}$（楕円の速さの平均と同じ）で運動している天体の周期Tを$a,\overline{v}$で表わせ。
⑦ 天体の公転周期Tは楕円軌道の短半径bに関係なく、長半径のみによって決まることを確認せよ。
⑧ 半径aの円軌道を$\overline{v}$でまわっている時、向心力が万有引力$\dfrac{GMm}{a^2}$であることを利用して運動方程式をたてよ。
⑨ ⑤⑧より、$\overline{v}$を消去し、楕円軌道において$\dfrac{a^3}{T^2}$の値が一定であることを確認せよ。

(2) 月の公転周期が27日であるとし、月の公転半径は地球半径の60倍であるとして以下の問いに答えよ。
① 地球の自転周期をt,地球の半径をRとするとき、月の公転周期及び公転半径をt,Rを用いて表わせ。
② ①のとき、$\dfrac{a^3}{T^2}$をt,Rで表わせ。

解説

(1) ① πab ② $\dfrac{1}{2}b\overline{v}$ ③ a

④ 楕円の周上の’任意の点をP、S以外の焦点をBとすると、PA＋PB＝$2a$であり、楕円の対象性からAからの距離の平均とBからの距離の平均は等しいので、PAの平均はaとなる。

⑤ 楕円の面積を面積速度で割れば周期となる。$T=\dfrac{\pi ab}{\frac{1}{2}b\overline{v}}=\dfrac{2\pi a}{\overline{v}}$

⑥ 周期は円周（$2\pi a$）を速さ$\overline{v}$で割ればよい。よって、$T=\dfrac{2\pi a}{\overline{v}}$

⑦ ⑤⑥は同じ周期であり、式の中にbが含まれないので、楕円の形に関係なく平均距離aのみによって周期が決まる。

⑧ 半径aの円運動している時の向心力は$\dfrac{GMm}{a^2}$で向心加速度は$\dfrac{\overline{v}^2}{a}$であるから、

運動方程式は$\dfrac{GMm}{a^2}=m\dfrac{\overline{v}^2}{a}$

⑨ ⑤より $\overline{v}=\dfrac{2\pi a}{T}$ これを⑧に代入すると、$\dfrac{GMm}{a^2}=m\dfrac{\left(\dfrac{2\pi a}{T}\right)^2}{a}$

簡単にすると、$\dfrac{a^3}{T^2}=\dfrac{GM}{4\pi^2}$

G,M,πは定数なので、右辺は一定となる。
（これがケプラーの第三法則である）

(2) ① 公転周期＝$27t$、公転半径＝$60R$

② $\dfrac{a^3}{T^2}=\dfrac{(60R)^3}{(27t)^2}=\dfrac{60^3}{27^2}\dfrac{R^3}{t^2}=\dfrac{8000}{27}\dfrac{R^3}{t^2}$

③ t

④ $\dfrac{a^3}{T^2}=\dfrac{x^3}{t^2}$

⑤ $\dfrac{x^3}{t^2}=\dfrac{8000}{27}\dfrac{R^3}{t^2}$ これより、$x=\dfrac{20}{3}R$

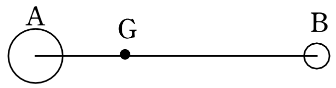
③　地球の自転周期と同じ周期で公転する人工衛星を静止衛星という。静止衛星の公転周期をtで表わせ。

④　静止衛星の公転半径をxとするとき、この静止衛星に関する$\dfrac{a^3}{T^2}$をt,xで表わせ。

⑤　ケプラーの第三法則を用いることにより、静止衛星の軌道半径をRで表わせ。

(3)　地球太陽間の平均距離を1AU（天文単位）という。地球の公転周期は1年である。土星の平均軌道半径は10AUである。土星の公転周期を求めよ。

(4)　太陽系外には2つの恒星A,Bがその共通重心Gの周りを回っているような恒星系（連星という）が存在する。太陽質量をMとするとき、恒星Aの質量は$3M$、恒星Bの質量を$2M$とする。地球太陽間の距離をRとし、これを1AUとして測るとAB間の距離は5AUであるとする。恒星A,Bは円運動をしているとし、地球の公転周期を1年、万有引力定数をGとして以下の問いに答えよ。



①　AG、及びBGの距離をAU単位で表わせ。

②　恒星A、Bのそれぞれの回転半径をAU単位で表わせ。

③　この恒星系の角速度をωとすると、恒星A,Bの向心加速度をそれぞれR,ωで表わせ。

④　角速度ωを公転周期Tで表わせ。

⑤　A,Bに関してTを用いた運動方程式をたてよ。

⑥　$\dfrac{R^3}{T^2}$をG,Mで表わせ。

⑦　地球の公転周期をtとして、$\dfrac{R^3}{t^2}$をG,Mで表わせ。

⑧　⑥⑦より、この連星系の公転周期は何年か求めよ。

(3)　1AU$=x$、1年$=t$　とすると、地球に関して$\dfrac{a^3}{T^2}=\dfrac{x^3}{t^2}$

土星は10AUなので、$10x$、公転周期をTとすると、

$$\frac{a^3}{T^2}=\frac{(10x)^3}{T^2}$$

ケプラーの第三法則より$\dfrac{(10x)^3}{T^2}=\dfrac{x^3}{t^2}$　これより、$T=10\sqrt{10}\,t$

土星の公転周期は$10\sqrt{10}$年≒32年　となる。

＜別解＞

ケプラーの第三法則は単位は何でも良い法則である。平均半径をAU単位、公転周期を年単位でそのまま第三法則に代入すると

$\dfrac{10^3}{T^2}=\dfrac{1^3}{1^2}$　となり、$T=10\sqrt{10}$年

と簡単に求められる。

(4)　①　恒星A,Bの質量比は3:2であるから、重心までの距離比は2:3である。

よって、AG=2AU　BG=3AU

②　重心Gを回転の中心として回転しているので、①と同じ答え

AG=2AU　BG=3AU

③　回転半径はRで表わすと、AG$=2R$　BG$=3R$

よって、向心加速度はA:$2R\omega^2$　B：$3R\omega^2$

④　$\omega=\dfrac{2\pi}{T}$

⑤　AB間の万有引力は$\dfrac{G\times 3M\times 2M}{(5R)^2}=\dfrac{6}{25}\dfrac{GM^2}{R^2}$

よって、A:$\dfrac{6}{25}\dfrac{GM^2}{R^2}=3M\cdot 2R\omega^2$　これは、$\dfrac{GM}{25R^2}=R\omega^2$

B：$\dfrac{6}{25}\dfrac{GM^2}{R^2}=2M\cdot 3R\omega^2$　これは、$\dfrac{GM}{25R^2}=R\omega^2$

⑥　⑤に④を代入して

$\dfrac{GM}{25R^2}=R\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2$　これは、$\dfrac{R^3}{T^2}=\dfrac{GM}{100\pi^2}$

⑦　地球の運動方程式は地球の質量をmとすると、$\dfrac{GMm}{R^2}=mR\left(\dfrac{2\pi}{t}\right)^2$

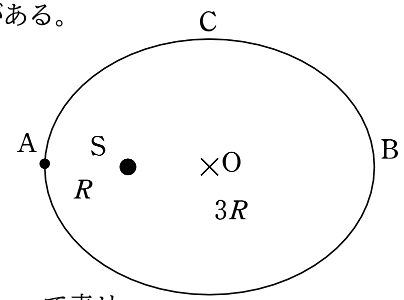
これより、$\dfrac{R^3}{t^2}=\dfrac{GM}{4\pi^2}$

⑧　⑦より、$GM=4\pi^2\dfrac{R^3}{t^2}$

⑥に代入して、　$\dfrac{R^3}{T^2}=4\pi^2\dfrac{R^3}{t^2}\times\dfrac{1}{100\pi^2}=\dfrac{1}{25}\dfrac{R^3}{t^2}$

29.　総合問題

(1)　質量Mの地球Sの周りを近地点A、遠地点Bの楕円軌道を描いている人工衛星（質量m）がある。SA＝R、SB＝3Rであり、万有引力定数をGとして、以下の問いに答えよ。



・ Aでの人工衛星の速さをv、Bでの人工衛星の速さをuとする。

① A,B点それぞれの面積速度を求めよ。

② uをvで表せ。

③ A,B各点での運動エネルギーはいくらか。m,u,vで表せ。

④ A,B各点での万有引力による位置エネルギーはいくらか。G,M,Rで表せ。

⑤ A,B各点での力学的エネルギーは等しい。力学的エネルギー保存則を用いてu,vの関係式を導け。

⑥ ②⑤を連立してu,vをR,G,Mで表せ。

⑦ 面積速度をG,M,Rで表せ。

・ C点は楕円の中心Oの真上の点である。

⑧ 軌道半長径をRで表せ。

⑨ SCはいくらか。Rで表せ。

⑩ SOはいくらか。Rで表せ。

⑪ COはいくらか。Rで表せ。

⑫ C点での人工衛星の速さを$\overline{v}$とするとき、面積速度を$\overline{v}$、Rで表せ。

⑬ ⑦⑫を考慮し、$\overline{v}$をR,G,Mで表せ。

⑭ 楕円の面積はいくらかRで表せ。

⑮ この天体の公転周期はいくらか。R,G,Mで表せ。

(2)　質量Mの地球Sから距離R（地表すれすれ）離れた位置Aで、万有引力の方向に直角な方向にいろいろな速さでロケットを飛ばした。

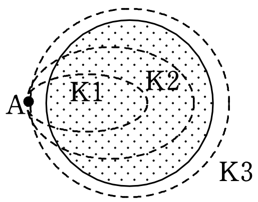


図１

・ ロケットの速さがある速さに満たない場合は図１のK1、K2軌道のように地表に激突する。K3軌道になった場合は地球を無事に一周できる。万有引力定数をG、地表の重力加速度の大きさをgとして、以下の問いに答えよ。

$25t^2=T^2$　これは、$T=5t$　tは1年なので、公転周期5年となる。

解説

(1) ① $A=\frac{1}{2}Rv$　$B=\frac{3}{2}Ru$

② ケプラーの第二法則より面積速度は一定であるので、$\frac{1}{2}Rv=\frac{3}{2}Ru$

よって、$u=\frac{1}{3}v$

③ $A=\frac{1}{2}mv^2$　$B=\frac{1}{2}mu^2$

④ $A=-\frac{GMm}{R}$　$B=-\frac{GMm}{3R}$

⑤ 力学的エネルギーは　$A=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R}$　$B=\frac{1}{2}mu^2-\frac{GMm}{3R}$

エネルギー保存則より　$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R}=\frac{1}{2}mu^2-\frac{GMm}{3R}$

簡単にすると、$v^2-u^2=\frac{4}{3}\frac{GM}{R}$

⑥ ⑤に②を代入して　$\frac{8}{9}v^2=\frac{4}{3}\frac{GM}{R}$　これより、$v=\sqrt{\frac{3}{2}\frac{GM}{R}}$

$u=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{GM}{R}}=\sqrt{\frac{1}{6}\frac{GM}{R}}$

⑦ 面積速度は$\frac{1}{2}Rv=\frac{1}{2}R\sqrt{\frac{3}{2}\frac{GM}{R}}=\sqrt{\frac{3}{8}GMR}$

⑧ AB（長径）＝$4R$　なので、半長径は$2R$

⑨ 楕円の性質より、SCは半長径と同じである。よって、$2R$

⑩ $SO=AO-AS=2R-R=R$

⑪ 三平方の定理より$CO=\sqrt{SC^2-SO^2}=\sqrt{3}R$

⑫ $\frac{1}{2}\times\overline{v}\times b=\frac{\sqrt{3}}{2}R\overline{v}$

⑬ $\frac{\sqrt{3}}{2}R\overline{v}=\sqrt{\frac{3}{8}GMR}$ より　$\overline{v}=\sqrt{\frac{GM}{2R}}$

⑭ $\pi ab=\pi\times 2R\times\sqrt{3}R=2\sqrt{3}\pi R^2$

⑮ 公転周期は楕円の面積を面積速度で割ればよい。

$2\sqrt{3}\pi R^2\div\sqrt{\frac{3}{8}GMR}=\sqrt{\frac{32\pi^2R^3}{GM}}=4\pi R\sqrt{\frac{2R}{GM}}$

＜別解＞ケプラーの第三法則で導いても良い。

$\frac{a^3}{T^2}=\frac{GM}{4\pi^2}$　$a=2R$　より、$T=4\pi R\sqrt{\frac{2R}{GM}}$

① K3の軌道はどのような形の軌道か

② A点での万有引力の大きさはいくらか

③ ロケットの速さをv_0とするとき、A点での向心加速度の大きさをR,v_0で表せ。

④ K3軌道を描くための運動方程式を立てよ。

⑤ K3軌道のv_0をG,M,Rで表せ。

⑥ K3軌道のv_0をg,Rで表せ。

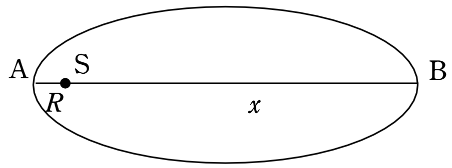


図２

・ ロケットの速さをv_0より速くした場合図２のようにA点と反対側のB点はRより遠くなる。A点でのロケットの速さがvのとき、SB＝xとする。

⑦ A点でのロケットの運動エネルギーと万有引力による位置エネルギーはそれぞれ、G,M,R,m,vであらわせ。

⑧ A点での力学的エネルギーの和をG,M,R,m,vであらわせ。

⑨ B点でのロケットの速さをuとするとき、B点での運動エネルギーと万有引力による位置エネルギーをそれぞれ、G,M,R,m,uで表せ。

⑩ ⑧⑨を用いてA点とB点において力学的エネルギー保存の式を立てよ。

⑪ B点での遠心力をm,u,xで表せ。

⑫ B点において万有引力と遠心力はどちらが大きいか。

⑬ B点における力学的エネルギーの和の符号を答えよ。

⑭ ケプラーの第二法則を用いてuをR,v,xで表せ。

⑮ ⑭式においてxが限りなく大きくなるとき、uはいくらに近づくか

⑯ ⑬⑮を考慮してxが限りなく大きくなるとき、力学的エネルギーの和はいくらに収束するか。

⑰ ⑩⑯より、ロケットが無限の彼方まで飛んでいくのに必要な最低限の速さをG,M,Rで表せ。

⑱ ⑰の速さは⑤（K3軌道の速さ）の何倍になっているか。

⑲ ⑰よりも速い速さでロケットを飛ばしたとき、このロケットの速度は無限遠ではどのようになっているか。

⑶ 地球･太陽間の距離は1.5×10^{11}m（これを1AUと呼ぶ）である。地球は太陽を中心とする半径1AUの円軌道を1年かけて公転している。地球の公転速度は30km/sである。

地球からある恒星を望遠鏡で観測すると、二つの恒星が回りあっている様子（連星という）が観測された。明るいほうの星をA、暗いほうの星をBと呼ぶことにする。星が動いている場合その星からの光を観測すると、光の波長が長くなったり短くなったりしている様子が観測できる。この波長からこの星の視線方向の速度（視線速度）を測定することができる。図2は観測された視線速度を遠ざかっている場合を

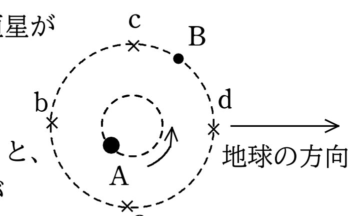


図１

⑵ ① 円軌道 ② $G\dfrac{Mm}{R^2}$ ③ $\dfrac{{v_0}^2}{R}$ ④ $G\dfrac{Mm}{R^2}=m\dfrac{{v_0}^2}{R}$

⑤ ④を解くと$v_0=\sqrt{\dfrac{GM}{R}}$

⑥ 地上では万有引力と重力が等しい（自転の影響は無視）ので、$G\dfrac{Mm}{R^2}=mg$

これより、$GM=gR^2$ これを⑤に代入して $v_0=\sqrt{gR}$

⑦ A点 運動エネルギー：$\dfrac{1}{2}mv^2$ 位置エネルギー：$-\dfrac{GMm}{R}$

⑧ ⑦より、$\dfrac{1}{2}mv^2-\dfrac{GMm}{R}$

⑨ B点 運動エネルギー：$\dfrac{1}{2}mu^2$ 位置エネルギー：$-\dfrac{GMm}{x}$

⑩ $\dfrac{1}{2}mv^2-\dfrac{GMm}{R}=\dfrac{1}{2}mu^2-\dfrac{GMm}{x}$

⑪ 遠心力は質量×向心加速度と逆向き同じ大きさである。

よって、$m\dfrac{u^2}{x}$

⑫ 遠心力と万有引力が等しい場合には円運動をする。

B点では半径xの円運動をすることができずに、地球のほうに落ち込むので万有引力のほうが大きい。よって、$m\dfrac{u^2}{x}<\dfrac{GMm}{x^2}$

⑬ ⑫より、$m\dfrac{u^2}{x}-\dfrac{GMm}{x^2}<0$ これは、$mu^2-\dfrac{GMm}{x}<0$を意味している。

力学的エネルギー$=\dfrac{1}{2}mu^2-\dfrac{GMm}{x}$

$=mu^2-\dfrac{GMm}{x}-\dfrac{1}{2}mu^2<0$

これより、力学的エネルギーの和は負となる。

（天体が楕円軌道を描いている場合は力学的エネルギーの和は負である。）

⑭ ケプラーの第二法則より $\dfrac{1}{2}Rv=\dfrac{1}{2}xu$ これより、$u=\dfrac{Rv}{x}$

⑮ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{Rv}{x}=0$ よって、0に近づく。

⑯ 力学的エネルギー$=\dfrac{1}{2}mu^2-\dfrac{GMm}{x}$

$\dfrac{1}{2}mu^2$は⑮より0に近づき、 $-\dfrac{GMm}{x}$も$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{GMm}{x}\right)=0$で0に近づく。

よって、力学的エネルギーの和は0に収束する。

⑰ ロケットが無限の彼方まで飛んでいくことはxが無限に大きくなることを意味しており、⑯より、

正として表したものである。
この連星の公転軌道面は地球からの視線と平行であり、地球からの観測では恒星が単振動しているように見えるものとする。
これに関して以下の問いに答えよ。

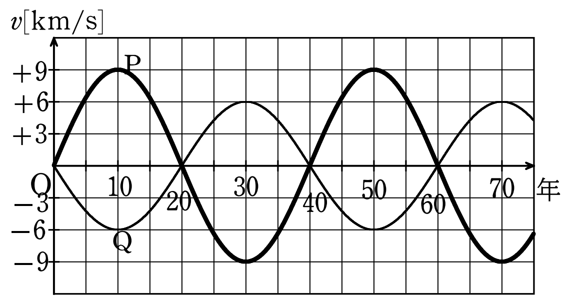


図２

① 動いている星からの光の波長が変化する現象をなんというか。

② 回転半径1AUの円周を30km/sの速さで公転すると、1年かかる。
土星は回転半径10AUの円周を30年で1周している。土星の公転の速さはいくらか。

③ グラフからこの連星の公転周期を求めよ。

④ 恒星Aの視線速度を表したグラフはP,Qのどちらか。

⑤ 図１において、観測を始めてから最初に恒星Bがｃの位置に来るのは何年後か
（ドップラー効果が大きくなるのは視線方向に動いているときである。）

⑥ Bの公転速度は何km/sか。

⑦ 恒星Bの公転軌道半径をAUで求めよ。

⑧ 同様にして恒星Aの公転軌道半径を求めよ。また、恒星A,B間の距離はいくらか。ともにAUで答えよ。

⑨ 恒星A、Bは共通重心の周りを回っている。このことを利用し、恒星A,Bの質量比を求めよ。

・ 1AU＝R[m]、太陽の質量＝M_0[kg]、地球の質量＝m[kg]、地球の公転速度＝v_0[m/s]
万有引力定数＝G[Nm²/kg²]とする。

⑩ 地球の円軌道を回る運動方程式をR, M_0, v_0, Gで表せ。

⑪ 恒星A、Bの質量をM_A、M_Bとするとき、恒星AB間に作用している万有引力の大きさをG、M_A、M_B、Rで表せ。

⑫ 恒星Bの公転速度は地球の公転速度の何倍か。また、Bの公転速度をv_0で表せ。

⑬ 恒星Bの円運動における向心加速度の大きさをv_0、Rで表せ。

⑭ 恒星Bの運動方程式をG, M_A, v_0, Rで表せ。

⑮ ⑩⑭を利用して恒星Aの質量は太陽質量の何倍かを求めよ。

⑯ 恒星Bの質量は太陽質量の何倍か。

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R}=\frac{1}{2}mu^2-\frac{GMm}{x}=0$$

である。

これより、$v=\sqrt{\frac{2GM}{R}}$

⑱ ⑤の$v_0=\sqrt{\frac{GM}{R}}$と比較すると、$v=\sqrt{\frac{2GM}{R}}$は$\sqrt{2}$倍になっていることが分かる。よって、$\sqrt{2}$倍
（円軌道速度の$\sqrt{2}$倍で無限の彼方まで飛んでいくことになる。この速度を脱出速度という。）

⑲ $v=\sqrt{\frac{2GM}{R}}$のとき、$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R}=0$となるのであるから、それより速くロケットを飛ばすと、$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R}=\frac{1}{2}mu^2-\frac{GMm}{x}>0$となる。

$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{GMm}{x}\right)=0$であるから、$\frac{1}{2}mu^2>0$であり、無限遠で、ある一定の速度となることを意味している。
（速度一定であるから等速直線運動（漸近直線）に近づく、このような軌道は双曲線軌道という。）

(3) ① ドップラー効果

② 速さは距離に比例し、時間に反比例する。この場合、距離が10倍で時間が30倍になっているので、速さは$\frac{1}{3}$である。よって、30km/s×$\frac{1}{3}$＝10km/s

③ 恒星が同じ位置に来たときのドップラー効果は同じであるから、恒星のドップラー効果の周期と公転周期は同じである。よって、40年

④ 恒星Aは公転半径の小さいほうなので、ドップラー効果も小さくなる。
よって、Q

⑤ 図１において、観測を始めてから最初に恒星Bがｃの位置に来るのは何年後か
恒星A、Bは重心を堺に互いに逆の位置にあるので、逆周りに回っている。d→c→b→aの順番である。cの位置は遠ざかっている位置であるからドップラー効果が正で最大になっている位置である。グラフPが最大なので、10年後

⑥ ドップラー効果が最大のときの速さが公転の速さである。よって、9km/s

⑦ 恒星Bの公転周期は地球の公転周期の40倍でその速さは$\frac{9}{30}$倍であるので、公転軌道の円周は$40\times\frac{9}{30}$＝12、地球の12倍の円周を持つことになり、軌道半径も12倍である。
軌道半径は12AU。

⑧ 恒星AとBは同じ角速度で回っているので公転の速さの比が公転半径の比となる。Aの公転の速さはBの$\frac{2}{3}$であるから公転半径も$\frac{2}{3}$倍である。よって、$12\times\frac{2}{3}$＝8AU。重心

をGとすると、AG＝8AU,BG＝12AUであるから、AB間は20AUとなる。

⑨　AG：BG＝2:3であるから、質量比はA:B＝3:2となる。

⑩　地球の質量をmとすると、万有引力の大きさは$\dfrac{GM_0m}{R^2}$となる。また、向心加速度の大きさは$\dfrac{{v_0}^2}{R}$で表されるので、運動方程式は$\dfrac{GM_0m}{R^2}=m\dfrac{{v_0}^2}{R}$となる。

よって、$\dfrac{GM_0}{R^2}=\dfrac{{v_0}^2}{R}$

⑪　恒星AB間の距離は20AUなので、20Rとなる。よって、$\dfrac{GM_AM_B}{(20R)^2}$

⑫　地球の公転速度が30km/sなので、恒星Bの9km/sは$\dfrac{3}{10}$倍となる。よって、$\dfrac{3}{10}v_0$

⑬　恒星Bの公転半径は12Rなので、$\dfrac{\left(\dfrac{3}{10}v_0\right)^2}{12R}=\dfrac{3}{400}\dfrac{{v_0}^2}{R}$。

⑬　⑪⑬より$\dfrac{GM_AM_B}{(20R)^2}=M_B\times\dfrac{3}{400}\dfrac{{v_0}^2}{R}$　よって、$\dfrac{GM_A}{R^2}=3\dfrac{{v_0}^2}{R}$

⑭　$\dfrac{GM_A}{R^2}=3\dfrac{{v_0}^2}{R}$に$\dfrac{{v_0}^2}{R}=\dfrac{GM_0}{R^2}$を代入すると。

$\dfrac{GM_A}{R^2}=3\dfrac{{v_0}^2}{R}=3\dfrac{GM_0}{R^2}$　よって、$M_A=3M_0$　恒星Aは太陽質量の3倍の星となる。

⑮　恒星の質量比はA:B＝3:2であるから、恒星Bの質量は太陽質量の2倍となる。