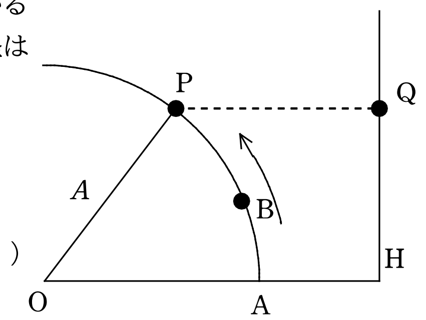
18.　単振動の基礎

(1)　時刻0にB点を出発して等速円運動している物体がある。∠BOA$=\phi$である。円の半径はAで、角速度はωである。図の瞬間はPがB点を出発後t秒立った瞬間である。以下の問いに答えよ。



① この単振動の初期位相はいくらか
（初期位相とは時刻0の位相のことである。）
（位相はA点からの中心角である。）

② ∠BOPをω、tで表せ。

③ 点Pの位相を答えよ

④ 点Qの位相を答えよ。

⑤ 点Qの変位を答えよ。

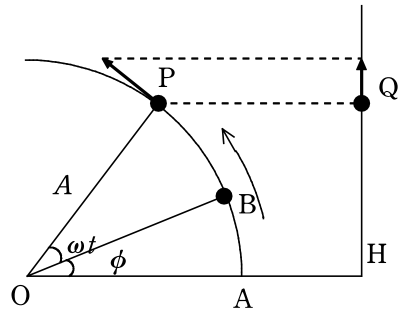
⑥ この単振動の振幅はいくらか

⑦ この単振動の周期はいくらか

⑧ この単振動の振動数はいくらか

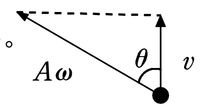
⑨ この単振動の角振動数はいくらか

(2)　単振動している物体の速度について、右図の瞬間の点Qの速度をv（上向き正）とするとき、以下の問いに答えよ。
使用文字は(1)と共通



① P点で等速円運動している物体の速さをA,ωで表せ。

② 右図は単振動の速度と等速円運動の速度の各ベクトルの始点を重ねたものである。間の角度θをω、t、ϕで表せ。



③ vをA、ω、t、ϕで表せ。

④ ある物体が非常に短い時間dtに非常に短い変位dxだけ移動した瞬間の速度vをdt、dxで表せ。

⑤ 時刻tにおける変位xを導く式は(1)⑤より、$x=A\sin(\omega t+\phi)$で表されることが分かっている。この式をtで微分せよ。

解説

(1) ① ϕ　② ωt　③ $\omega t+\phi$　④ $\omega t+\phi$　（単振動と円運動の位相は同じ）

⑤ $A\sin(\omega t+\phi)$　⑥ A

⑦ 単振動の周期は等速円運動の周期と同じ　$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$

⑧ 単振動の振動数は等速円運動の回転数と同じ　$f=\dfrac{\omega}{2\pi}$

⑨ 単振動の角振動数は等速円運動の角速度のことである。ω

(2) ① $A\omega$　② $\omega t+\phi$　③ $v=A\omega\cos(\omega t+\phi)$

④ $v=\dfrac{dx}{dt}$　（微分形である。変位を時間で微分すると速度になる）

⑤ $v=\dfrac{dx}{dt}=(A\sin(\omega t+\phi))'=A\omega\cos(\omega t+\phi)$

⑥ 等しい。（速度は変位を微分して求めたほうが速い）

(3) ① $A\omega^2$　② $\omega t+\phi$

③ $a=-A\omega^2\sin(\omega t+\phi)$　加速度は下向きなので、マイナスが付くことに注意

④ 加速度は1秒間の速度変化である

$$a=\frac{(v+dv)-v}{dt}=\frac{dv}{dt}$$

⑤ $a=\dfrac{dv}{dt}=(A\omega\cos(\omega t+\phi))'=-A\omega^2\sin(\omega t+\phi)$

⑥ 等しい。　（加速度は速度を微分して求めたほうが速い）

(4) $x=2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t+\dfrac{\pi}{2}\right)$と$x=A\sin(\omega t+\phi)$を比較することにより

$A=2$　$\omega=\dfrac{\pi}{2}$　$\phi=\dfrac{\pi}{2}$である。

① $A=2$[m]　② $\omega=\dfrac{\pi}{2}$[rad/s]　③ $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$[s]

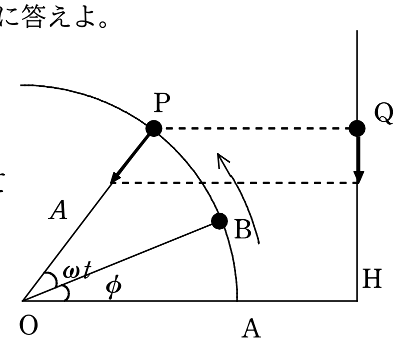
④ $f=\dfrac{\omega}{2\pi}=0.25$Hz　⑤ $\phi=\dfrac{\pi}{2}$

⑥ $x=2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t+\dfrac{\pi}{2}\right)$を$t$で微分して　$v=\pi\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t+\dfrac{\pi}{2}\right)$

⑦ $v=\pi\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t+\dfrac{\pi}{2}\right)$を$t$で微分して　$a=-\dfrac{\pi^2}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t+\dfrac{\pi}{2}\right)$

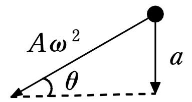
⑥　③と⑤はどのような関係になっているか。簡潔に答えよ。

(3)　等速円運動している物体には向心加速度が必ず存在している。その向心加速度を真横から見た加速度が単振動の加速度である。物体がQ点にあるときの加速度をa（上が正）として以下の問いに答えよ。
使用文字は(1)(2)と共通とする。



①　P点で等速円運動している物体の向心加速度をA,ωで表せ。

②　右図はP,Qの加速度ベクトルの始点をあわせたものである。角度θをω、t、ϕで表せ。



③　aをA、ω、t、ϕで表せ。

④　ある物体が非常に短い時間dtに速度がvから$v+dv$まで微小に速くなったとき、この瞬間の加速度をdv,dtで表せ。

⑤　(2)で導いた速度の式　$v=A\omega\cos(\omega t+\phi)$を$t$で微分せよ。

⑥　③⑤の式を比較すると、何が言えるか簡潔に答えよ。

(4)　変位が$x=2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t+\dfrac{\pi}{2}\right)$で表される単振動について、以下の問いに答えよ。

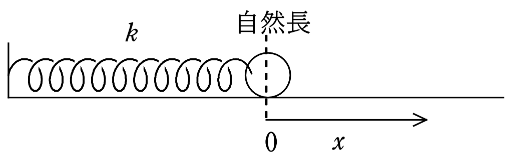
①　振幅はいくらか
②　角振動数はいくらか
③　周期はいくらか
④　振動数はいくらか
⑤　初期位相はいくらか
⑥　時刻tにおける速度vを表す式を求めよ。
⑦　時刻tにおける加速度aを表す式を求めよ。

19．単振動の運動方程式

(1)　単振動の変位は$x=A\sin(\omega t+\phi)$で表される。これを用いて以下の問いに答えよ。

①　単振動の速度vを表す式を求めよ。
②　単振動の加速度aを表す式を求めよ。
③　$x=A\sin(\omega t+\phi)$と②式を比較することによりaをω、xで表せ。
④　単振動している物体には加速度が生じているために、その物体に力が作用していることになる。単振動している物体の質量をmとするとき、この物体に作用している力の大きさをm,ω,xで表せ。
⑤　物体が単振動しているとき、作用している力の大きさと変位との間にどのような関係が成り立っているか。簡潔に答えよ。

(2)　右図のように滑らかな水平上にばね定数kのばねの一端を固定し、他端に質量mのおもりを取り付けて、自然長の位置に



(解説)

(1)　①　$v=A\omega\cos(\omega t+\phi)$　②　$a=-A\omega^2\sin(\omega t+\phi)$

③　$a=-A\omega^2\sin(\omega t+\phi)=-\omega^2\times A\sin(\omega t+\phi)=-\omega^2 x$
　　これを復元加速度という

④　$F=ma=m\times(-\omega^2 x)=-m\omega^2 x$　大きさであるので、$m\omega^2 x$

⑤　大きさで表すと$F=m\omega^2 x$であり、単振動は等速円運動を横から見たものであるから、m,ωはともに定数となる。よって、「比例関係が成立している。」
（物体の変位と力が比例関係にあれば単振動しているといえる）

(2)　①　x　②　$-kx$　$x>0$のとき復元力は左向きなのでマイナスが必要

③　復元力を表す式$F=-kx$が変位xに比例しているため。

④　$-\omega^2 x$　⑤　$-kx=m\times(-\omega^2 x)$　これより、　$kx=m\omega^2 x$

⑥　⑤を解くと　$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$　⑦　$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

静かに置いた。このおもりの位置を原点として右方向にx座標を取るものとする。このおもりを右方向にAだけ伸ばして静かに手を離した。これに関して以下の問いに答えよ。すべてのベクトルは右向きを正とするので符号に注意せよ。

・おもりの変位がxのとき

① ばねの伸びはいくらか。xで表せ。

② ばねが元に引き戻す復元力はいくらか。k,xで表せ。

③ このおもりの振動は単振動といえるが、単振動である根拠をあげよ。

④ この単振動の復元加速度を角振動数ωとxで表せ。

⑤ このおもりの運動方程式を立てよ。

⑥ 角振動数ωをm,kで表せ。

⑦ この単振動の周期をm,kで表せ。

⑧ この単振動の振動数をm,kで表せ。

⑨ この単振動の振幅をAで表せ。

・おもりから手を離した時刻を0とする

⑩ 最初に変位が0になる時刻はいくらか

⑪ 初期位相はいくらか

⑫ 時刻tの変位を表す式をA,m,kで表せ。

⑬ このおもりが最大速度となるのは変位がいくらのときで、その速さはいくらか

⑭ このおもりの加速度の大きさが最大になるのは変位がいくらのときで、その加速度の大きさはいくらか。

⑮ この単振動でおもりの加速度が0となるのは変位がいくらのときか

(3) (2)の実験を動摩擦係数μの水平な摩擦面で行った。最初Aだけ引き伸ばして手を離したところおもりは自然長を通り過ぎたところで静止した。これに関して以下の問いに答えよ。

① おもりに作用している動摩擦力を答えよ。

② おもりの速さが最大になるところは力がつりあっているところである。おもりの速さが最大になる位置のx座標を求めよ。

③ ②の位置からの変位をz（右向き正）とするとき、zをxで表せ。

④ zの位置にあるときの復元力はいくらか。

⑤ この振動は単振動といえるか。いえる場合はその根拠をあげよ。

⑥ 角振動数をωとして復元加速度をω、zで表せ。

⑦ このおもりの運動方程式を立てよ。

⑧ ωを求めよ。

⑨ このおもりが動き始めてから静止するまでの時間を求めよ。

⑩ この単振動の振幅はいくらか。最大速度となる位置（力のつりあいの位置）が振動の中心であることに注意せよ。

⑪ このおもりが静止した位置のx座標を求めよ。

⑧ $f=\dfrac{\omega}{2\pi}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ ⑨ A

⑩ 単振動の1振動の$\frac{1}{4}$で変位0の位置に来るので、周期の$\frac{1}{4}$。よって、$\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

⑪ 時刻0のとき最大変位になっている。最大変位は位相$\dfrac{\pi}{2}$

⑫ 変位の式$x=A\sin(\omega t+\phi)$に代入して $x=A\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t+\dfrac{\pi}{2}\right)$

⑬ $F=-kx$より、変位$x=0$のとき力が作用しない。力が作用していないときが最大速度である。（力が作用していれば加速するのでその瞬間の前後どちらかはもっと速くなっている）

エネルギー保存則より、最初のばねの位置エネルギーはすべて変位0の位置の運動エネルギーになっている。

よって、 $\dfrac{1}{2}kA^2=\dfrac{1}{2}mv^2$ より、 $v=A\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

＜別解＞

単振動の速度をあらわ数式は$x=A\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t+\dfrac{\pi}{2}\right)$を微分して

$v=A\sqrt{\dfrac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t+\dfrac{\pi}{2}\right)$ これより、vの最大値は位相$=0$のとき、

$v=A\sqrt{\dfrac{k}{m}}$であることが分かる。

⑭ このおもりの加速度の大きさが最大になるのは復元力が最大のときである。

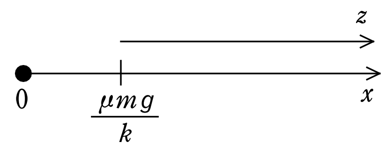
$F=-kx$より、最大変位のときであることが分かる。よって、kA

⑮ 加速度が0となるのは力が作用していないときで変位が0の位置

(3) ① 重力がmgなので、垂直抗力もmg よって、動摩擦力はμmg

② $kx=\mu mg$より、$x=\dfrac{\mu mg}{k}$

③ 右図より$z=x-\dfrac{\mu mg}{k}$



④ 復元力の大きさは$-kx+\mu mg$

③よりxを消去すると、$-kz$

⑤ 復元力がzに比例しているので$x=\dfrac{\mu mg}{k}$を振動の中心とする単振動となる。

⑥ $-\omega^2 z$

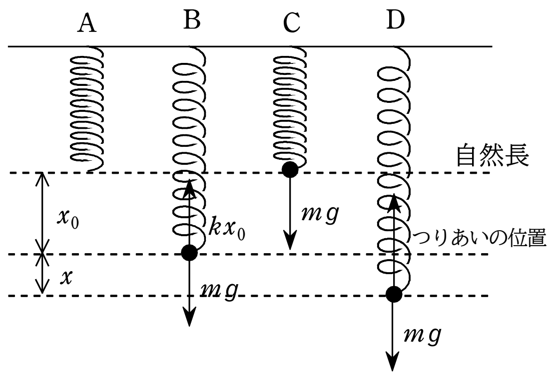
⑦ $-kz=-m\omega^2 z$

⑧ $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

⑨ 周期は$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

(4)　右図Aはばね定数kのばねを天井から吊り下げた状態を示している。この状態で質量mのおもりをつるし、静かに手を離したところ、ばねがx_0伸びたところでつりあった。この状態がBである。ばねを自然長の状態に戻し（C）その状態で急に手を離したところばねは振動を始めた。

　図Dはつりあいの位置よりさらにx伸びたある瞬間を示している。



重力加速度の大きさをgとして以下の問いに答えよ。

①　ばねがx_0伸びてつりあっているとき、ばねの弾性力の大きさをk,x_0で表せ。

②　このおもりに作用している重力の大きさをm,gで表せ。

③　x_0をk,m,gで表せ。

④　Dの状態ではばねはどれだけ伸びているか。x_0、xで表せ。

⑤　Dの状態でばねの弾性力の大きさはいくらか。k、x_0、x

⑥　Dの状態でばねの復元力の方向と大きさをk、x_0、x、m,gで表せ。

⑦　復元力の大きさがxに比例していることを示し、この運動が単振動であることを証明せよ。

⑧　Dの位置での単振動の復元加速度の大きさを角振動数ωとxで表せ。

⑨　Dの位置のおもりの運動方程式を立てよ。

⑩　角振動数ωをk,gで表せ。

⑪　この単振動の振動周期を求めよ。

⑫　この単振動の振幅はいくらか。x_0で表せ。

⑬　この単振動の初期位相はいくらか。

⑭　Cの状態を時刻0としたとき、時刻tにおける変位xをk,m,g,tで表せ。

⑮　時刻tにおけるおもりの速度をk,m,g,tで表せ。

⑯　時刻tにおけるおもりの加速度をk,m,g,tで表せ。

最初の状態から静止するまでは周期の半分であるから$\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

⑩　振動の中心が$x=\dfrac{\mu mg}{k}$で最初の位置がAなので、振幅はこの差になる。

よって、$A-\dfrac{\mu mg}{k}$

⑪　静止した位置の座標をxとすると、$\dfrac{\mu mg}{k}$はAとxの中点となる。よって、

$\dfrac{x+A}{2}=\dfrac{\mu mg}{k}$　これより、$x=\dfrac{2\mu mg}{k}-A$

(4)　①　kx_0　②　mg

③　①②の力はつりあっているので$kx_0=mg$　よって、$x_0=\dfrac{mg}{k}$

④　つりあいの位置x_0よりもx伸ばしているのでx_0+x

⑤　$k(x_0+x)$

⑥　復元力は振動の中心（つりあいの位置）に戻そうとする力である。

この場合は上向きに$k(x_0+x)$で下向きにmgなので、$k(x_0+x)-mg$

⑦　復元力$F=k(x_0+x)-mg=kx_0+kx-mg$

となるが、$kx_0=mg$なので、$F=kx$となる。

復元力Fが変位xに比例しているので、この運動は単振動といえる。

⑧　ω^2x

⑨　⑦⑧より、$kx=m\omega^2x$

⑩　⑨を解くと$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

⑪　$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

⑫　振幅は振動の端（最上端）と振動の中心（つりあいの位置）との距離である。よって、x_0。

⑬　初期位相は時刻0の位置の位相である。時刻0は最上端であるので、位相90°よって、初期位相は$\dfrac{\pi}{2}$

⑭　$x=A\sin(\omega t+\phi)$に$A=x_0=\dfrac{mg}{k}$、$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$、$\phi=\dfrac{\pi}{2}$を代入して

$x=\dfrac{mg}{k}\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t+\dfrac{\pi}{2}\right)$

⑮　⑭を微分して

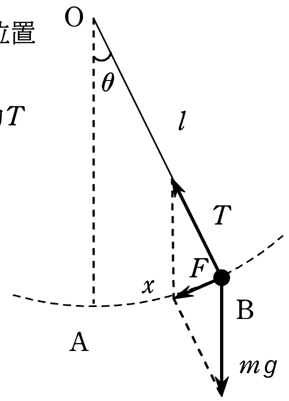
$v=\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{mg}{k}\sqrt{\dfrac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t+\dfrac{\pi}{2}\right)=g\sqrt{\dfrac{m}{k}}\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t+\dfrac{\pi}{2}\right)$

⑯　⑮を微分して

20．単振り子

(1)　右図のように長さlのひもの一端Oを固定し他端に質量mのおもりを接続し、端振り子を作った。最初おもりを静かに離すとOの真下Aで静止した。この状態からこのおもりの位置をずらすと、この振り子は振動を始めた。右図は弧ABがxとなる位置におもりがある瞬間を示しており、ひもの張力T重力加速度の大きさをgとしている。

これに関して以下の問いに答えよ。



①　おもりに作用している重力の大きさはいくらか

②　$\angle BOA=\theta$とするとき、重力の接線方向成分Fをm,g,θで表せ。

③　おもりをつりあいの位置Bに戻そうとする力（復元力）の大きさをm,g,θで表せ。

④　xをl,θで表せ。

⑤　復元力の大きさをm,g,l,xで表せ。

⑥　このおもりの振動は単振動といえるかいえないか

・　おもりの振動が微小振動のとき

⑦　θが限りなく0に近いとき、θと$\sin\theta$はどのような関係に近づくか。

（$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}$で考えよ）

⑧　微小振動の場合、⑦の関係を用いて、⑤式をsinを除いた式で表せ。

⑨　微小振動の場合、単振動といえる。この根拠を挙げよ。

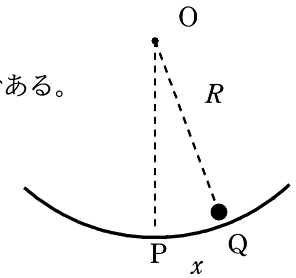
⑩　微小振動の場合、Bの位置での復元加速度の大きさを角振動数ωと変位xを用いて表せ。

⑪　微小振動の場合、Bの位置での運動方程式を立てよ。

⑫　角振動数ωをg,lを用いて表せ。

⑬　この単振り子の周期をm,g,θで表せ。

(2)　半径Rの球面上の凹面に質量mの小球を置いたら、中心Oの真下の点Pを中心として微小振動した。点Qは弧PQの長さがxとなる点である。重力加速度をgとして以下の問いに答えよ。



・　小物体がQ点にあるとき

①　この小物体に作用する重力の大きさはいくらか。

②　$\angle QOP=\theta$とするとき、重力の凹面の接線方向成分をm,g,θで表せ。

③　θをx,Rで表せ。

$$a=\frac{dv}{dt}=-g\sqrt{\frac{m}{k}}\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{\pi}{2}\right)=-g\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{\pi}{2}\right)$$

解説

(1)　①　mg　②　$mg\sin\theta$　③　復元力は②と同じ力である。$mg\sin\theta$

④　$x=l\theta$

⑤　④より$\theta=\dfrac{x}{l}$　これを③に代入して　$F=mg\sin\dfrac{x}{l}$

⑥　復元力Fがxに比例していないので単振動ではない。

⑦　$\theta\fallingdotseq\sin\theta$なので、$\sin\theta$は$\theta$にちかづくよって、$\theta=\sin\theta$

⑧　$F=mg\dfrac{x}{l}$

⑨　復元力Fが変位xに比例している。

⑩　ω^2x　⑪　$mg\dfrac{x}{l}=m\omega^2x$　⑫　$\omega=\sqrt{\dfrac{g}{l}}$

⑬　$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

(2)　①　mg　②　$mg\sin\theta$　③　$x=R\theta$より、$\theta=\dfrac{x}{R}$　④　$mg\sin\dfrac{x}{R}$

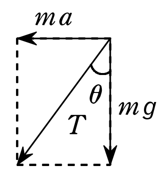
⑤　④の復元力がxに比例していないので単振動ではない。

⑥　$\theta\fallingdotseq 0$のとき$\theta\fallingdotseq\sin\theta$といえるので、復元力$=mg\sin\dfrac{x}{R}\fallingdotseq\dfrac{mgx}{R}$

復元力がxに比例しているので単振動といえる。

⑦　ω^2x　⑧　$\dfrac{mgx}{R}=m\omega^2x$　⑨　$\omega=\sqrt{\dfrac{g}{R}}$

(3)　①　ma　進行方向と逆向き（左）



②　右図で三平方の定理を用いて

$T=m\sqrt{a^2+g^2}$

③　右図より　$\tan\theta=\dfrac{ma}{mg}=\dfrac{a}{g}$

④　力がつりあっているので力の合力は0である。よって、0

⑤　合力$=m\vec{a}+m\vec{g}+\vec{T'}$

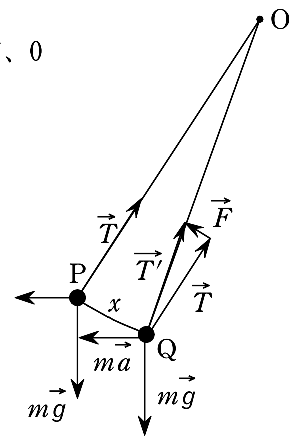
⑥　右図より$\vec{T'}=\vec{T}+\vec{F}$

⑦　⑤より、

合力$=m\vec{a}+m\vec{g}+\vec{T'}$

$=m\vec{a}+m\vec{g}+\vec{T}+\vec{F}$　④より

$=\vec{F}$



⑧　微小振動なので、$\vec{T'}$と$\vec{T}$の大きさは等しい。

また、二本の$\vec{T}$は平行なので、頂角は等しくなる。

よって、相似といえる

④　この振動の復元力をm,g,x,Rで表せ。

⑤　この復元力の式から判断すると、この振動は単振動といえるか

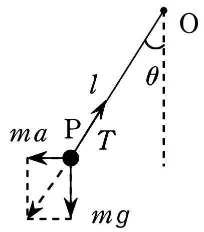
⑥　この振動が微小振動のとき単振動といえるが、その理由を挙げよ。

⑦　微小振動のとき、Q点にある小物体の加速度の大きさ角振動数ωとxで表せ。

⑧　微小振動のとき、この小物体の運動方程式を立てよ。

⑨　微小振動のときの角振動数ωをg,Rで表せ。

(3)　右向きに加速度aで加速する電車の中で長さlのひもに質量mの錘を取り付けた振り子をぶら下げた。重力加速度の大きさをgとして以下の問いに答えよ。



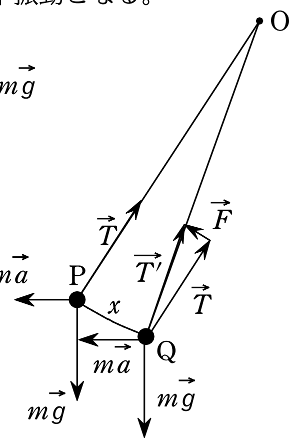
・振り子を静かに静止させた。

①　このおもりに作用する慣性力の大きさと方向を答えよ。

②　このひもに作用する張力の大きさをm,a,gで表せ。

③　振り子の傾角をθとするとき$\tan\theta$をa,gで表せ。

・この状態でおもりを微小振動させた。微小振動の場合は単振動となる。Pの位置がつりあいの位置でQはPより、弧長xだけ離れた位置である。慣性力のベクトルを$m\vec{a}$、重力のベクトルを$m\vec{g}$、P点での張力ベクトルを$\vec{T}$、Q点での張力ベクトルを$\vec{T'}$とし、Qから$\vec{T}$を引き、$\vec{T}$の終点から$\vec{T'}$の終点に引いたベクトルを$\vec{F}$とする。



④　おもりはP点でつりあい状態にあることに注目すると、$m\vec{a}+m\vec{g}+\vec{T}$はいくらになるか

⑤　Q点でおもりに作用する力の合力を$m\vec{a}$、$m\vec{g}$、$\vec{T'}$で表せ。

⑥　$\vec{T'}$を$\vec{T}$と$\vec{F}$で表せ。

⑦　Q点に作用する力の合力（復元力）を$\vec{F}$で表せ。

⑧　△OPQ（本当は扇形だが微小なので二等辺三角形と考えられる）と$\vec{T'}$と$\vec{T}$と$\vec{F}$で囲まれた三角形はどのような関係にあるか。

⑨　$\vec{T}$の大きさをTとし、⑧の関係を用いて$\vec{F}$の大きさFをT,x,lで表せ。

⑩　この単振動の角振動数をωとして復元加速度の大きさをx、ωで表せ。

⑪　Q点にあるおもりの運動方程式を立てよ。

⑫　ωをT,l,mで表せ。

⑬　②を用いてωをa,g,lで表せ。

21．いろいろな単振動

(1)　密度d_0の水に密度d、断面積S、高さhの直方体の

⑨　相似比より、$|\vec{T}|:|\vec{F}|=T:F=\mathrm{OP}:\mathrm{PQ}=l:x$

よって、$Tx=Fl$　　$F=\dfrac{T}{l}x$

⑩　$\omega^2 x$　⑪　$\dfrac{T}{l}x=m\omega^2 x$

⑫　⑪を解くと　$\omega=\sqrt{\dfrac{T}{ml}}$

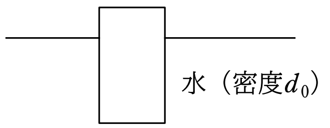
⑬　$T=m\sqrt{a^2+g^2}$より、

$$\omega=\sqrt{\frac{m\sqrt{a^2+g^2}}{ml}}=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+g^2}}{l}}$$

解説

(1)　①　Sh　②　dSh　③　$dShg$　④　Sx_0

物体が静かに浮いている。この直方体の上面を少し押すと、この直方体は振動を始めた。
重力加速度の大きさをgとして、以下の問いに答えよ。

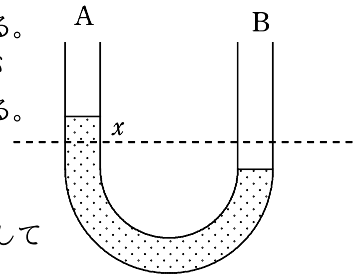


・ 直方体が静かに浮いているとき、直方体の水中部分の高さ（深さ）をx_0とする。

① この直方体の体積はいくらか。S,hで表せ。
② この直方体の質量はいくらか。d,S,hで表せ。
③ この直方体に作用している重力の大きさはいくらかd,S,h,gで表せ。
④ この直方体の水中部分の体積はいくらか。S,x_0で表せ。
⑤ この直方体に作用している浮力の大きさをd_0,x_0,S,gで表せ。
（浮力は水中部分を水に置き換えたときの重力と等しい。）
⑥ この直方体が静止していることに注目して、x_0をd,d_0,hで表せ。

・ 直方体が静止位置よりxだけ余分に沈んでいる瞬間について
⑦ 水中部分の体積はいくらか。x_0,x,Sで表せ。
⑧ この直方体に作用している浮力の大きさはいくらか。x_0,x,S,g,d_0で表せ。
⑨ この直方体を静止位置に戻そうとする力（復元力）の大きさはいくらか。x_0,x,S,g,d_0,h,dを用いて表せ。
⑩ ⑥⑨より、この振動が単振動であることの根拠を示せ。
⑪ この単振動の角振動数をωとするとき、復元加速度の大きさをω,xで表せ。
⑫ この単振動の運動方程式を立てよ。
⑬ ωをd,d_0,g,hで表せ。
⑭ この単振動の振動周期を求めよ。

(2) 右図のようなU字管の中に水が入れてある。
右図の瞬間はU字管のA端、B端での水位が異なっている。U字管内の水は振動している。
水の質量をm、重力加速度の大きさをg、
U字管の断面積をS,水の密度をdとして
以下の問いに答えよ。なお点線は水が静止していたときの水位を示している。



・ A端の水位が静止時より、xだけ高くなっている瞬間について考える。
① A端とB端の水位の差はいくらか。xで表せ。
② 図の場合A端の水面は下向きに加速している。この水に下向きの力が作用しているためである。この力はA端におきて、B端の水面より高くなっている部分に作用している重力と等しい。これを利用して、復元力をd,S,x,gで表せ。
③ この水の振動は単振動といえる。その根拠を挙げよ。
④ A端水面の加速度を角振動数ωと変位xで表せ。
⑤ 運動方程式を立てよ。
⑥ 振動周期をm,d,g,Sで表せ。

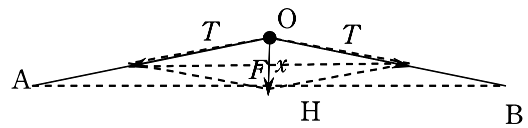
⑤ 水中部分の体積がSx_0なので、この部分を水に置き換えたときの質量はSx_0d_0である。この水に作用する重力の大きさはd_0x_0Sgである。よって、浮力はd_0x_0Sg
⑥ この直方体は静止しているので力がつりあっている。よって、

$dShg=d_0x_0Sg$ よって、$x_0=\dfrac{d}{d_0}h$

⑦ $(x+x_0)S$ ⑧ $d_0(x_0+x)Sg$
⑨ 復元力は力の合力である。合力$=d_0(x_0+x)Sg-dShg$
⑩ 復元力$=d_0(x_0+x)Sg-dShg=d_0x_0Sg+d_0xSg-dShg=d_0xSg$
復元力が変位xに比例しているので、この運動は単振動といえる。
⑪ ω^2x ⑫ $d_0xSg=dSh\times\omega^2x$
⑬ $\omega=\sqrt{\dfrac{d_0g}{dh}}$
⑭ $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{dh}{d_0g}}$

(2) ① $2x$
② Bより高くなっているAの部分の体積は$2xS$なので、質量は$2xSd$。よって、重力即ち復元力は $2xSdg$。
③ 復元力が変位xに比例している。
④ ω^2x ⑤ $2xSdg=m\omega^2x$
⑥ 運動方程式より$\omega=\sqrt{\dfrac{2Sdg}{m}}$
振動周期は$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{2Sdg}}$

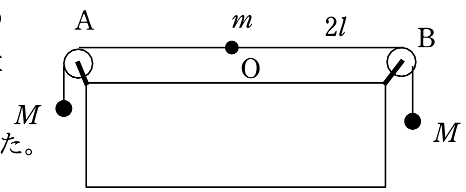
(3) ① Mg（$2Mg$ではない）
② 右図のように



△BOHと、張力Tと復元力$\dfrac{F}{2}$が作る三角形が相似関係にある。

正確にはBH$=l$であるが、xが微小なので、OB$=l$としても良い。
相似比より $T:\dfrac{F}{2}=\mathrm{OB}:\mathrm{OH}=l:x$
よって、$Tx=\dfrac{Fl}{2}$ $F=\dfrac{2T}{l}x$
③ 復元力Fは変位xに比例している。
④ ω^2x ⑤ $\dfrac{2Mg}{l}x=m\omega^2x$
⑥ 運動方程式を解くと$\omega=\sqrt{\dfrac{2Mg}{ml}}$

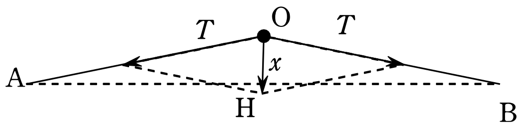
⑶　右図のような固定された台の上に二つの滑車を設置し軽いロープを張り両端に質量Mのおもりをつるした。滑車間の距離は$2l$でその中央に質量mの小物体を取り付けた。小物体mに対する重力の影響は無視でき、重力加速度の大きさをgとして、以下の問いに答えよ。



①　ロープに作用している張力の大きさはいくらか。

・ 質量mの小物体に力を加えると、微小振動を始めた。つりあいの位置よりx上にずれている瞬間について考える。

②　小物体が微小振動しているためxはきわめて小さい。よって、OB$=l$と考えることができる。張力をTとして、復元力FをT,x,lで表せ。
（三角形の相似を使え）



③　この微小振動は単振動といえるが、その根拠を挙げよ。

④　角振動数をωとして復元加速度をω、xで表せ。

⑤　この小物体の運動方程式を立てよ。

⑥　この小物体の振動周期をM,g,l,mで表せ。

振動周期は$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{ml}{2Mg}}$