

# 等速円運動

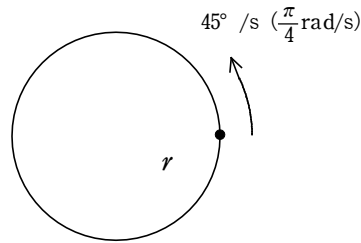
## 10. 回転速度

(1) 右図のように半径 $r$ [m]の円周上を角速度 $45^\circ/\text{s}$

( $\frac{\pi}{4}\text{rad/s}$ =1秒間に $45^\circ$ ずつ回転する)で回転

している物体がある。以下の問いに答えよ。

- ① 1秒間に回転する角度は何radか
- ② この物体が1秒間に移動する弧の長さは何mか
- ③ この物体の速さは何[m/s]か
- ④ この物体は何秒で1周するか
- ⑤ この物体の周期はいくらか
- ⑥ この物体は1秒間に何回転するか
- ⑦ この物体の回転数はいくらか



(2) 半径 $r$ の円周上を角速度 $\omega$ [rad/s]で回転している物体がある。以下の問いに答えよ。

- ① 1秒間に回転する角度は何radか
- ② この物体が1秒間に移動する弧の長さは何mか
- ③ この物体の速さは何[m/s]か
- ④ この物体は何秒で1周するか
- ⑤ この物体の周期 $T$ はいくらか
- ⑥ この物体は1秒間に何回転するか
- ⑦ この物体の回転数 $f$ はいくらか
- ⑧ ⑤と⑦を比較して $T$ と $f$ の間に成り立つ関係式を求めよ。

## 11. 向心加速度

(1) 中心 $O$ 、半径 $r$ の円の周を一定の速さ $v$ で

等速円運動している質量 $m$ の物体が

ある時刻に $A$ 点に存在した。

非常に短い時間 $dt$ の間にこの物体は

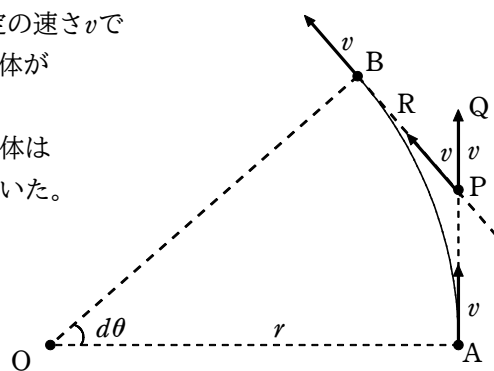
中心角 $d\theta$ ずれた位置 $B$ に達していた。

$A$ 点 $B$ 点における接線の

延長線の交点を $P$ とし、

その交点 $P$ に $A$ 点 $B$ 点の

速度ベクトルを移動させた



ベクトルが $\vec{PQ}$ 、 $\vec{PR}$ である。これに関して以下の問いに答えよ。

- ① 四角形 $OAPB$ の内角の和は何度か
- ②  $\angle OAP$ 、 $\angle OBP$ はそれぞれ何度か
- ③  $\angle AOP + \angle APB$ はいくらか
- ④  $\angle QPR$ を $d\theta$ で表せ。

解説

- (1) ①  $\frac{\pi}{4}\text{rad}$  ② 弧長 $=r\theta$ より、 $\frac{\pi}{4}r$ [m]
- ③ 速さは1秒間に移動する距離  $\frac{\pi}{4}r$ [m/s]
- ④ 1秒間に $45^\circ$ 回転するので、 $360^\circ$ 回転するのに $\frac{360}{45}=8$ 秒かかる
- ⑤ 周期とは1周する時間なので 8秒
- ⑥ 8秒で1周するので、1秒間に $\frac{1}{8}$ 回転
- ⑦ 1秒の回転数が回転数なので、回転数 $\frac{1}{8}=0.125\text{Hz}$
- (2) ①  $\omega$ [rad] ②  $r\omega$ [m] ③  $r\omega$ [m/s]
- ④ 1周 $2\pi$ [rad]である。1秒間に $\omega$ rad回転するので、 $2\pi$ rad回転するには $\frac{2\pi}{\omega}$ 秒かかる。
- ⑤  $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- ⑥  $2\pi$ [rad]回転すると1周なので、1秒の回転角度 $\omega$ radは $\frac{\omega}{2\pi}$ 回転となる。
- ⑦  $f = \frac{\omega}{2\pi}$
- ⑧  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ と $f = \frac{\omega}{2\pi}$ より、 $T$ と $f$ は逆数であることが分かる。よって、 $T = \frac{1}{f}$

解説

- (1) ①  $360^\circ$  ② ともに $90^\circ$  ③  $180^\circ$  ④  $d\theta$  ⑤  $vdt$
- ⑥  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$ で $\vec{PR} = \vec{PQ} + \vec{QR}$ とを比較して $\vec{a}t$ に相当するのは $\vec{QR}$
- ⑦  $adt$  ⑧  $PQ : QR = v : adt$   $OA : AB = r : vdt$
- ⑨ ⑧より、 $v : adt = r : vdt$  これより、 $ardt = v^2dt$  よって、 $a = \frac{v^2}{r}$
- ⑩ 三角形の内角の和は $180^\circ$ で頂角がほとんど0なので、底角は $90^\circ$ となる。
- ⑪ 速度ベクトルは接線方向を向いており、接線と $90^\circ$ をなす方向なので、円の中心方向を向いていることになる。
- ⑫  $F = ma = m\frac{v^2}{r}$
- ⑬  $a = \frac{v^2}{r}$ に $v = r\omega$ を代入して、 $a = r\omega^2$
- ⑭  $F = ma = mr\omega^2$
- (2) ①  $\omega dt$  ②  $r\omega$  ③ ともに $r\omega$  ④  $\omega dt$  ⑤  $adt$
- ⑥  $RQ = PQ \times \angle QPR$ より、 $adt = r\omega \times \omega dt$  これより、 $a = r\omega^2$

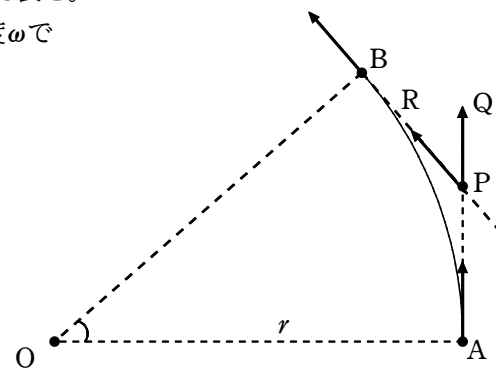
## 等速円運動

- ⑤ 弧ABの長さを $v, dt$ で表せ。
- ⑥  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$ を考慮すると、時間 $dt$ は非常に短い時間であるから加速度 $\vec{a}$ は一定と考えてよい。 $\triangle PQR$ において、 $\overrightarrow{PQ}$ が初速度 $\vec{v}_0$ に、 $\overrightarrow{PR}$ が終速度 $\vec{v}$ に該当する。 $\vec{a}t$ に該当するベクトルを答えよ。
- ⑦ 加速度の大きさを $a$ とすると、 $\overrightarrow{QR}$ の大きさを $a, dt$ で表せ。
- ⑧ 扇形OABの中心角 $d\theta$ がきわめて0に近いために扇形OABは二等辺三角形と考えるも良い。④より、扇形OABと $\triangle PQR$ は相似と考えるもよいことになる。PQ:QRを $v, a, dt$ で、OA:ABを $r, v, dt$ でそれぞれ表せ。
- ⑨ 向心加速度の大きさ $a$ を $v, r$ で表せ。
- ⑩  $d\theta$ がきわめて0に近いことを考慮し、速度ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ と加速度ベクトル $\vec{a}$ のなす角度を求めよ。
- ⑪ 向心加速度はどの方向を向いているか
- ⑫ 運動方程式を考慮し向心加速度を生じさせる力の大きさと方向を答えよ。ただし、大きさは $m, r, v$ を用いて表すものとする。
- ⑬ この物体が角速度 $\omega$ で回転しているとき、向心加速度の大きさを $r, \omega$ で表せ。
- ⑭ ⑬のとき、向心力の大きさを $m, r, \omega$ で表せ。

(2) 中心O、半径 $r$ の円の周を一定の角速度 $\omega$ で

等速円運動している質量 $m$ の物体がある時刻にA点に存在した。非常に短い時間 $dt$ の間にこの物体は位置Bに達していた。

A点B点における接線の延長線の交点をPとし、その交点PにA点B点の速度ベクトルを移動させた



ベクトルが $\overrightarrow{PQ}$ 、 $\overrightarrow{PR}$ である。これに関して以下の問いに答えよ。

- ①  $\angle AOB$ を $\omega, dt$ で表せ。
- ② この物体の周を回る速さを $\omega, r$ で表せ。
- ③  $\overrightarrow{PQ}$ 、 $\overrightarrow{PR}$  (速度ベクトル) の大きさを $\omega, r$ で表せ。
- ④  $\angle QPR$ を $\omega, dt$ で表せ。
- ⑤ 向心加速度の大きさを $a$ とすると、 $\overrightarrow{QR}$ の大きさを $a, dt$ で表せ。
- ⑥  $\triangle PQR$ は扇形と考えるも良いことから $RQ = PQ \times \angle QPR$ が成立する。これをヒントとして $a$ を $r, \omega$ で表せ。

### 12. 等速円運動の運動方程式

- (1) 質量 $m$ のおもりに長さ $r$ の軽いひもを取り付け滑らかな水平面上の一端Oを固定して周期 $T$ で等速円運動させた。

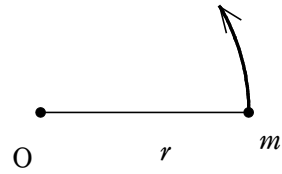
解説

- (1) ①  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  より、 $\omega = \frac{2\pi}{T}$  ②  $v = r\omega$  ③ 大きさ  $a = r\omega^2$  方向 中心方向

# 等速円運動

これに関して以下の問いに答えよ。

- ① この等速円運動の角速度はいくらか
- ② このおもりの円周を回る速さはいくらか
- ③ このおもりの向心加速度の大きさと方向を答えよ。

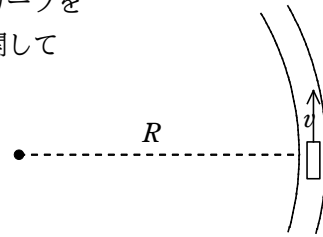


- ④ この等速円運動におけるひもの張力はいくらか

(2) 半径  $R$  の地球表面（重力加速度の大きさ  $g$ ）をすれすれに速さ  $v$  で等速円運動している質量  $m$  の人工天体がある。この人工天体について以下の問いに答えよ。

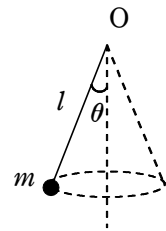
- ① この人工天体に作用している重力の大きさはいくらか。  $m, g$  で表せ。
- ② この人工天体の加速度（向心加速度）を  $R, v$  で表せ。
- ③ この人工天体の運動方程式を立てよ。
- ④ 運動方程式より、人工天体の速さ  $v$  を  $R, g$  で表せ。

(3) 右図のように回転半径  $R$ 、静止摩擦係数  $\mu$  のカーブを速さ  $v$  で自動車が行きかかっている。この自動車に関して以下の問いに答えよ。重力加速度の大きさを  $g$  とする。



- ① この自動車に作用している重力と垂直抗力の大きさをそれぞれ、  $m, g$  で表せ。
- ② この自動車に作用している静止摩擦力の方向を示せ。
- ③ ②の摩擦力が限界を超えると自動車はスリップしてカーブを曲がりきれなくなる。この自動車に作用する静止摩擦力の最大値はいくらか。  $\mu, m, g$  で表せ。
- ④ この自動車は静止摩擦力で円運動に必要な向心加速度を生じている。向心加速度の大きさを  $v, R$  で表し、摩擦力  $F$  が作用している場合の運動方程式を立てよ。
- ⑤ この自動車がこのカーブを通過できる最大速度においてはこの自動車に最大摩擦力がかかっている。この最大速度を  $\mu, g, R$  で表せ。

(4) 右図のように質量  $m$  のおもりに長さ  $l$  のひもを取り付け水平に円錐振り子を作った。この円錐振り子は鉛直と常に角度  $\theta$  を保って等速円運動をしているとする。



右下の図はある瞬間のおもりに作用する力を図示したものである。張力の大きさを  $T$ 、重力加速度の大きさを  $g$  とし、以下の問いに答えよ。

④ 運動方程式より  $F = ma = m r \omega^2 = \frac{4\pi^2 m r}{T^2}$

(2) ①  $mg$  ②  $\frac{v^2}{R}$  ③  $F = mg = m \frac{v^2}{R}$  ④  $v = \sqrt{Rg}$

- (3) ① 重力  $mg$  垂直抗力は重力とつりあい関係にあるので、  $mg$   
 ② この自動車は等速円運動しているため、円の中心方向に加速していることになる。力は加速度の方向にかかるので、円の中心方向となる。

③  $F = \mu N = \mu mg$

④ 向心加速度は  $\frac{v^2}{R}$  なので、運動方程式は  $F = m \frac{v^2}{R}$

⑤ 静止摩擦力  $F$  の最大値は最大摩擦係数  $\mu mg$  なので、  $F \leq \mu mg$   
 よって、  $m \frac{v^2}{R} \leq \mu mg$  これを解くと、  $v \leq \sqrt{\mu g R}$

となるので、最大速度は  $\sqrt{\mu g R}$

- (4) ① 鉛直成分  $T \cos \theta$  水平成分  $T \sin \theta$   
 ② 鉛直方向には重力  $mg$  が作用しているため、  $T \cos \theta = mg$   
 ③  $\triangle OAH$  は直角三角形で  $OA = l$ 、 $\angle HOA = \theta$  なので、  $AH = l \sin \theta$  これが回転半径となる。

④  $r \omega^2$

- ⑤ 向心力とは円の中心に向かう力であり、物体はこの力で向心加速度を得ている。  
 よって、  $T \sin \theta$

⑥ 円運動の運動方程式は 向心力 = 質量 × 向心加速度 である。  
 $T \sin \theta = m r \omega^2$

⑦ 
$$\begin{cases} T \sin \theta = m r \omega^2 \\ T \cos \theta = mg \\ l \sin \theta = r \end{cases}$$
 これを解くと 
$$\begin{cases} r = l \sin \theta \\ T = \frac{mg}{\cos \theta} \\ \omega = \sqrt{\frac{g}{l \cos \theta}} \end{cases}$$
 となる。

⑧ 周期  $= \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \theta}{g}}$

- (5) ①  $mg$  ② 鉛直成分  $N \cos \theta$  水平成分  $N \sin \theta$   
 ③  $N \cos \theta = mg$

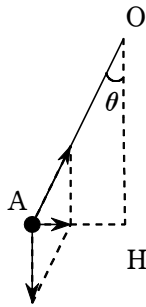
④ 水平成分が向心力である。  $N \sin \theta$  ⑤  $\frac{v^2}{R}$

⑥  $N \sin \theta = m \frac{v^2}{R}$

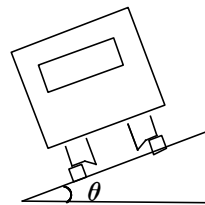
⑦ ③⑥を連立させて  $\frac{N \sin \theta}{N \cos \theta} = \frac{m \frac{v^2}{R}}{mg}$  これより、  $\tan \theta = \frac{v^2}{Rg}$

# 等速円運動

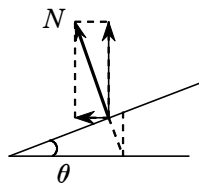
- ① 張力の鉛直成分、水平成分の大きさを $T, \theta$ で表せ。
- ② おもりは鉛直方向には加速しない。このことを利用して鉛直方向の力のつりあいの式を立てよ。
- ③ おもりは水平方向の力を向心力として等速円運動をする。この円運動の半径 $r$ を $l, \theta$ で表せ。
- ④ この等速円運動の角速度を $\omega$ とすると、向心加速度を $r, \omega$ で表せ。
- ⑤ この等速円運動の向心力を $T, \theta$ で表せ。
- ⑥ この等速円運動の運動方程式を $T, \theta, m, r, \omega$ で表せ。
- ⑦ ②③⑥を解くことにより角速度 $\omega$ を $\theta, g, l$ で表せ。
- ⑧ この円錐振り子の回転周期を $\theta, g, l$ で表せ。



- 5) 列車がカーブを曲がるとき十分な向心力を線路から得ることができる様に線路の外側を少し高くしてある。このときの傾斜角をバンク角という。右図の場合、バンク角は $\theta$ である。列車は重力と線路からの垂直抗力を受けてカーブを曲がるのである。重力加速度の大きさを $g$ 、列車の質量を $m$ とし、以下の問いに答えよ。

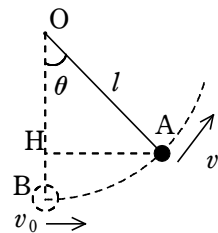


- ① 列車の作用する重力の大きさはいくらか
- ② 列車に作用している線路からの垂直抗力の大きさを $N$ とすると、垂直抗力の水平成分と鉛直成分を $N, \theta$ で表せ。
- ③ 鉛直方向のつりあいの式を立てよ。
- ④ この列車に作用している等速円運動するための向心力の大きさを $N, \theta$ で表せ。
- ⑤ この列車がこのカーブを通過する速さを $v$ 、このカーブの極率（回転）半径を $R$ とすると、向心加速度の大きさを $v, R$ で表せ。
- ⑥ この等速円運動の運動方程式を $N, \theta, R, v, m$ で表せ。
- ⑦ この列車が極率半径 $R$ のカーブを速さ $v$ で安全に通過するためには、 $\tan \theta$ はいくらで線路を設計しなければならないか



## 13. 鉛直円運動

- 1) 質量 $m$ のおもりに長さ $l$ のひもを取り付けて振り子を作った。この振り子を鉛直につりし(B)、おもりに水平に初速度 $v_0$ を与えたところ、この振り子は円直面内で円運動を始めた。右図は角度 $\theta$ だけあがった瞬間Aを示しており、この瞬間のおもりの速さを $v$ とする。重力加速度の大きさを $g$ 、AからOBに垂線を下ろしその足をHとする。以下の問いに答えよ。



- ・ おもりがB点にあるとき、
- ① このおもりの鉛直方向の加速度はいくらか。 $l, v_0$ で表せ。(B点にあるときも円運動をしていることに注意せよ)

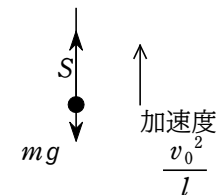
### 解説

- 1) ① 向心加速度の式より $\frac{v_0^2}{l}$  ②  $mg$
- ③ おもりはBにあるときも円運動しているので中心方向に加速度が生じている。運動方程式を立てると、

$$S - mg = m \frac{v_0^2}{l}$$

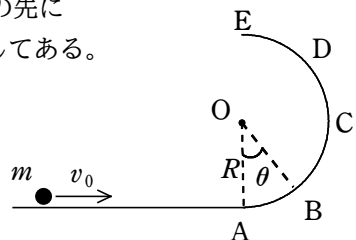
④ ③より、 $S = mg + m \frac{v_0^2}{l}$

- ⑤ B点でも円運動しており、円の中心方向に加速度が生じているため

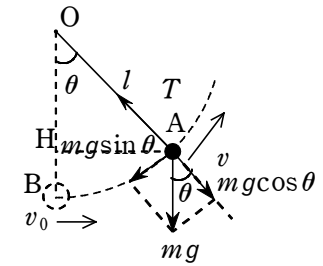


# 等速円運動

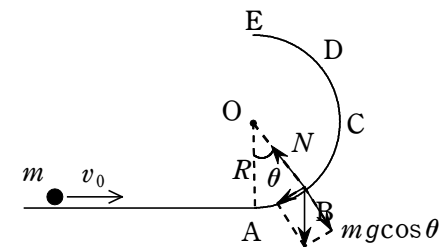
- ② おもりに作用している重力の大きさはいくらか  
 ③ おもりに作用している張力の大きさを $S$ とすると、このおもりの運動方程式を立てよ。  
 ④ 張力の大きさを $m, g, l, v_0$ で表せ。  
 ⑤ 重力と張力はつりあっていない。この理由を簡単に説明せよ。  
 ・ おもりがA点にあるとき  
 ⑥ OH、BHの長さはいくらか。 $l, \theta$ で表せ。  
 ⑦ Bを重力による位置エネルギーの基準とするとAに物体があるとき、この物体の重力による位置エネルギーはいくらか。 $m, g, l, \theta$ で表せ。  
 ⑧ B点におけるこのおもりの運動エネルギーはいくらか。 $m, v_0$ で表せ。  
 ⑨ A点におけるこのおもりの運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ を $m, v_0, g, l, \theta$ で表せ。  
 ⑩ A点のあるおもりの重力を接線方向成分(速度の方向)と法線方向成分(OA方向)に分解し、それぞれを $m, g, \theta$ で表せ。  
 ⑪ A点にある瞬間の運動は円運動の一部である。向心加速度の大きさを $v, l$ で表せ。  
 ⑫ A点にある瞬間の法線方向の運動方程式を立てよ。  
 ⑬ ⑫式に⑨式を代入して $v$ を消去することにより、張力 $T$ を $m, v_0, g, \theta, l$ で表せ。  
 ・ おもりが最高点を通過する瞬間  
 ⑭ このおもりが最高点を無事通過できたとき、最高点における張力 $T$ はどのような条件を満たしておかなければならないか  
 ⑮  $\theta = 180^\circ$ のときが最高点である。⑬式を用いてこのおもりが最高点を無事通過するための最低の初速度 $v_0$ を $g, l$ で表せ。  
 ⑯ 最高点を無事通過するための最高点での最低速度を $g, l$ で表せ。
- (2) 右図のように滑らかな水平面上レールの先に半径 $R$ の滑らかな半円形のレールが設置してある。このレール上を質量 $m$ の小物体を速さ $v_0$ で走らせた。点Aは円の中心の真下でCは中心と同じ高さで、Eは中心の真上の点である。また、B、Dはそれぞれ、AとC、CとEの間の点である。物体と円の中心を結ぶ線分とOAのなす角度を $\theta$ とし、初速度 $v_0$ をいろいろと変化させて物体の運動を調べた。重力の位置エネルギーの基準をA点、重力加速度の大きさを $g$ として以下の問いに答えよ。  
 ・ 物体が角度 $\theta$ の位置にあるときの物体の速さを $v$ とする。  
 ① 向心加速度の大きさを $v, R$ で表せ。  
 ② 重力の法線方向成分の大きさを $m, g, \theta$ で表せ。  
 ③ この物体がレールから受ける垂直抗力の大きさを $N$ とすると、法線方向の運動方程式を $m, g, R, v, N, \theta$ を用いて表せ。  
 ④ 重力による位置エネルギーと運動エネルギーはそれぞれいくらか



- ⑥  $OB=l, OH=l\cos\theta$  より、 $BH=OB-OH=l-l\cos\theta=l(1-\cos\theta)$   
 ⑦  $U=mgh=mg\times BH=mg l(1-\cos\theta)$   
 ⑧  $\frac{1}{2}mv_0^2$   
 ⑨ エネルギー保存則より、 $\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv^2+mg l(1-\cos\theta)$   
 よって、 $\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv_0^2-mg l(1-\cos\theta)$



- ⑩ 右図より  
 接線方向 $=mg\sin\theta$   
 法線方向 $=mg\cos\theta$   
 ⑪  $\frac{v^2}{l}$   
 ⑫  $T-mg\cos\theta=m\frac{v^2}{l}$   
 ⑬ ⑫より $mv^2=Tl-mg l\cos\theta$   
 ⑨より $mv^2=mv_0^2-2mg l(1-\cos\theta)$   
 これより、 $Tl-mg l\cos\theta=mv_0^2-2mg l(1-\cos\theta)$   
 よって、 $T=\frac{mv_0^2}{l}-2mg+3mg\cos\theta$   
 ⑭ おもりが円運動するときは紐が張っているはずなので、張力が存在している。紐が緩んでいるときは張力は存在しない。よって、 $T>0$   
 ⑮ ⑬より、 $T=\frac{mv_0^2}{l}-2mg+3mg\cos 180^\circ>0$   
 $\frac{mv_0^2}{l}-5mg>0$   
 よって、 $v_0>\sqrt{5gl}$   
 ⑯ 最高点での速度を $v$ とすると、最低速度の場合 $T=0$ となっている。  
 ⑫より、 $0-mg\cos 180^\circ=m\frac{v^2}{l}$   
 よって、 $v=\sqrt{gl}$
- (2) ①  $\frac{v^2}{R}$  ② (1)と同様に $mg\cos\theta$   
 ③  $N-mg\cos\theta=m\frac{v^2}{R}$   
 ④ 位置エネルギー  $mgR(1-\cos\theta)$   
 運動エネルギー  $\frac{1}{2}mv^2$   
 ⑤  $\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv^2+mgR(1-\cos\theta)$



## 等速円運動

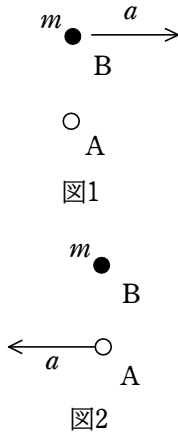
- ⑤ 初速度の大きさ $v_0$ を用いてエネルギー保存則の式を立てよ。
- ⑥ ③⑤より $v$ を消去し垂直抗力 $N$ を求める式を導け
- ・ 初速度をある速度にしたとき、 $\theta=60^\circ$ の位置Bまで物体が上昇して戻ってきた。
- ⑦ B点におけるこの物体の速さはいくらか
- ⑧ ⑤式を用いて初速度の大きさを $g, R$ で表せ。
- ⑨ A点での垂直抗力の大きさを $m, g, R$ で表せ。
- ・  $v_0 = \sqrt{\frac{7}{2}gR}$ としたとき物体はD点でレールから離れた
- ⑩ D点での垂直抗力はいくらか
- ⑪ ⑥式を用いてD点の角度 $\theta$ を求めよ。
- ⑫ D点における物体の速さはいくらか
- ⑬ D点でレールから離れた後、この小物体はどのような運動をするか。簡潔に答えよ。
- ・  $v_0 = \sqrt{7gR}$ としたとき物体はE点から水平に飛び出した。
- ⑭ C, E点での垂直抗力の大きさをそれぞれ求めよ。
- ⑮ C, E点でのこの物体の速さをそれぞれ求めよ。

- ⑥ ③より、 $mv^2 = NR - mgR\cos\theta$   
これを⑤に代入して  $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}NR - \frac{1}{2}mgR\cos\theta + mgR(1 - \cos\theta)$   
簡単にして  $N = \frac{mv_0^2}{R} - 2mg + 3mg\cos\theta$   
(1)と同じ式であることに注意せよ。
- ⑦ Uターンする位置であるから速度=0
- ⑧ ⑤式に $v=0$ を代入して  $\frac{1}{2}mv_0^2 = mgR(1 - \cos 60^\circ)$   
これより、 $v_0 = \sqrt{gR}$
- ⑨ ⑥に代入して  $N = \frac{mv_0^2}{R} - 2mg + 3mg\cos\theta = \frac{1}{2}mg$
- ⑩ 離れたのであるから $N=0$
- ⑪ ⑥式に代入して  $0 = \frac{7}{2}mg - 2mg + 3mg\cos\theta$   $\cos\theta = -\frac{1}{2}$  よって、 $\theta = 120^\circ$
- ⑫ ③に代入して  $m\frac{v^2}{R} = 0 - mg\cos 120^\circ = \frac{1}{2}mg$  よって、 $v = \sqrt{\frac{gR}{2}}$
- ⑬ 放物線運動をする。
- ⑭ Cは $\theta=90^\circ$  Eは $\theta=180^\circ$   $v_0 = \sqrt{7gR}$ をそれぞれを⑥式に代入して  
C:  $N = \frac{mv_0^2}{R} - 2mg + 3mg\cos\theta = 5mg$   
E:  $N = \frac{mv_0^2}{R} - 2mg + 3mg\cos\theta = 2mg$
- ⑮ ③に代入して  
C:  $N - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R}$  これより、 $v = \sqrt{5gR}$   
E:  $N - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R}$   $v = \sqrt{3gR}$

# 等速円運動

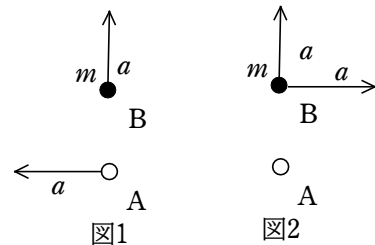
## 14. 慣性力の概念

(1) 右図1はAに静止している人が加速度 $a$ で右向きに加速している質量 $m$ の物体Bを観測している場合を、図2は加速度 $a$ で左に加速している人が静止している質量 $m$ の物体を観測している場合をそれぞれ図示したものである。これについて以下の問いに答えよ。



- ・ 図1の場合
  - ① Aにいる人がBを見た場合、Bにはどの方向に力がかかっているように見えるか。
  - ② Bにかかっている力の大きさはいくらか。
- ・ 図2の場合
  - ③ AからBを見た場合、Bはどの方向にいくらで加速しているように見えるか
  - ④ 「力とは速度を変化させるもの」である。この点に注意してAからBを見た場合、物体Bにはどの方向に力（慣性力）が作用しているように見えるか
  - ⑤ 物体Bに作用しているように見える力（慣性力）の大きさを $m, a$ で表せ。
- ・ 図1、図2の比較
  - ⑥ 観測者の周りに目印になるものが何もない場合、自分が加速しているのか、静止しているのかを明確に判断する方法があるか、あればその事例を示せ。
  - ⑦ 図1の場合と図2の場合は、全く対等と考えてよいか悪いか答えよ。対等と考えてはならない場合、その事例を挙げよ。

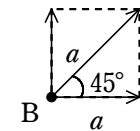
(2) 右図1は観測者Aが左向きに $a$ で加速しており、物体Bは加速度 $a$ で上向きに加速している状態を示している。図2は観測者から見た物体Bの様子を示している。これに関して以下の問いに答えよ。



- ① 物体Bに実際に作用している力の方向と大きさを答えよ。
- ② 観測者Aから見た場合、周りの景色はどの方向にどれだけの大きさで加速しているように見えるか
- ③ 観測者Aから見た場合、物体Bはどの方向にどれだけの大きさの加速度で加速しているように見えるか。
- ④ 観測者Aから見た場合、物体Bに作用している様に見える力の方向と大きさを答えよ。

### 解説

- (1) ① 加速している方向に力が作用している。よって、右向き  
 ② 質量 $m$ の物体が加速度 $a$ で加速しているため、作用している力の大きさは $ma$   
 ③ AからBを見ると、A自身の動きの逆に動いているように見える。右向きに $a$ で加速しているように見える  
 ④ 右向きに $a$ で加速しているように見えるのであるから、右向きに力が作用しているように見える。  
 ⑤ 質量 $m$ の物体が加速度 $a$ で加速しているように見えるので、 $ma$ の大きさの力が作用しているように見える。  
 ⑥ どちらが動いているのかを判断する方法はない。  
 ⑦ 区別できないのであるから、対等と考えてよい。  
 (自分の都合によってどちらかの運動をしていると考えて問題を解けばよい。このとき、作用しているように見えるこの力を慣性力という)
- (2) ① 物体Bは上向きに大きさ $a$ の加速をしているのであるから、上向きに $ma$ の大きさの力が作用していることになる。  
 ② 観測者Aが左向きに $a$ で加速しているのであるから、観測者から見ると、周りの景色が逆向き（右向き）に $a$ の加速をしているように見える。  
 ③ 物体Bは右向きに $a$ の加速している景色の中で上向きに $a$ の加速しているため、右上45°方向に $\sqrt{2}a$ の加速をしているように見える。  
 ④ 物体Bが右上45°方向に $\sqrt{2}a$ で加速しているように見えるのであるから同じ方向に $\sqrt{2}ma$ の力が作用しているように見えることになる。

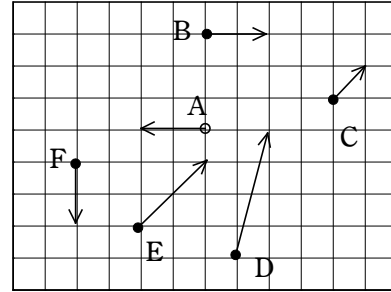


- (3) ① 各加速度に質量2kgをかければよい。  
 $A \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times 2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $B \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times 2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times 2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $D \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times 2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ ,  
 $E \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times 2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $F \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times 2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$   
 ② Aから見た周りの景色の加速度は $-\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ なので、各物体の加速度にこの加速度を加えればよい。  
 $B \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $D \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  
 $E \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $F \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$   
 いずれも単位は $m/s^2$ である。  
 ③ 加速度に質量2をかければよい。

## 等速円運動

よ。

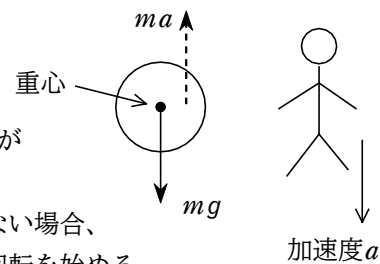
- (3) 右図の物体A～Fはいずれも質量2kgの物体である。矢印は加速度を表しており、  
 $A\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 、 $B\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 、 $C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 、 $D\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ 、 $E\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ 、 $F\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$   
 で単位はいずれも  $m/s^2$  である。これに関して以下の問いに答えよ。



- ① 各物体に作用している力をベクトル成分表示せよ。
- ② Aから見た場合、B～Fの加速度をそれぞれ成分表示せよ。
- ③ Aから見た場合、B～Fそれぞれに作用しているように見える力を成分表示せよ。
- ④ Aから見た場合、周りの景色はAと逆に加速しているように見える。この加速度を成分表示せよ。
- ⑤ BからFの各物体は④の様に加速しているように見える。この加速度を生じさせる仮想上の力を慣性力という。B～Fに作用している慣性力を成分表示せよ。
- ⑥ Aから見た場合A自身の加速度はいくらか。また、A自身に作用している力はいくらに見えるか。
- ⑦ ①の力と⑤の慣性力をB～Fに関して合成せよ。
- ⑧ ⑥⑦の結果を比較して、どのようなことがいえるか
- ⑨ Cから見た場合、A～F (Cも含む) の加速度を成分表示せよ。
- ⑩ Cから見た場合、A～F (Cも含む) に作用している力を成分表示せよ。
- ⑪ Aの加速度を  $\vec{a}_A$ 、Bの加速度を  $\vec{a}_B$ 、Bの質量を  $m$  とするとき、AからBを見た加速度と、Bに作用しているように見える力を  $\vec{a}_A$ 、 $\vec{a}_B$ 、 $m$  を用いて表せ。

- (4) 次の文章の ( ) 内に適語、[ ] 内には式を入れよ。

大きさ  $g$  の重力加速度がかかっている空中で落下中の質量  $m$  物体には重力[①]が、作用している。観測者が重力と同じ方向に加速度  $a$  で加速すると、観測者から物体を見ると、(②) 向きに、慣性力[③]が作用しているように見える。



この慣性力の作用線が重力の作用線と一致していない場合、この物体には (④) が作用するようになり、物体は回転を始める。観測者が加速すると、物体が回転を始めるようなことはありえないので、重力の作用線と慣性力の作用線は (⑤) する。

観測者がどの方向に加速しても結果は同じであり、複数の重力作用線の交点が (⑥) であるために、慣性力の作用点は (⑦) となる。

$$B\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times 2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}, C\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times 2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}, D\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \times 2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}, E\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times 2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}, F\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times 2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

いずれも単位はNである。

- ④ Aの加速度が  $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$  なので、景色の加速度は  $-\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- ⑤ BからFはいずれも質量2kgで景色とともに同じ加速度  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  で一齐に動く (各自の加速度を除く) ので、すべて同じ慣性力である。  $2 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$
- ⑥ Aから見た場合A自身は常に自分の位置にあり動いていないので、加速度は0  
 加速度0なので、力も0
- ⑦  $B\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ 、 $C\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ 、 $D\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 、  
 $E\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ 、 $F\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$
- ⑧ 等しい。  
 (相対加速度から力を計算しても良いし、実際の力に慣性力を合成して力を計算してもどちらでも良い。)

- ⑨ Cの加速度の逆を加えるのであるからCの加速度を引くことになる。

$$A\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$D\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, E\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, F\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

いずれも単位は  $m/s^2$  である。

- ⑩ 質量2kgをかければよい。

$$A\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \times 2 = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times 2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, C\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times 2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$D\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times 2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}, E\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times 2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, F\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times 2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

いずれも単位はNである。

- ⑪ AからBを見た加速度 (相対加速度) はBの加速度からAの加速度を引けばよい。

$$\vec{a}_B - \vec{a}_A$$

Aから見たときのBに作用している力は相対加速度に質量をかければよい。

$$m\vec{a}_B - m\vec{a}_A$$

(Aから見た物体Bに作用しているように見える力は、実際に作用している力と慣性力  $(-m\vec{a}_A)$  の和になっている。)

- (4) ①  $mg$  ② 上 ③  $ma$  ④ 力のモーメント (偶力・回転力でも良い)  
 ⑤ 一致 ⑥ 重心 ⑦ 重心



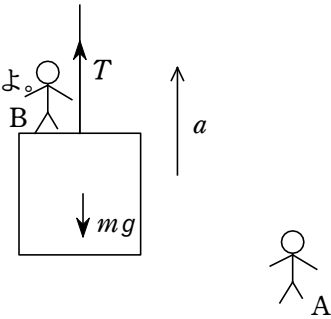
# 等速円運動

## 15. 慣性力の基礎

(1) 質量 $m$ の物体を加速度 $a$ で持ち上げるために必要な張力 $T$ を求めるために次のような考え方をした。重力加速度の大きさを $g$ として以下の問いに答えよ。

・ 観測者Aが静止している場合

- ① 物体に作用している力の合力を $T, m, g$ で表せ。
- ② この物体が加速度 $a$ で上昇しているときこの物体に関する運動方程式を立てよ。
- ③ 張力 $T$ を $m, g, a$ で表せ。



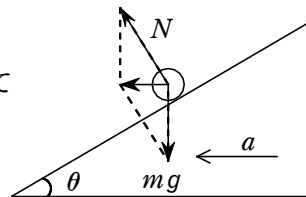
・ 観測者Bが物体と一緒に動いている場合

- ④ Bから見ると周りの景色はどの向きにどれだけの加速しているように見えるか
- ⑤ Bから見ると、この物体にはどれだけの慣性力（方向・大きさ）が作用しているように見えるか
- ⑥ Bから見るとこの物体の加速度はいくらか
- ⑦ Bから見たとき、この物体に作用している力（方向・大きさ）をすべてあげよ。
- ⑧ Bから見たときのこの物体の運動方程式（力のつりあい）を立てよ。
- ⑨ 張力 $T$ を $m, g, a$ で表せ。

(2) 滑らかな傾角 $\theta$ の斜面上に質量 $m$ の物体を置き

左方向に大きさ $a$ の加速度で動かしたところ、この物体は斜面上で静止していた。これに関して以下の問いに答えよ。

・ 静止している観測者から見た場合、斜面上で物体が静止しているということは、斜面と



物体が同じ加速度で運動しているということである。

- ① 斜面上の物体の加速度の大きさと方向を答えよ。
  - ② 物体が斜面から受ける垂直抗力の大きさを $N$ としたとき、垂直抗力の鉛直成分と水平成分をそれぞれ $N, \theta$ で表せ。（斜面に沿う方向ではない）
  - ③ この物体は鉛直方向には動かない。このことに注意して鉛直方向のつりあいの式を立てよ。
  - ④ 水平方向の運動方程式を立てよ。
  - ⑤ 加速度 $a$ と垂直抗力 $N$ を $m, g, \theta$ で表せ。
- ・ 観測者が台とともに加速している場合、観測者から見た物体は静止して見える。
- ⑥ 観測者から見たこの物体の加速度はいくらか
  - ⑦ この物体に作用しているように見える慣性力の方向と大きさを答えよ。
  - ⑧ 垂直抗力の大きさを $N$ とする。水平方向と鉛直方向の力に関する方程式を立てよ。
  - ⑨ 加速度 $a$ と垂直抗力 $N$ を $m, g, \theta$ で表せ。

(3) (2)と同じ装置で加速度を(2)の結果よりも大きくした場合、この物体は斜面上方に滑りあがるようになる。斜面を滑りあがる加速度を $b$ 、その他使用文字はすべて(2)と同じ文

慣性力の作用点は重心である。

解説

- (1) ①  $T - mg$     ②  $T - mg = ma$     ③  $T = mg + ma$

④ 下向き $a$

⑤ 下向き $ma$     ⑥ 静止しているように見える  $0$

⑦ 張力：上向き $T$ 、重力：下向き $mg$ 、慣性力：下向き $ma$

⑧ Bから見るとこの物体は静止しているように見えるので力がつりあっているように感じる。よって、 $T = mg + ma$

⑨  $T = mg + ma$

（慣性力を用いても用いなくても同じ答えが求められる。どちらが考えやすいかでどちらを使うか判断すれば良い。）

- (2) ① 左向き $a$     ② 水平方向  $N \sin \theta$  鉛直方向  $N \cos \theta$

③  $N \sin \theta = mg$

④  $N \cos \theta = ma$

⑤ ③④を解くと

$$\tan \theta = \frac{g}{a} \quad \text{これより} \quad a = \frac{g}{\tan \theta}$$

$$N = \frac{mg}{\sin \theta}$$

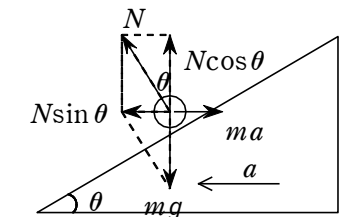
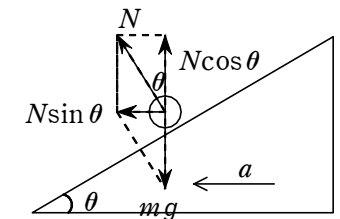
⑥  $0$

⑦ 右向き $ma$

⑧ 静止して見えるのであるから力の釣り合いである。

水平方向  $N \cos \theta = ma$  鉛直方向  $N \cos \theta = ma$

⑨ ⑤と同じ  $a = \frac{g}{\tan \theta}$      $N = \frac{mg}{\sin \theta}$



- (3) ① 右図の通り

② 鉛直方向  $b \sin \theta$  水平方向  $b \cos \theta$

③ 物体の実際の加速度は土台の加速度が加わるので、鉛直方向はそのまま、 $b \sin \theta$ であるが、水平方向は  $a - b \cos \theta$ となる。

④ 水平方向  $N \sin \theta$  鉛直方向  $N \cos \theta$

⑤ 水平方向  $N \sin \theta = m(a - b \cos \theta)$

鉛直方向  $N \cos \theta - mg = m b \sin \theta$

⑥ 斜面上向きに $b$

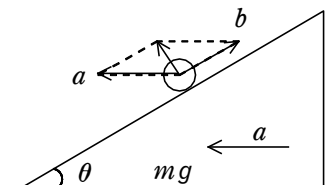
⑦ 右向きに $ma$

⑧ 斜面上向き  $m a \cos \theta$  斜面垂直下向き  $m a \sin \theta$

⑨ 斜面下向き  $m g \sin \theta$  斜面垂直下向き  $m g \cos \theta$

⑩ 斜面垂直方向には物体は動かないので力の釣り合いが成立している。

$$N = m a \sin \theta + m g \cos \theta$$

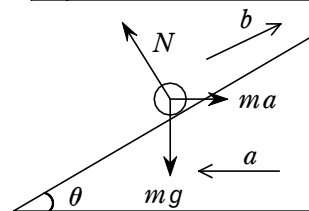
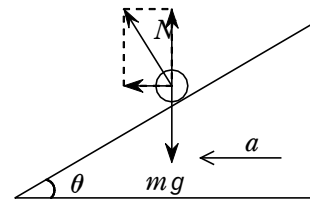
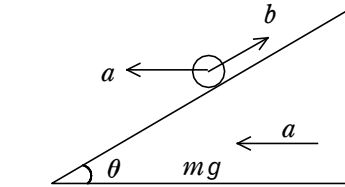


## 等速円運動

字を使い、以下の問いに答えよ。

・ 制止している観測者から見た場合

- ① 斜面上の物体は水平方向に $a$ で加速すると同時に斜面上を滑りあがっている。右図に斜面上の物体の実際の加速度を图示せよ。
- ② 加速度 $b$ を水平成分と鉛直成分に分解せよ。
- ③ 実際の加速度の水平成分と鉛直成分をそれぞれ求めよ。(左向きを正とせよ)
- ④ 垂直抗力の水平成分と鉛直成分をそれぞれ求めよ。
- ⑤ 水平方向、鉛直方向それぞれにおいて運動方程式を立てよ。



・ 観測者が斜面と同時に動いている場合

- ⑥ 観測者から見た物体の加速度の方向と大きさを答えよ。
- ⑦ 物体に作用しているように見える慣性力の方向と大きさを答えよ。
- ⑧ 慣性力を斜面方向と斜面に垂直な方向に分解せよ
- ⑨ 重力を斜面方向と斜面に垂直な方向に分解せよ。
- ⑩ 力に関する斜面に垂直な方向の方程式を立てよ。
- ⑪ 斜面に水平な方向の運動方程式を立てよ。
- ⑫  $b$ 及び $N$ を $a, \theta, m, g$ で表せ。

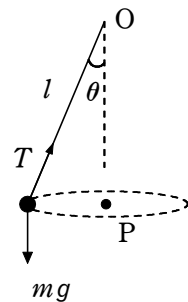
16. 遠心力

(1) 一点 $O$ を固定し長さ $l$ のひもの先に質量 $m$ のおもりをつるし鉛直との角度が $\theta$ になるように保って円錐振り子を作った。おもりは一定の速さ $v$ で等速円運動し、重力加速度の大きさを $g$ として以下の問いに答えよ。

- ① このおもりの等速円運動の回転半径を $l, \theta$ で表せ。
- ② このおもりの向心加速度を $l, \theta, v$ で表せ。

・ 観測者がおもりと一緒に回転していると考え

- ③ 観測者から見てこのおもりに作用しているように見える慣性力(遠心力)の方向と大きさを $m, l, \theta, v$ で表せ。
- ④ 観測者から見たおもりの加速度はいくらか
- ⑤ 慣性力を含めておもりに関する力の方程式を鉛直方向、水平方向についてそれぞれ立てよ。



(2) 右は回転半径 $R$ のカーブを質量 $m$ のオートバイが車体を $\theta$ 傾けて旋回している。

⑪ 斜面方向は斜面上向きに動いているので運動方程式となる。

$$m a \cos \theta - m g \sin \theta = m b$$

⑫ これを解くと  $N = m a \sin \theta + m g \cos \theta$ 、 $b = a \cos \theta - g \sin \theta$

(⑤を解いても同じ答えが出るが解法の難易度が高い。この場合は慣性力を用いたほうが答えが出しやすい)

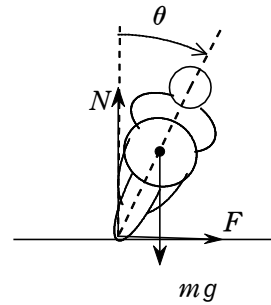
解説

(1) ①  $l \sin \theta$  ②  $a = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{l \sin \theta}$  ③ 円の外向きで  $m a = \frac{m v^2}{l \sin \theta}$

④ 0 静止して見える。

# 等速円運動

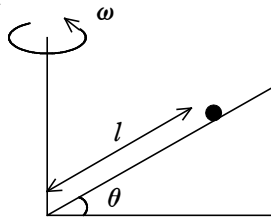
オートバイが路面から受ける摩擦力の大きさを  $F$ 、垂直抗力の大きさを  $N$ 、オートバイの速さを  $v$ 、重力加速度の大きさを  $g$  として以下の問いに答えよ。オートバイに乗っている人を観測者として考えることにする。



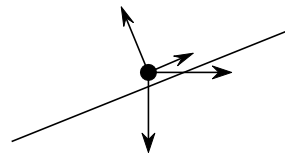
- ① 向心加速度の方向と大きさを  $R, v$  で表せ。
- ② 遠心力の大きさを  $m, R, v$  で表し、右図に作図せよ。
- ③ 観測者から見たオートバイの加速度はいくらか
- ④ 鉛直方向のつりあいに注目し垂直抗力  $N$  を  $m, g$  で表せ。
- ⑤ 水平方向のつりあいに注目し摩擦力  $F$  を  $m, R, v$  で表せ
- ⑥ 回転の中心をオートバイと路面の接地点とすると、遠心力と重力の合力の作用線がこの接点を通過しないとオートバイは転倒（モーメントが0にならない）すること。このことに注意して、 $\tan \theta$  を  $R, v, g$  で表せ。

- (3) 静止摩擦係数  $\frac{1}{2}$ 、傾角  $45^\circ$  の斜面の先端を軸として

角速度  $2\text{rad/s}$  で回転できるようにした装置がある。斜面上の先端から  $x[\text{m}]$  離れた位置に質量  $1\text{kg}$  の小物体を置いた。この装置が回転していない状態ではこの小物体は、斜面を滑り降りた。重力加速度の大きさを  $10\text{m/s}^2$  として以下の問いに答えよ。



- ・ この装置が角速度  $\omega$  で回転しているとき
  - ① 回転半径はいくらか。  $x$  で表せ。
  - ② 向心加速度はいくらか。  $x$  で表せ。
  - ③ 観測者が小物体の位置にいるとして、観測者から見てこの物体に作用しているように見える遠心力の方向と大きさを  $x$  で表せ。
  - ④ 観測者から見たこの小物体の加速度はいくらか
- ・ 摩擦力が斜面上向きに  $F$  の大きさに作用しているとする。
  - ⑤ 重力を斜面方向とその直角方向に分解せよ
  - ⑥ 遠心力を斜面方向とその直角方向に分解せよ。
  - ⑦ 斜面方向とその直角方向それぞれで力に関する方程式を立て、摩擦力  $F$ 、垂直抗力  $N$  を  $x$  で表せ。
  - ⑧ 最大摩擦力の大きさを  $x$  で表せ。
  - ⑨ ⑦⑧より、物体が斜面上で静止するための  $x$  の最小値を求めよ。
  - ⑩ 摩擦力が下向きに  $F$  の大きさに作用しているとして、⑤から⑨と同様に  $x$  の最大値を求めよ。



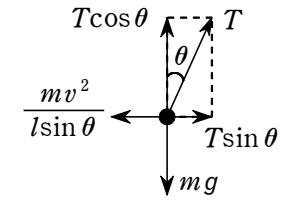
## 17. 総合問題

- (1) 半径  $R$  の固定された円柱がある。円柱表面は

- ⑤ 観測者から見ると加速度0なので、力の釣り合いが成立する。

鉛直方向  $T \cos \theta = mg$

水平方向  $T \sin \theta = \frac{mv^2}{l \sin \theta}$



- (2) ①  $a = \frac{v^2}{R}$  ②  $ma = \frac{mv^2}{R}$

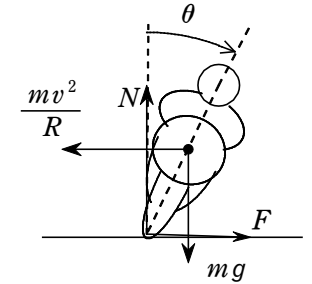
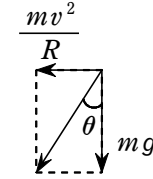
- ③ 0 静止して見える。

- ④ 重力とつりあっている。  $mg$

⑤  $F = \frac{mv^2}{R}$

- ⑥ 右図より、

$$\tan \theta = \frac{m \frac{v^2}{R}}{mg} = \frac{v^2}{Rg}$$



- (3) ①  $r = l \cos \theta = x \times \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} x [\text{m}]$  ②  $a = r \omega^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} x \times 2^2 = 2\sqrt{2} x \text{ [m/s}^2\text{]}$

- ③ 図の右向き  $ma = 1 \times 2\sqrt{2} x = 2\sqrt{2} x [\text{N}]$

- ④ 0

- ⑤ 重力  $= mg = 10\text{N}$  より

斜面方向  $10 \sin 45^\circ = 5\sqrt{2} \text{ N}$  斜面直角方向  $10 \cos 45^\circ = 5\sqrt{2} \text{ N}$

- ⑥ 斜面方向  $2\sqrt{2} x \cos 45^\circ = 2x [\text{N}]$  斜面直角方向  $2\sqrt{2} x \sin 45^\circ = 2x [\text{N}]$

- ⑦ 斜面方向  $F + 2x = 5\sqrt{2}$   $F = 5\sqrt{2} - 2x$

斜面直角方向  $N = 5\sqrt{2} + 2x$

- ⑧  $F \leq \mu N = \frac{1}{2} \times (5\sqrt{2} + 2x) = \frac{5}{2}\sqrt{2} + x$

- ⑨  $5\sqrt{2} - 2x \leq \frac{5}{2}\sqrt{2} + x$   $x \geq \frac{5}{6}\sqrt{2} \text{ m}$

- ⑩ 摩擦力の向きが逆になるので、

斜面方向  $-F + 2x = 5\sqrt{2}$   $F = 2x - 5\sqrt{2}$

斜面直角方向  $N = 5\sqrt{2} + 2x$

最大摩擦力は  $\frac{5}{2}\sqrt{2} + x$  なので、

$$2x - 5\sqrt{2} \leq \frac{5}{2}\sqrt{2} + x$$

これより、  $x \leq \frac{15}{2}\sqrt{2} \text{ m}$

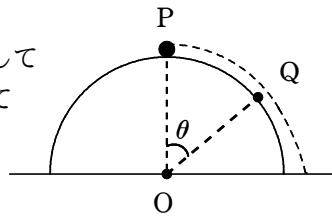
### 解説

- (1) ① P点基準であるので、Q点での位置エネルギーは負である。

P点とQ点の高さの差は  $R(1 - \cos \theta)$  なので、  $-mgR(1 - \cos \theta)$

## 等速円運動

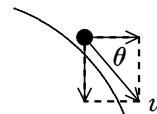
滑らかであり、この円柱の最上端に質量  $m$  の小物体を置いたところ、静かに滑り出して  $\angle QOP = \theta$  となる  $Q$  点で円柱表面から離れて放物運動をして地面に落下した。重力加速度の大きさを  $g$  として、以下の問いに答えよ。



- ① P点を位置エネルギーの基準としたとき、この小物体がQ点にあるときの重力の位置エネルギーはいくらか
- ② Q点でのこの小物体の速さを  $v$  とするとき、この小物体のQ点における運動エネルギーはいくらか。
- ③ P点とQ点での力学的エネルギーを比較することにより力学的エネルギー保存の式を立てよ。
- ④ この小物体はQ点で円運動をしていると考えて向心加速度の大きさを  $R, v$  で表せ。
- ⑤ Q点で円柱面から受ける垂直抗力の大きさはいくらか
- ⑥ Q点においてこの小物体が受ける重力の円柱面に直角な方向の成分を  $m, g, \theta$  で表せ。
- ⑦ Q点において小物体は円運動していると考えて、円柱面に直角な方向の運動方程式を立てよ。
- ⑧ ③⑦を連立させることにより  $\cos \theta$  の値を求めよ。

(2) (1)と同じ装置で円柱の質量を  $m$  とし、滑らかな水平面で同じ実験をした。これに関して以下の問いに答えよ。使う文字は(1)と共通である。

- ① 小物体がQ点で円柱面から離れるときの円柱の速さを  $V$ 、小物体の速さを  $v$  とする。速さ  $v$  の水平成分、鉛直成分をそれぞれ、 $v, \theta$  で表せ。
- ② 運動量保存則を用いて  $V$  と  $v$  の関係式を求めよ。  
水平方向に関しては運動量は保存されており、小物体を最上端に置いたときの運動量の総和は0である。
- ③ P点を重力の位置エネルギーの基準とし、エネルギー保存則を用いて  $V$  と  $v$  の関係式を求めよ。
- ④ 小物体がQ点にあるとき小物体に作用している垂直抗力の大きさはいくらか
- ⑤ 円柱を加速する力は小物体に作用する垂直抗力の反作用であることに注目し、小物体がQ点にあるとき、円柱の加速度の大きさを求めよ。
- ⑥ 観測者が円柱とともに運動しているとして、観測者から小物体を見たときに小物体に作用しているように見える慣性力の大きさはいくらか
- ⑦ 小物体がQ点で円運動しているとして小物体の向心加速度の大きさを  $v, R$  で表せ。
- ⑧ 小物体に作用している重力の円柱面に直角な方向の成分を求めよ。
- ⑨ Q点における小物体の円柱面に直角な方向の運動方程式を立てよ。



$$\textcircled{2} \quad \frac{1}{2}mv^2$$

③ P点では重力による位置エネルギー・運動エネルギーともに0なので、

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgR(1 - \cos \theta) = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{v^2}{R}$$

⑤ Q点で円柱面から離れるので0

⑥ 右図より  $mg \cos \theta$

$$\textcircled{7} \quad mg \cos \theta = m \frac{v^2}{R}$$

⑧ ⑦より、 $mv^2 = mgR \cos \theta$  これを ③に代入して

$$\frac{1}{2}mgR \cos \theta = mgR(1 - \cos \theta) \quad \text{よって、} \cos \theta = \frac{2}{3}$$



(2) ① 水平成分  $v \cos \theta$  鉛直成分  $v \sin \theta$

②  $V$ は左向き  $v \cos \theta$  は右向きであり、最初は運動量0であった。よって、右向きの運動量と左向きの運動量は等しくなる。

$$mV = mv \cos \theta \quad \text{簡単にすると、} V = v \cos \theta$$

③ P点での力学的エネルギーは0であり、Q点では小物体の運動エネルギーが  $\frac{1}{2}mv^2$

円柱の運動エネルギーが  $\frac{1}{2}mV^2$ 、小物体の重力による位置エネルギーが

$$-mgR(1 - \cos \theta)$$

なので、

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mV^2 - mgR(1 - \cos \theta) = 0$$

④ Q点では小物体が円柱面から離れるので、垂直抗力は0

⑤ 垂直抗力が0なので、反作用も0。円柱には力が作用していないことになるので、加速度は0

⑥ 円柱の加速度が0なので、観測者の加速度も0となり、慣性力は0

$$\textcircled{7} \quad \frac{v^2}{R}$$

⑧ (1)と同様に  $mg \cos \theta$

$$\textcircled{9} \quad mg \cos \theta = m \frac{v^2}{R}$$