運動量

１． 運動量の定義

(1) 「力とは速度を変化させるもの」である。これについて、以下の問いに答えよ。

① ある物体の速度が変化したとき、この物体に力が変化しているといえるか。

② ある二物体の速度が同じように変化（加速度が同じ）したとき、この物体に作用した力は同じといえるか

③ 質量が同じ物体の速度が同じように変化（加速度が同じ）したとき、この物体に作用した力は同じといえるか

④ 質量が１の物体Aと、質量が２の物体Bの速度変化（加速度）が同じであった。物体Bに作用している力の大きさは物体Aの何倍か

(2) 「力とは質量と速度の積（運動量）を変化させるもの」と考えたとき、以下の問いに答えよ。

① 物体に力が加わったとき、その物体の質量は変化するかしないか。

② 質量が１の物体Aと質量が２の物体Bの速度が同じであった。物体Bの運動量（質量と速度の積）は物体Aの何倍か

③ 質量が１の物体Aと質量が２の物体Bの加速度（1秒あたりの速度変化）が同じであった。物体Bに加わった力は物体Aに加わった力の何倍か。また、物体Bの1秒あたりの運動量変化は物体Aの1秒あたりの運動量変化の何倍か

④ 二物体の1秒間当たりの運動量変化が同じであったとき、この二物体に作用している力は同じといえるか

(3) 運動量＝質量×速度（$P=mv$[kgm/s]）である。これについて以下の問いに答えよ。

① 質量100gのボールA,BがAは50km/h、Bは200km/hで飛んできた。この物体を受け止めたときの衝撃の大きさはA,Bどちらが大きいか。

② 質量100gの物体Aと質量1kgの物体Bがともに50km/hで飛んできた。この物体を受け止めたときの衝撃の大きさはA,Bどちらが大きいか。

③ 運動量が大きいほど受け止めたときの衝撃の大きさが大きいといえるか。

(4) 20m/sで動いている質量2kgの物体に力を加えたところ5秒後に40m/sになった。これについて以下の問いに答えよ。

① この物体の加速度の大きさはいくらか

② この物体に加わった力の大きさはいくらか

③ 力を加える前の運動量の大きさはいくらか

④ 力を加えた後の運動量の大きさはいくらか

⑤ 運動量は5秒間でどれだけ変化したか

⑥ 1秒あたりの運動量変化はいくらか

⑦ ②⑥にどのような関係があるか

(5) 初速度v_0]で動いている質量mの物体に力を加えたところ時間t後に速度vになった。これについて以下の問いに答えよ。

① この物体の加速度はいくらか

② この物体に加わった力はいくらか

解説

(1) ① いえる。これは力の定義である。

② 同じ力が加わっても質量が違えば、加速度が違うので、加速度が同じだといえども加わった力は同じとは限らない。

③ $F=ma$より、質量と加速度が同じであれば、加わった力は同じといえる。

④ $F=ma$より、加速度が同じで質量が2倍であれば、加わった力は2倍となる。

(2) ① 力は速度を変化させるものなので、質量は変化させない。

② 速度が同じで質量が2倍であるから、運動量は2倍となる。

③ 物体BはAより加速度が同じで質量が2倍であるから、$F=ma$より、力は2倍作用していることになる。

物体BはAより、質量が2倍であるので、常に運動量が2倍である。よって、運動量変化は2倍となる。

④ 運動量変化が同じということは、質量が2倍になれば速度変化（加速度）が半分になるということであり、$F=ma$より力は同じである。

(3) ① B ② B ③ いえる。

(4) ① 加速度とは1秒間の速度変化である。$\frac{40-20}{5}=4\mathrm{m/s^2}$

② $F=ma$より$F=2\mathrm{kg}\times 4\mathrm{m/s^2}=8\mathrm{N}$

③ $P=mv$より、$2\mathrm{kg}\times 20\mathrm{m/s}=40\mathrm{kgm/s}$

④ 同じく　$2\mathrm{kg}\times 40\mathrm{m/s}=80\mathrm{kgm/s}$

⑤ $80\mathrm{kgm/s}-40\mathrm{kgm/s}=40\mathrm{kgm/s}$

⑥ $\frac{40}{5}=8\mathrm{kgm/s^2}$

⑦ 等しい。

(5) ① $a=\frac{v-v_0}{t}$ ② $F=ma=m\frac{v-v_0}{t}$ ③ mv_0 ④ mv ⑤ $mv-mv_0$

⑥ $\frac{mv-mv_0}{t}$ ⑦ 等しい。

「力とは1秒間の運動量変化といえる。」

(6) ① (5)②より、$Ft=m\frac{v-v_0}{t}\times t=mv-mv_0$

② ①式は運動量の差となっている。よって、力積とは運動量の差といってよい。

③　力を加える前の運動量はいくらか

④　力を加えた後の運動量はいくらか

⑤　運動量は時間tでどれだけ変化したか

⑥　単位時間（1秒）あたりの運動量変化はいくらか

⑦　②⑥にどのような関係があるか

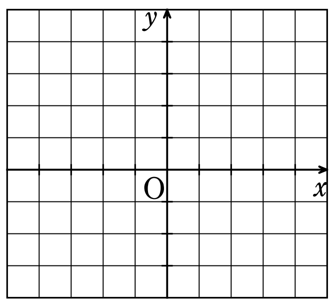
(6)　力積について

①　(5)において、力積を「力と時間の積」と定義する時、力積Ftをm,v,v_0で表せ。

②　力積とは運動量の差と言ってよいかどうか答えよ。

２．運動量･力積とベクトル

(1)　ベクトル$\vec{a}$のx成分、y成分を$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$と表すとする。



原点に向かって速度$\vec{v_0}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$m/sで飛んできた質量2kg

の物体が、原点で瞬間的に力を受けて速度$\vec{v}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$m/s

になった。これについて以下の問いに答えよ。

①　衝突前の物体の運動量を成分表示せよ。

また、右図に適当に目盛りを取り、原点を始点として、運動量ベクトルを描け

②　衝突後の物体の運動量を成分表示せよ。

また、この運動量ベクトルを原点を始点として上図に描け。

③　この物体の運動量変化を成分表示し、力積を求めて、成分表示せよ。

また、力積ベクトルを上図に描け（始点は原点でなくても良い）

④　力積の大きさを求めよ。

⑤　この物体が受けた力の方向と力積の方向はどのような関係があるか。

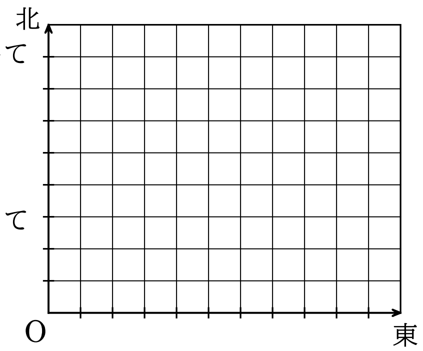
(2)　東向きに20m/sで飛んでいた質量2kgの物体が瞬間的に力を受けて北向きに$20\sqrt{3}$m/sで飛んでいった。これについて以下の問いに答えよ。

①　適当に目盛りを取り、右図に力を受ける前の運動量ベクトルを原点を始点として描け。

②　①と同じようにして力を受けた後の運動量ベクトルを描け

③　力積ベクトルを描け（始点を原点としなくて良い）

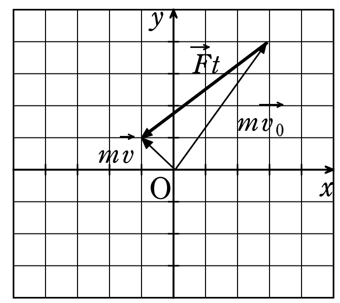
④　力積ベクトルの大きさと方向を答えよ。方向は北からの角度で答えること。



(解説)

(1)　①　$m\vec{v_0}=2\times\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$kgm/s

②　$m\vec{v}=2\times\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$kgm/s



③　$\vec{Ft}=m\vec{v}-m\vec{v_0}=\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$Ns

④　$|\vec{Ft}|=\left|\begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-8)^2+(-6)^2}=10$Ns

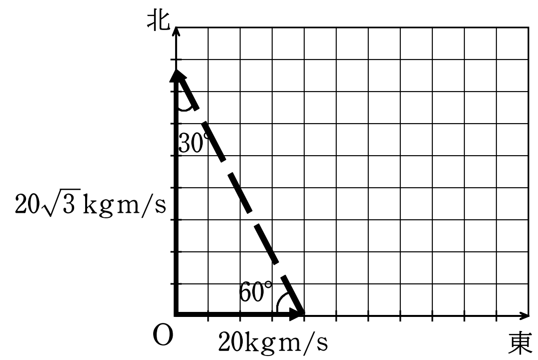
⑤　$\vec{Ft}$はベクトルに時間（実数）を掛けたものであるから、力のベクトルと力積のベクトルは同じ方向である。

(2)　①②　右のグラフの通り

③　右の破線のグラフの通り

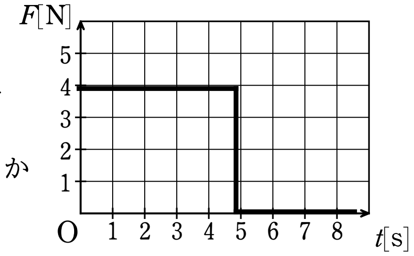
④　破線のベクトルの大きさは40Ns

方向は真北より西に30度の方向



３．力積と時間

(1)　物体どおしが衝突するときは一瞬だけ力が加わるのであるが、質量2kgの物体に右図のような力が加わったとき、以下の問いに



①　力が加わった時間は何秒間か

②　この物体に加わった力積の大きさはいくらか

③　運動量変化の大きさはいくらか

・　10m/sで物体が移動中について

④　この力積が後から加わった後のこの物体の運動量はいくらか。また、物体の速度はいくらか。

⑤　この物体の進行方向前方から力積を受けたときの、受けたあとの運動量、及び速度はいくらか。

⑥　この物体の進行方向左側に直角に力積を受けたとき、力積を受けたあとの運動量の大きさと方向、及び速度の大きさと方向を求めよ。

(2)　質量mの物体が動摩擦係数μの水平面上を速度v_0で動いていた。この物体は時間t後に静止した。重力加速度の大きさをgとして、これに関して以下の問いに答えよ。

・　運動方程式で考える。

①　重力の大きさはいくらか

②　この物体が面から受ける垂直抗力の大きさはいくらか

③　この物体画面から受ける動摩擦力の大きさはいくらか

④　この物体の加速度の大きさはいくらか。μ、gで表せ。

⑤　静止するまでの時間tをμ、g、v_0で表せ。

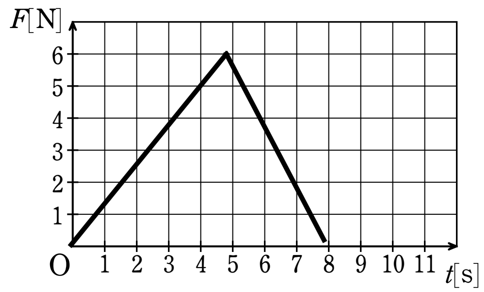
・　運動量を使って考える。

⑥　運動量変化はいくらか

⑦　力積を動摩擦力と時間tで表せ。

⑧　静止するまでの時間tをμ、g、v_0で表せ。

(3)　一般に物体どおしが衝突するときに作用する力は一定でなく変化している。衝突の瞬間8秒間に右図のように力が変化しているとき、右向きを正として以下の問いに答えよ。



①　衝突し始めてから最初の5秒間の平均の力の大きさはいくらか

②　最初の5秒間の力積はいくらか

③　5秒後から8秒後までの平均の力の大きさはいくらか。また、5秒後から8秒後までの力積はいくらか

④　この衝突でこの物体が受ける力の平均の大きさと、力積を求めよ。

・　質量2kgの物体が8m/sで進んでいたところ。左方向にこの力を受けて速度が変化

解説

(1)　①　力が加わった時間は5秒間

②　4N×5s＝20Ns

③　力積＝運動量変化である。20kgm/s

④　後から力積（力）を受けたのであるから、運動量は大きくなる。

力積は運動量の差であるから、　20Nsだけ運動量が大きくなっている。

最初の運動量は2kg×10m/sなので、20kgm/s。よって、

20kgm/s＋20Ns＝40kgm/s、（進行方向）

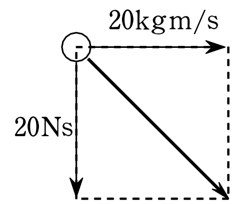
速度は運動量を質量で割ればよいので、20m/s（進行方向）

⑤　前方から力積を受けた場合は20Nsだけ運動量が減少する。

20kgm/s－20Ns＝0

速度も0　つまり静止する。

⑥　力積が加わった方向を考慮してベクトル和すればよい。



図より進行方向右斜め前方45°に$20\sqrt{2}$ kgm/sの運動量となる。

速度は同じ方向に$10\sqrt{2}$ m/sとなる。

(2)　①　mg　②　重力と等しくmg　③　$F=\mu N=\mu mg$

④　運動方程式より、$\mu mg=ma$　よって、$a=\mu g$

⑤　$v=v_0+at$より、$0=v_0-\mu gt$　よって、$t=\dfrac{v_0}{\mu g}$

あるいは加速度μgは1秒間の速度変化であるから$t=\dfrac{v_0}{\mu g}$としても良い。

⑥　運動量はmv_0から0になったので、$-mv_0$

⑦　力積は$Ft=-\mu mgt$

⑧　⑥⑦より、$-mv_0=-\mu mgt$　これより、$t=\dfrac{v_0}{\mu g}$

力が一定の場合の力積の問題は運動方程式と加速度三公式で解くことができるが力積を使うほうが簡単に解ける。

(3)　①　3N　②　3×5＝15Ns　③　3N、3×(8－5)＝9Ns

④　3N、3N×8s＝24Ns　②＋③で15Ns＋9Ns＝24Nsでも良い。

力の大きさが変化しているときの力積の大きさはグラフ下の面積となっている。

⑤　衝突前＝2kg×8m/s＝16kgm/s

衝突後＝16kgm/s－24Ns＝－8kgm/s

⑥　質量で割って　－8kgm/s÷2kg＝－4m/s

⑦　平均の力が3Nで質量が2kgなので、平均の加速度の大きさは3N÷2kg＝1.5m/s^2

⑧　1.5m/s2で8秒間逆方向に加速されるので、12m/sだけ速度変化がおきる。

よって、8m/s－12m/s＝－4m/s

した。

⑤　衝突前後のこの物体の運動量を求めよ。

⑥　衝突後の物体の速度を求めよ。

⑦　衝突中のこの物体の平均の加速度はいくらか

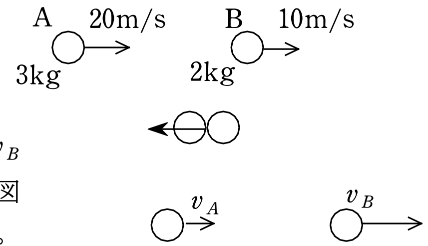
⑧　平均の加速度を用いて衝突後の速度を計算せよ。

⑨　力積を使って速度を計算した場合と平均の加速度を使って速度を計算した場合の結果は同じか異なるか

４．運動量の保存

(1)　10m/sで右向きに進んでいる質量2kgの物体Bの後から20m/sで進んでいる質量3kgの物体Aが衝突した。

物体Aは衝突の瞬間平均180Nの力を0.1秒間左向きに受けて、衝突後物体Aはv_A、物体Bはv_Bの速度になった。この状態を示しているのが右図である。右向きを正として以下の問いに答えよ。



①　衝突前の物体A,Bの運動量をそれぞれ求めよ。

②　物体Aが物体Bから受ける力積はいくらか

③　衝突後の物体Aの運動量はいくらか

④　衝突後の物体Aの速度はいくらか

⑤　物体Bは衝突の瞬間、物体Aから受ける平均の力はいくらか

⑥　物体BがAから受ける力積はいくらか

⑦　衝突後、物体Bの運動量はいくらになったか

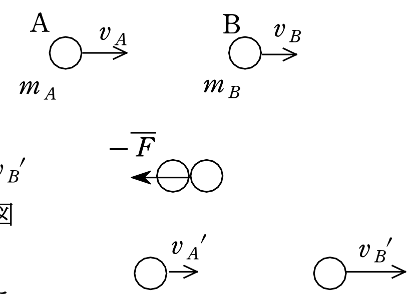
⑧　衝突後の物体Bの速度はいくらか

⑨　衝突後の物体A、Bの運動量の和はいくらか

⑩　運動量の和は衝突前後でどうなっているか答えよ。

(2)　速度v_Bで右向きに進んでいる質量m_Bの物体Bの後から速度v_Aで進んでいる質量m_Aの物体Aが衝突した。

物体Aは衝突の瞬間平均$-\overline{F}$の力を時間tだけ左向きに受けて、衝突後物体Aは$v_A{}'$、物体Bは$v_B{}'$の速度になった。この状態を示しているのが右図である。右向きを正として以下の問いに答えよ。



①　衝突前の物体A,Bの運動量をそれぞれ求めよ。

②　物体Aが物体Bから受ける力積はいくらか

③　衝突後の物体Aの運動量はいくらか。m_A、v_A、$\overline{F}$、tで表せ。

④　衝突後の物体Aの運動量をm_A、$v_A{}'$で表せ。

⑤　物体Bは衝突の瞬間、物体Aから受ける平均の力はいくらか

⑥　物体BがAから受ける力積はいくらか

⑨　同じ

解説

(1)　①　A：3kg×20m/s＝60kgm/s　B:2kg×10m/s＝20kgm/s

②　左向きに180Nで0.1秒間であるから－180N×0.1s＝－18Ns

③　60kgm/s－18Ns＝42kgm/s

④　質量が3kgなので、42kgm/s÷3kg＝14m/s

⑤　BがAから受ける力と、AがBから受ける力は作用反作用の関係にあるので逆向きで同じ大きさである。よって、180N

⑥　接触時間は0.1秒なので、物体Bが受けた力積は180N×0.1s＝18Ns

⑦　20kgm/s＋18Ns＝38kgm/s

⑧　質量2kgで割って、38kgm/s÷2＝19m/s

⑨　Aは42kgm/s、Bは38kgm/sなので、A＋B＝80kgm/s

⑩　衝突前はAは60kgm/s、Bは20kgm/sなので、合計80kgm/sとなり、衝突前後で運動量の合計は変わっていない。

(2)　①　A:$m_A v_A$　B:$m_B v_B$　　②　$-\overline{F}t$

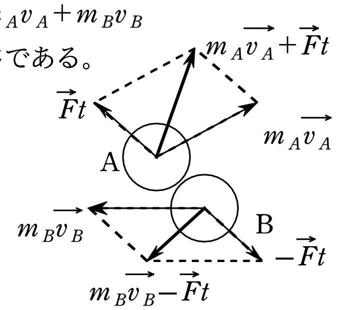
③　$m_A v_A-\overline{F}t$　　④　$m_A v_A{}'$

⑤　$\overline{F}$　⑥　$\overline{F}t$

⑦　$m_B v_B+\overline{F}t$　　⑧　$m_B v_B{}'$

⑨　$m_A v_A{}'+m_B v_B{}'=(m_A v_A-\overline{F}t)+(m_B v_B+\overline{F}t)=m_A v_A+m_B v_B$

⑩　⑨で分かるとおり、運動量の和は衝突前後で同じである。



(3)　①　$\overrightarrow{F}t$　②　$-\overrightarrow{F}t$

③　$m_A\overrightarrow{v_A}+\overrightarrow{F}t$

④　$m_B\overrightarrow{v_B}-\overrightarrow{F}t$

⑤　③＋④

$=（m_A\overrightarrow{v_A}+\overrightarrow{F}t）＋（m_B\overrightarrow{v_B}-\overrightarrow{F}t）$

$=m_A\overrightarrow{v_A}+m_B\overrightarrow{v_B}$

・　$m_A=2$kg、$m_B=3$kg、$\overrightarrow{v_A}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$m/s、$\overrightarrow{v_B}=\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$m/s、$\overrightarrow{F}=\begin{pmatrix}-80\\-80\end{pmatrix}$N、$t=0.1$s

とする。

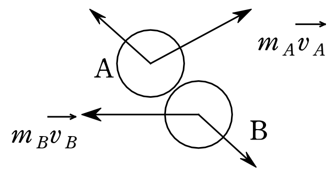
⑦　衝突後、物体Bの運動量はいくらになったか。m_B、v_B、$\overline{F}$、tで表せ。

⑧　衝突後の物体Bの運動量をm_B、$v_B{}'$で表せ。

⑨　衝突後の物体A、Bの運動量の和をm_A、v_A、m_B、v_Bで表せ。

⑩　運動量の和は衝突前後でどうなっているか答えよ。

(3)　右図は質量m_A、速度$\vec{v_A}$の物体Aと質量m_B、速度$\vec{v_B}$の物体Bが斜めに衝突し、物体Aは物体Bから平均の力$\vec{F}$をt秒間受けた時のものである。



①　物体Aが物体Bから受ける力積をベクトル式で表せ。

②　物体Bが物体Aから受ける力積をベクトル式で表せ。

③　衝突後の物体Aの運動量をm_A、$\vec{v_A}$、$\vec{F}$、tで表し、上図にそのベクトルを記入せよ。

④　衝突後の物体Bの運動量をm_B、$\vec{v_B}$、$\vec{F}$、tで表し、上図にそのベクトルを記入せよ。

⑤　衝突後の物体A,Bの運動量のベクトル和をm_A、$\vec{v_A}$、m_B、$\vec{v_B}$で表せ。

・ $m_A=2\text{kg}$、$m_B=3\text{kg}$、$\vec{v_A}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\text{m/s}$、$\vec{v_B}=\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}\text{m/s}$、$\vec{F}=\begin{pmatrix}-80\\-80\end{pmatrix}\text{N}$、$t=0.1\text{s}$

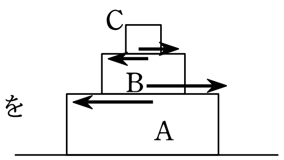
とする。

⑥　衝突前のABの運動量を成分表示せよ。また、運動量の和を成分表示せよ。

⑦　物体AがBから受けた力積、物体BがAから受けた力積をそれぞれ成分表示せよ。

⑧　衝突後のA,Bの運動量を成分表示せよ。また、運動量の和を成分表示せよ。

(4)　質量m_A、速度v_Aの物体の上に、質量m_B、速度v_Bの物体Bが乗っており、その上に質量m_C、速度v_Cの物体Cが乗っている。物体Aは滑らかな水平面上に乗っており、物体BはAから右向きに大きさFの動摩擦力をCから左向きに大きさfの動摩擦力を受けている。



これらA,B,Cの物体がt秒間だけ運動した後の速度を$v_A{}'$、$v_B{}'$、$v_C{}'$とするとき、以下の問いに答えよ。

①　A,B,Cの最初の運動量及びその和を求めよ。

②　A,B,Cのt秒後の運動量をm_A、m_B、m_C及びv_A、v_B、v_C、F,f,tでそれぞれ表せ。
　また、運動量の和をm_A、m_B、m_C及びv_A、v_B、v_Cで表せ。

③　物体A,Bのみの運動量の和を最初とt秒後でm_A、m_B及びv_A、v_Bを用いて表せ。

④　A,Bのみで運動量保存則は成立しているかいないか答えよ。

⑤　③④を基にして、運動量保存則が成立しないのはどのようなときか答えよ。

５．反発係数

(1)　物体が他物体と衝突するとき、衝突前の速さに対する衝突後の速さの割合を跳ね返り

⑥　A：$m_A\vec{v_A}=2\times\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}\text{kgm/s}$　　B:$m_B\vec{v_B}=3\times\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}\text{kgm/s}$

$\text{A}+\text{B}=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}\text{kgm/s}$

⑦　物体AがBから受けた力積　$\vec{F}t=\begin{pmatrix}-80\\-80\end{pmatrix}\times0.1=\begin{pmatrix}-8\\-8\end{pmatrix}\text{Ns}$

物体BがAから受けた力積　$-\vec{F}t=-\begin{pmatrix}-80\\-80\end{pmatrix}\times0.1=\begin{pmatrix}8\\8\end{pmatrix}\text{Ns}$

⑧　A：$m_A\vec{v_A}+\vec{F}t=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-8\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}\text{kgm/s}$

B：$m_B\vec{v_B}-\vec{F}t=\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}\text{kgm/s}$

$\text{A}+\text{B}=\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}\text{kgm/s}$

(4)　①　A：m_Av_A　B：m_Bv_B　C：m_Cv_C

$\text{A}+\text{B}+\text{C}=m_Av_A+m_Bv_B+m_Cv_C$

②　Aは$-Ft$の力積を受けているので、m_Av_A-Ft

BはFtと$-ft$の力積を受けているので　$m_Bv_B+Ft-ft$

Cはftの力積を受けているので、m_Cv_C+ft

$\text{A}+\text{B}+\text{C}=m_Av_A-Ft+m_Bv_B+Ft-ft+m_Cv_C+ft=m_Av_A+m_Bv_B+m_Cv_C$

③　最初　$\text{A}+\text{B}=m_Av_A+m_Bv_B$

t秒後　$\text{A}+\text{B}=m_Av_A-Ft+m_Bv_B+Ft-ft=m_Av_A+m_Bv_B-ft$

④　運動量保存則は成立していない。

⑤　力が作用している物体すべてを計算対象としなければ、運動量保存則は成立していない。

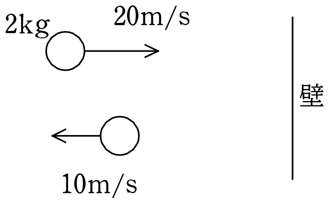
　物体が地球から力を受けている場合、地球を計算対象としないため運動量保存則が成立しなくなる。

(解説)

(1)　①　跳ね返り係数は衝突前に対する衝突後の速さの比であるから、

係数（反発係数）という。

質量2kgの物体が20m/sで垂直に固定された壁に衝突後、垂直に10m/sで跳ね返った。これについて以下の問いに答えよ。



① 跳ね返り係数はいくらか

② 衝突前後の運動エネルギーを計算し、この衝突により物体の運動エネルギーはいくら減少したか

③ 減少したエネルギーはどこに行ったと考えられるか。

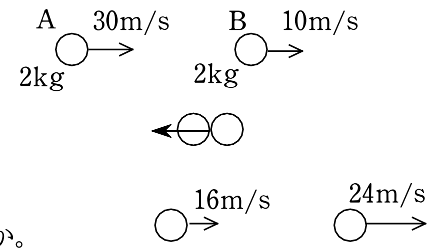
④ 右向きを正として衝突前後の運動量を計算し、この衝突により減少した運動量を求めよ。

⑤ 減少した運動量はどこに行ったと考えられるか

(2) (1)のように片方の物体が固定されてなく、両方動く場合も反発係数が定義されている。

30m/sで右向きに動いている2kgの物体Aが前方を右向きに10m/sで進んでいた2kgの物体Bに真後ろから衝突した。

衝突後Aは16m/s、Bは24m/sでともに右向きに進んだ。右向きを正として以下の問いに答えよ。



① 衝突前のBからAを見た相対速度はいくらか。

② 衝突後のBからAを見た相対速度はいくらか。

③ 衝突前に対する衝突後の相対速度の大きさの割合はいくらになるか

④ 跳ね返り係数はいくらになるか

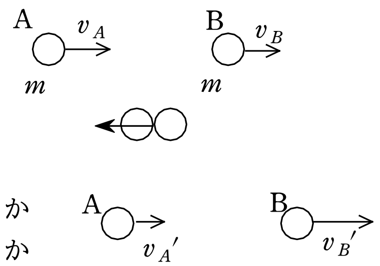
⑤ 衝突前後の運動エネルギーを計算し運動エネルギーの減少量を求めよ。

⑥ 衝突前後の運動量の変化はいくらか

(3) 速度v_Aで動いている質量mの物体Aが前方を速度v_Bで進んでいたmの物体Bに真後ろから衝突した。

衝突後Aは速度v_A'、Bは速度v_B'で進んだ。

右向きを正として以下の問いに答えよ。



① 衝突前の物体Bから見たAの相対速度はいくらか

② 衝突後の物体Bから見たAの相対速度はいくらか

③ 今後衝突することを考えて①の相対速度の符号を答えよ。

④ 衝突した後であることから考えて②の相対速度の符号を答えよ。

⑤ 跳ね返り係数は正であることに注目して、この衝突における跳ね返り係数を求めよ。

(4) 高さHの空中から水平面にボールを落とすと高さhまで跳ね返ってきた。ボールの質量をm、重力加速度の大きさをgとして以下の問いに答えよ。

① 水平面を基準としたとき高さHにある物体の重力による位置エネルギーはいくらになるか。

$e=\frac{10}{20}=0.5$

② 衝突前 $\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\times 2\times 20^2=400\mathrm{J}$

衝突後 $\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\times 2\times 10^2=100\mathrm{J}$

エネルギー源少量は400J−100J=300J

（運動エネルギーは75%減少している）

③ 運動エネルギーは衝突時の音や物体の変形による熱エネルギーとなった。

④ 衝突前 $P=mv=2\times 20=40\mathrm{kgm/s}$

衝突後 $P=mv=2\times(-10)=-20\mathrm{kgm/s}$

運動量変化 $-20-40=-60\mathrm{kgm/s}$

60kgm/s運動量が減少している。

⑤ 衝突の瞬間、力は地球との間で作用しているので、地球の運動量になったといえる。

(2) ① 相対速度は「相手の速度−自分の速度」で表される。よって、30−10=20m/s

② ①と同様にして16−24=−8m/s

③ 相対速度の大きさの割合は $\frac{8}{20}=0.4$

④ 跳ね返り係数は相対速度の大きさの割合である。0.4

⑤ 衝突前 $\mathrm{A}=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\times 2\times 30^2=900\mathrm{J}$ $\mathrm{B}=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\times 2\times 10^2=100\mathrm{J}$

A＋B=1000J

衝突後 $\mathrm{A}=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\times 2\times 16^2=256\mathrm{J}$ $\mathrm{B}=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\times 2\times 24^2=576\mathrm{J}$

A＋B=832J

1000−832=168J 失われた

⑥ 運動量保存則が成立しているので運動量は保存されている。

(3) ① v_A-v_B ② $v_A'-v_B'$

③ Aは今後Bに衝突するのであるからBから見てAは右向きに動いていなければならない。よって、正

④ 衝突した後であるからBから遠ざかっていなければならない。よって左向きになるので 負

⑤ ③④は正負逆になるのでマイナスをつけて $e=-\frac{v_A'-v_B'}{v_A-v_B}$

(4) ① mgH ② $\frac{1}{2}mV^2$

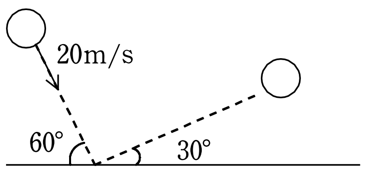
③ エネルギー保存則より $\frac{1}{2}mV^2=mgH$ これより、$V=\sqrt{2gH}$

② 水平面に着地する直前の速さをVとするとき、この物体の運動エネルギーはいくらになっているか。
③ ①②を考慮し速さVをg,Hで表せ。
④ 跳ね返った直後の速さをvとするとき、この物体の持つ運動エネルギーはいくらか
⑤ この物体が高さhまで跳ね返ったときの重力による位置エネルギーはいくらか
⑥ ④⑤を考慮し速さvをg,hで表せ。
⑦ この物体の跳ね返り係数をh,Hで表せ。
⑧ 跳ね返り係数0の場合、衝突後この物体はどうなっているか。
⑨ 跳ね返り係数1の場合、この物体はどこまで跳ね返るか。
⑩ 跳ね返る前後で力学的エネルギーが保存されている場合、跳ね返り係数はいくらか
⑪ 跳ね返り係数が1を超えることはありうるか

(5) 高さ3.2mよりボールを落とすと0.8mの高さまで跳ね返った。ボールは連続して跳ね返り、最後は水平面上に静止した。重力加速度の大きさを$10\mathrm{m/s^2}$として以下の問いに答えよ。((4)の結果を考慮して答えよ。)
① 跳ね返り係数はいくらか
② このボールが最初に地面に着地する直前の速さはいくらか
③ 地面に最初に落下するまでの時間は何秒か
④ ボールが地面から跳ね返った直後の速さはいくらか
⑤ 最高点に達するまでの時間はいくらか
⑥ 再び落下してくるまでの時間は何秒か
⑦ 2回目に跳ね返った後の最高点の高さと跳ね返ってから再び落下してくるまでの時間を求めよ。
⑧ 2回目の衝突後の最高点の高さと再び落下してくるまでの時間は1回目の衝突後に比べてそれぞれ何倍になっているか
⑨ n回目の衝突後の最高点の高さと再び落下してくるまでの時間をnを用いて表せ。
⑩ このボールが水平面上で静止するまでの時間はいくらか

$$1+r+r^2+r^3+\cdots=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} r^{k-1}=\frac{1}{1-r}$$ ($r<1$)を用いてよい。

(6) 20m/sで動いているボールが滑らかな水平面上に水平面から60°の角度で衝突したところ右図のように30°の角度で跳ね返った。これに関して以下の問いに答えよ。



① 衝突前のボールの速度の水平成分と鉛直成分の大きさを求めよ。
② 衝突後のボールの速度の水平成分を求めよ
③ 衝突後のボールの鉛直成分を求めよ。

④ $\frac{1}{2}mv^2$ ⑤ mgh

⑥ エネルギー保存則より $\frac{1}{2}mv^2=mgh$ これより、$v=\sqrt{2gh}$

⑦ 跳ね返り係数は衝突前後の速さの比なので、

$$e=\frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gH}}=\sqrt{\frac{h}{H}}$$

⑧ ⑦より$e=0$となるのは$h=0$のとき、よって、衝突後水平面にくっついてしまう様な衝突。
完全非弾性衝突という。
⑨ $e=1$の場合は$H=h$となるときである。よって、同じ高さまで跳ね返る。
弾性衝突という。
⑩ $e=1$のときは同じ高さまで跳ね返り、この場合、エネルギーが保存されていることになる。よって、エネルギー保存則が成立しているのは跳ね返り係数が1のときとなる。
⑪ 跳ね返り係数が1を超えるときは、落とした高さ以上に跳ね返らなければならない。この場合、最初より多くのエネルギーを持っていることになり、どこかでエネルギーの補給がなければありえないことである。よって、エネルギー保存則の観点から考えて、跳ね返り係数が1を超えることはありえない。

(5) ① $e=\sqrt{\frac{0.8}{3.2}}=0.5$

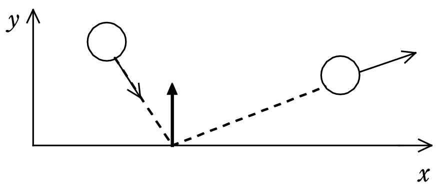
② エネルギー保存則より質量をmとして $\frac{1}{2}mv^2=m\times10\times3.2$ $v=8\mathrm{m/s}$

③ 1秒間に10m/sだけ速くなるので、8m/s速くなるには0.8s
あるいは $3.2=\frac{1}{2}\times10\times t^2$として計算しても良い。

④ 跳ね返り係数0.5なので、衝突後の速さは$8\mathrm{m/s}\times0.5=4\mathrm{m/s}$
⑤ 初速4m/sで投げ上げ、この速さが0になったときが最高点である。
1秒当たり10m/sだけ遅くなるので、0.4秒後最高点に達する。
⑥ 最高点まで0.4秒なので、再び落下するまで0.8秒
⑦ 跳ね返り係数0.5は変わらないので、跳ね返った後の高さは常に最初の高さの$0.5^2=0.25$倍である。1回目衝突後0.8mまで跳ね返っているので、
$0.8\times0.25=0.2\mathrm{m}$
速さは衝突たびに0.5倍になるので、最高点までの時間や落下してくるまでの時間も0.5倍になる。よって、0.4秒
⑧ 高さは0.25倍、時間は0.5倍
⑨ ボールから手を離す 0.8秒 第1回目の衝突 0.8秒 第二回目の衝突 0.4秒
第3回目の衝突 0.2秒 第4回目の衝突 0.1秒
のように時間経過している。よって、静止するまでの時間は

④　この水平面とボールの跳ね返り係数を求めよ。

(7)　xy平面上のx軸に沿って滑らかな水平面がある。跳ね返り係数e、質量mの物体が$\begin{pmatrix} v_x \\ -v_y \end{pmatrix}$で成分表示される速度で水平面にぶつかって跳ね返った。



これについて、以下の問いに答えよ。

①　衝突後の物体の速度を成分表示せよ。

②　この衝突においてこの物体が水平面から受けた力積を成分表示せよ。

③　力積の方向はどの方向か

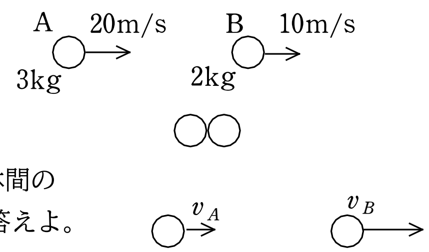
④　衝突前後の速度と力積の内積をそれぞれ計算せよ。

⑤　衝突前に対する衝突後の速度の力積との内積の比の絶対値は何を示しているか。

６．直線上の物体の運動量

(1)　20m/sで右向きに動いている3kgの物体Aが前方を右向きに10m/sで進んでいた2kgの物体Bに真後ろから衝突した。

　衝突後Aはv_Am/s、Bはv_Bm/sでともに右向きに進んだとする。右向きを正として両物体間の跳ね返り係数は0.5であるとして、以下の問いに答えよ。



①　衝突前のA,Bの運動量合計はいくらか

②　衝突後の運動量合計をv_A、v_Bを用いて表せ。

③　この衝突における運動量保存則の式を立てよ。

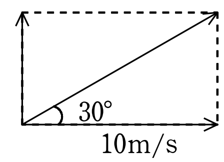
$0.8+0.8+0.4+0.2+0.1+\cdots$

$=0.8+0.8\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \right)=0.8+0.8\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.4$秒後

(6)　①　水平成分　$20\cos 60°=10\,\mathrm{m/s}$　鉛直成分　$20\sin 60°=10\sqrt{3}\,\mathrm{m/s}$

②　水平面が滑らかなので、衝突前後でボールの水平方向の速さは変わらない。
10m/s

③　鉛直成分をyとすると、$\tan 30°=\frac{y}{10}$



これより、$y=\frac{10}{3}\sqrt{3}\,\mathrm{m/s}$

④　鉛直方向成分は衝突前が　$10\sqrt{3}\,\mathrm{m/s}$

衝突後が$\frac{10}{3}\sqrt{3}\,\mathrm{m/s}$

なので、跳ね返り係数は　$e=\frac{\frac{10}{3}\sqrt{3}}{10\sqrt{3}}=\frac{1}{3}=0.3$

(7)　①　滑らかな水平面なので、x成分は同じで、y成分は逆向きでe倍である。よって、

$\begin{pmatrix} v_x \\ ev_x \end{pmatrix}$

②　力積は運動量の差である。$\begin{pmatrix} v_x \\ ev_y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} v_x \\ -v_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ (e+1)v_y \end{pmatrix}$

③　力積のx成分が0なので、y軸正の方向（水平面に垂直）である。

④　衝突前　$\begin{pmatrix} v_x \\ -v_y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ (e+1)v_y \end{pmatrix}=-(e+1){v_y}^2$

衝突後　$\begin{pmatrix} v_x \\ ev_x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ (e+1)v_y \end{pmatrix}=e(e+1){v_y}^2$

⑤　比を求めると　$\frac{e(e+1){v_y}^2}{-(e+1){v_y}^2}=-e$　よって、絶対値は跳ね返り係数である。

解説

(1)　①　$3\times20+2\times10=80\,\mathrm{kgm/s}$　　②　$3v_A+2v_B$

③　$3v_A+2v_B=80$

④　$20-10=10\,\mathrm{m/s}$　⑤　v_A-v_B　　⑥　$-\frac{v_A-v_B}{10}$

⑦　跳ね返り係数の式は　$-\frac{v_A-v_B}{10}=0.5$　これは、$v_B-v_A=5$

$\begin{cases} 3v_A+2v_B=80 \\ v_B-v_A=5 \end{cases}$　これを解くと　$v_A=14\,\mathrm{m/s}$　$v_B=19\,\mathrm{m/s}$

(2)　①　相対速度は相手の速度－自分の速度なので、$u-V$となる。

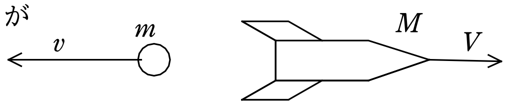
④　衝突前の物体Bから見たAの相対速度はいくらか

⑤　衝突後の物体Bから見たAの相対速度をv_A、v_Bを用いて表せ。

⑥　跳ね返り係数をv_A、v_Bを用いて表せ。

⑦　v_A、v_Bを求めよ。

(2)　右図のように質量M[kg]のロケットが速さV[m/s]で右向きに進んでいる。このロケットはm[kg/s]の燃料をロケットから見た速さv[m/s]で反対方向に噴射した。右向きを正として以下の問いに答えよ。



・　このロケットが質量mの燃料を瞬間的に噴射したと考える。

①　燃料の地上基準の速度をuとしたとき、地上から見た燃料の速度をu,Vで表せ。

②　ロケットから見た燃料の速度をvで表せ。（vは速さである）

③　地上から見た燃料速度をV,vで表せ。

④　燃料噴射前のロケット＋燃料の運動量合計をM,m,Vで表せ

⑤　燃料噴射後のロケットの速さを$V+\Delta V$とするとき、1秒間燃料噴射後のロケットと燃料の運動量合計を$M,m,v,V,\Delta V$で表せ。

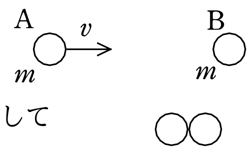
⑥　④⑤より、ΔVをM,m,vで表せ。

⑦　このロケットは1秒間にm[kg]の燃料を噴射している。このロケットの加速度はいくらか

⑧　$M>>m$として、ロケットの推力を求めよ

⑨　地上に垂直に設置されたこのロケットが浮上するためにはmはいくら以上でなければならないか。重力加速度の大きさをgとして答えよ。

(3)　静止している質量mの物体Bに同じ質量mの物体Aが速度vで衝突した。衝突後物体は直線上を運動し、この衝突は弾性衝突であるとし、衝突後のA,Bの速度に関して以下の問いに答えよ。



①　衝突前の物体A、Bの運動量の和はいくらか

②　衝突後のAの速度をv_A、Bの速度をv_Bとするとき、衝突後の運動量の和をv_A、v_Bで表せ。

③　運動量保存則を表す方程式をv_A、v_Bで表せ。

④　弾性衝突するときの跳ね返り係数はいくらか

⑤　衝突前のBから見たAの相対速度はいくらか。vで表せ。

⑥　衝突後のBから見たAの相対速度をv_A、v_Bで表せ。

⑦　跳ね返り係数を表す方程式をv_A、v_Bで表せ。

⑧　v_A、v_Bを求めよ。

⑨　静止している、質量の等しい物体に弾性衝突した後の両物体の速度にはある特徴が

②　速さvが左向きなので、速度は$-v$

③　①②より、$-v=u-V$　より、$u=V-v$

④　噴射前は燃料も速さVで動いているので$(M+m)V$

⑤　噴射後の運動量は　$M(V+\Delta V)+mu=M(V+\Delta V)+m(V-v)$

⑥　運動量保存則より　$M(V+\Delta V)+m(V-v)=(M+m)V$

これより、$M\Delta V=mv$　よって、$\Delta V=\dfrac{m}{M}v$

⑦　ΔVは1秒間の速度増加分なので、これが加速度である。よって、$\dfrac{m}{M}v$

⑧　$F=ma$よりロケットの推力は$F=M\times\dfrac{m}{M}v=mv$

⑨　これがロケットにかかる重力よりも大きくなった場合にロケットは浮上する。

よって、$mv>Mg$　これより　$m>\dfrac{Mg}{v}$

(3)　①　mv　②　mv_A+mv_B　③　$mv_A+mv_B=mv$　④　1　⑤　v

⑥　v_A-v_B　⑦　$-\dfrac{v_A-v_B}{v}=1$

⑧　$\begin{cases} mv_A+mv_B=mv \\ -\dfrac{v_A-v_B}{v}=1 \end{cases}$　これを解くと　$v_A=0$　$v_B=v$

⑨　速度が入れ替わっている。

⑩　質量が等しくて速度が入れ替わっているのみであるから、エネルギー保存則は成立している。

ある。それは何か答えよ。

⑩　力学的エネルギー保存則が成立していることを確認せよ。

７．平面上の衝突

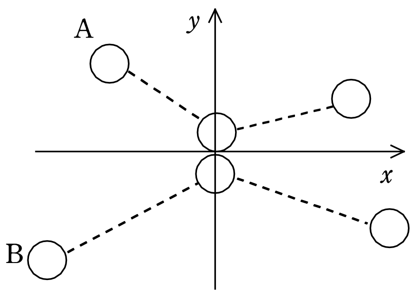
(1)　右図は質量2kg、速度$\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$m/sの物体A

と質量4kg、速度$\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$m/sの物体Bが

原点で衝突し、物体AはBから

力積$\begin{pmatrix}0\\12\end{pmatrix}$Nsを受けたとする。

以下の問いに答えよ。



①　物体BがAから受ける力積をベクトル成分表示せよ。

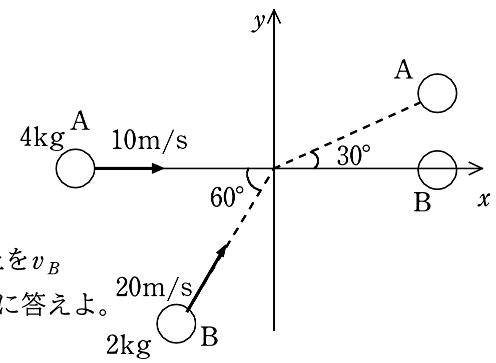
②　物体A,Bの衝突後の運動量をそれぞれ成分表示せよ。

③　物体A,Bの衝突後の速度をそれぞれ成分表示せよ。

④　速度のx成分は衝突によってどう変化しているか答えよ。

⑤　この衝突はy方向で跳ね返っているので跳ね返り係数は速度のy成分のみで求められる。跳ね返り係数を求めよ。

(2)　xy平面上を原点に向けてx軸上を正の方向に4kgの物体Aが10m/sで移動しており、質量2kgの物体Bがx軸から60°の方向に原点に向けて20m/sで移動していた。この二物体はやがて、原点で衝突し、物体Aはx軸から30°の方向へv_A、物体Bはx軸上をv_Bで移動した。これに関して以下の問いに答えよ。



①　物体A、Bの運動量のx方向成分の衝突前の和を求めよ。

②　衝突後の物体A、Bの運動量のx方向成分の和をv_A、v_Bで表せ。

③　x方向成分で運動量保存則による方程式を立てよ。

④　物体A、Bの衝突前の運動量のy方向成分の和を求めよ。

⑤　衝突後の物体A、Bの運動量のy方向成分の和をv_Aで表せ。

⑥　y方向成分で運動量保存則による方程式を立てよ。

⑦　v_A、v_Bを求めよ。

解説

(1)　①　Aが受ける力積とBが受ける力積は逆向きである。よって、$\begin{pmatrix}0\\-12\end{pmatrix}$Ns

②　運動量の差が力積である。

物体Aの衝突後の運動量＝衝突前の運動量＋力積

$$=2\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$$

物体Bは　$4\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\-4\end{pmatrix}$

③　運動量を質量で割れば速度である。

A　$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$　B　$\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$

④　速度のx成分は変化していない。

⑤　衝突前にBからAを見た相対速度のy成分は$-4-2=-6$m/s

衝突後にBからAを見た相対速度のy成分は$2-(-1)=3$m/s

跳ね返り係数は　$e=-\dfrac{3}{-6}=0.5$

(2)　①　$4\times10+2\times20\cos60°=60$kgm/s

②　$4v_A\cos30°+2v_B=2\sqrt{3}\,v_A+2v_B$

③　$2\sqrt{3}\,v_A+2v_B=60$

④　$2\times20\sin60°=20\sqrt{3}$ kgm/s

⑤　$4\times v_A\sin30°=2\sqrt{3}\,v_A$

⑥　$2\sqrt{3}\,v_A=20\sqrt{3}$

⑦　⑥より、$v_A=10$m/s　$v_B=(30-10\sqrt{3})$m/s

(3)　①　ベクトル成分をそのまま計算すればよい。

$$2\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\2\end{pmatrix}$$

②　$2\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+10\\y+4\end{pmatrix}$

③　運動量の和は保存されるので、$\begin{pmatrix}x+10\\y+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\2\end{pmatrix}$

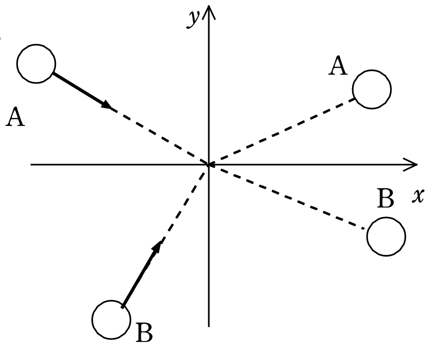
これより、$x=4$m/s、$y=-2$m/s

④　力積は運動量の差である。

AがBから受けた力積＝Aの衝突後の運動量－Aの衝突前の運動量

$$=2\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\10\end{pmatrix}$$

(3)　物体Aは質量2kgで衝突前の速度が$\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$m/s
で成分表示され、物体Bは質量1kgで
速度が$\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$m/sで成分表示されるとする。
この2物体が原点で衝突した後、物体A
の速度が$\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$で表される速度になっていた。
これに関して以下の問いに答えよ。



①　衝突前の物体A,Bの運動量の和をベクトル成分で表せ。

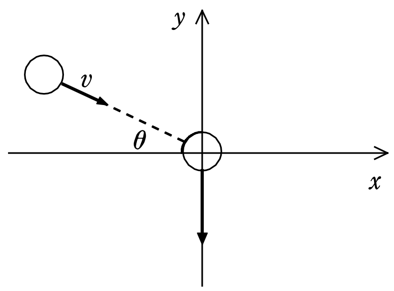
②　衝突後の物体Bの速度を$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$とするとき、衝突後の運動量の和を$x,y$を用いたベクトル成分で表せ。

③　運動量保存則を用いてx,yを求めよ。

④　物体BがAから受けた力積、及びAがBから受けた力積をベクトル成分で表せ。

⑤　④の両者の力積の間にどのような関係があるか

(4)　xy平面上の原点に静止している質量m
の物体Bにx軸負の方向より角度θだけy軸より
の方向から質量の等しい物体Aが速さvで
飛んできて衝突した。衝突後、物体Bは
y軸負の方向に飛んでいった。この衝突は
弾性衝突であったとして以下の問いに答えよ。



①　衝突前の物体A,Bの運動量合計のx成分、y成分を求めよ。

②　衝突後の物体Aの速度のx成分をv_x、y成分をv_y、物体Bの速さをv_Bとするとき、衝突後の物体A,Bの運動量合計をv_x、v_y、v_Bで表せ。

③　運動量保存則による方程式をx,yそれぞれの成分で立てよ。

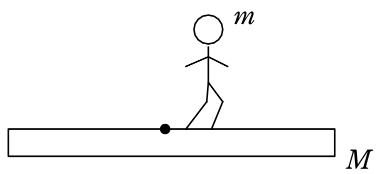
④　この衝突は弾性衝突なので、エネルギー保存則が成立している。衝突前後の運動エネルギーを用いてエネルギー保存則による方程式をv、v_x、v_y、v_Bで表せ。

⑤　③④の方程式を解いてv_x、v_y、v_Bをv、θで表せ。

⑥　静止している物体に質量の等しい物体が弾性衝突したとき、衝突後の二物体の運動方向にある法則がある。どのような法則か答えよ。

８．運動量保存則と重心

(1)　滑らかな水平面上に質量Mの板が
置いてある。この板の中央に質量mの
人が静かに乗った。しばらくしてから
この人は右方向に一定の加速度aで歩き
出した。最初の重心の位置を原点とし



BがAから受けた力積＝Bの衝突後の運動量－Bの衝突前の運動量

$=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-10\end{pmatrix}$

⑤　逆向きで同じ大きさ

(4)　①　x成分　$mv\cos\theta$　y成分　$-mv\sin\theta$

②　x成分　mv_x　y成分　$-mv_B+mv_y$

③　x成分　$mv_x=mv\cos\theta$　y成分　$-mv_B+mv_y=-mv\sin\theta$

簡単にして

x成分　$v_x=v\cos\theta$　y成分　$-v_B+v_y=-v\sin\theta$

④　$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv_x{}^2+\frac{1}{2}mv_y{}^2+\frac{1}{2}mv_B{}^2$

簡単にして

$v^2=v_x{}^2+v_y{}^2+v_B{}^2$

⑤　③より$v_y=v_B-v\sin\theta$、$v_x=v\cos\theta$を④に代入して

$v^2=(v\cos\theta)^2+(v_B-v\sin\theta)^2+v_B{}^2$

$=v^2\cos^2\theta+v_B{}^2-2vv_B\sin\theta+v^2\sin^2\theta+v_B{}^2$

これより、　$v_B=v\sin\theta$、$v_x=v\cos\theta$、$v_y=0$となる。

⑥　$v_y=0$なので、物体Aはx軸に沿って動くことが分かる。

衝突後の物体は互いに直角方向に進むといえる。

解説

(1)　①　板の中央（原点）

②　初速度0なので、$v=at$、$x=\frac{1}{2}at^2$

③　運動方程式より$F=ma$

④　③の反作用なので、$-ma$

右方向に距離を測る（右方向が正）として以下の問いに答えよ。

① この人と板の最初の共通重心はどこか。

② この人が動き始めてからの時間t後のこの人の速度vと位置xをa,tで表せ。

③ この人が右向きに歩くときこの人が板から受けている力はいくらか

④ 板がこの人から受ける力（③の反作用）はいくらか

⑤ 板が動く加速度bを求めよ。

⑥ 人が動き始めてからの時間t後の板の速度Vと板の重心の位置Xをa,t,M,mで表せ。

⑦ この人と板の加速度の大きさの比、速さの比、移動した距離の比をそれぞれ求めよ。

⑧ ⑦の比にはどのような特徴があるか

⑨ 動き始めてから時間t後の共通重心の位置を求めよ。

⑩ この運動に関する共通重心の位置についてどのようなことがいえるか

(2) 数直線上の2点A(x_1)、B(x_2)に質量m_1、m_2の小物体が存在しており、ある時刻において、それぞれ速度v_1、v_2で運動しているものとする。また、二物体の共通重心をGとする。これに関して以下の問いに答えよ。

① AG：BGの距離の比をm_1、m_2で表せ。

② 重心Gの位置座標をm_1、m_2、x_1、x_2で表せ。（数学の内分公式を使うこと）

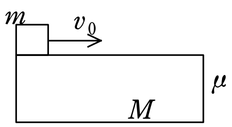
③ 物体が等速で動いているとして、1秒後の物体A、Bの位置座標をx_1、x_2、v_1、v_2で表せ。

④ 1秒後の重心の位置座標をx_1、x_2、v_1、v_2、m_1、m_2で表せ。

⑤ 1秒間の重心の位置変化（重心の速度）をv_1、v_2、m_1、m_2で表せ。

⑥ 運動量保存則が成立するとき（物体に外力が作用していないとき）重心の速度はどうなるか

(3) 右図のように滑らかな水平面上に質量M、長さlの板状物体を置き、その上に動摩擦係数μ、質量mの大きさが無視できる小物体に初速v_0をつけて板状物体の左端に置いた。小物体は次第に減速し、板状物体は次第に加速して、最終的には同じ速度となった。



板状物体は一様な材質でできており、その重心は物体の中央にあるものとし、最初、板状物体が静止しているときの左端（小物体を置いた位置）を基準とし、ここより左向きに距離を測るものとする。重力加速度の大きさをgとして、以下の問いに答えよ。

① 小物体に作用する重力、垂直抗力、動摩擦力の大きさ及び方向を答えよ。

② 板状物体に作用する重力、小物体からの垂直抗力、水平面からの垂直抗力、動摩擦力の大きさと方向をそれぞれ求めよ。

③ 小物体に関して運動方程式を立てて、小物体の加速度の大きさと方向を求めよ。

④ 板状物体に関して運動方程式を立てて、板状物体の加速度の大きさと方向を求めよ。

⑤ 小物体を板状物体の上においてからの時刻をtとするとき、時刻tにおける小物体の速度と位置（水平面を基準として測る）をv_0、μ、g、tで答えよ。

⑤ 運動方程式より $-ma=Mb$ $b=-\dfrac{m}{M}a$

⑥ 板の速度は $V=bt=-\dfrac{m}{M}at$

板の位置は $X=\dfrac{1}{2}bt^2=-\dfrac{1}{2}\dfrac{m}{M}t^2$

⑦ 加速度の大きさの比は $a:(-b)=a:\dfrac{m}{M}a=M:m$

速度の大きさの比は $v:(-V)=at:\dfrac{m}{M}at=M:m$

移動した距離の比は $x:(-X)=\dfrac{1}{2}at^2:\dfrac{1}{2}\dfrac{m}{M}t^2=M:m$

⑧ すべて質量の逆比で等しい

⑨ やはり原点 共通重心には外力が作用していないので、速度は変化しない。

人と板の位置座標から重心の位置を計算しても0となる。

⑩ 重心の位置は動かない。

「外力が作用しない限り共通重心の速度は変化しない」

運動量保存則は外力が作用していないときに成立しているので、運動量保存則が成立しているときはその重心は等速直線運動をしていることになる。

(2) ① 重心はモーメントのつりあいの位置である。つまり、距離AG、BGと重力m_1g、m_2gの積は等しくなり、距離比と質量比は逆比となる。よって、m_2：m_1

② 数学の内分公式より、$\dfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$

③ A x_1+v_1 B x_2+v_2

④ $\dfrac{m_1(x_1+v_1)+m_2(x_2+v_2)}{m_1+m_2}=\dfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}+\dfrac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$

⑤ 速度は1秒間の位置変化なので、上の式より、$\dfrac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$

重心の速度は重心の一座標の計算式と同じである。

重心の速度と加速度は微分を使えば簡単に求められる。

重心の位置座標$x=\dfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$ $v_1=\dfrac{dx_1}{dt}=x_1'$ $v_2=\dfrac{dx_2}{dt}=x_2'$

重心の速度$v=x'=\left(\dfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}\right)'=\dfrac{m_1x_1'+m_2x_2'}{m_1+m_2}=\dfrac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$

Aの加速度をa_1、Bの加速度をa_2とするとき、$a_1=\dfrac{dv_1}{dt}$、$a_2=\dfrac{dv_2}{dt}$

重心の加速度$a=v'=\left(\dfrac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}\right)'=\dfrac{m_1v_1'+m_2v_2'}{m_1+m_2}=\dfrac{m_1a_1+m_2a_2}{m_1+m_2}$

重心の速度も加速度も共通重心の式と同じとなる。

⑥　板状物体の時刻tにおける重心の位置と速度をM、m、g、μ、tで表せ。

⑦　板状物体の上で小物体が静止する（二物体の速度が一致）ときの時刻tを求めよ。

⑧　板状物体上で小物体が一致したときの両物体の速度を求めよ。

(4)　(3)と同じ問題で以下の問いに答えよ。

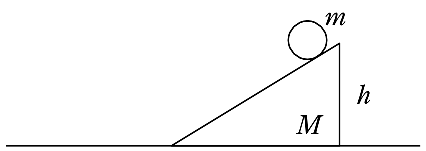
①　小物体を板状物体に乗せた瞬間の両物体の運動量の和をm、v_0で表せ。

②　一体になった後の両物体の速度をVとしたとき、一体になった後の運動量の和をM、m、Vで表せ。

③　①②よりVを求めよ。

９．運動量保存則とエネルギー保存則

(1)　滑らかな水平面上に質量Mの三角台を静かに設置し三角台の高さhのところに質量mの滑らかな小物体を静かに置いた。両物体は互いに逆向きに動きはじめ、小物体、三角台の速さはそれぞれv、Vになったとし、質量mの小物体は斜面から水平面に滑らかに移動するものとする。重力加速度の大きさをgとし、右方向を正として以下の問いに答えよ。



①　三角台の上に質量mの小物体を置いた瞬間の両物体の水平方向の運動量の和はいくらか。

②　小物体が台から降りた後の小物体の速度をvで表せ。

⑥　重心の速度の式$\dfrac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$の分子は運動量の和である。運動量保存則が成立するときは分子が一定なので、速度は一定となる。

(3)　①　重力：mg　下向き、垂直抗力：mg　上向き、動摩擦力：μmg　左向き。

動摩擦力の方向は速度変化によって考える。減速するので左向き

②　重力：Mg　下向き、

小物体からの垂直抗力：mg　下向き（小物体に作用する垂直抗力の反作用）、

水平面からの垂直抗力：$Mg+mg$　上向き、

動摩擦力：μmg　右向き（板状物体は加速するため）

③　$-\mu mg=ma$　より　$a=-\mu g$　（右向きを正とする）

④　$\mu mg=Ma'$　より、$a'=\mu\dfrac{m}{M}g$

⑤　速度は　$v=v_0+at$より、$v=v_0-\mu gt$

位置は　$x=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$より、$x=v_0t-\dfrac{1}{2}\mu gt^2$

⑥　速度は　$v'=\mu\dfrac{m}{M}gt$　位置は　$x'=\dfrac{1}{2}\mu\dfrac{m}{M}gt^2$

⑦　速度が等しくなるときであるから⑤⑥より、

$v_0-\mu gt=\mu\dfrac{m}{M}gt$　これより、$t=\dfrac{Mv_0}{\mu g(M+m)}$

⑧　⑤に代入して$v'=\mu\dfrac{m}{M}gt=\mu\dfrac{m}{M}g\dfrac{Mv_0}{\mu g(M+m)}=\dfrac{Mmv_0}{M+m}$

(4)　①　mv_0

②　$(M+m)V$

③　運動量保存則より　$mv_0=(M+m)V$　よって、$V=\dfrac{Mmv_0}{M+m}$

運動量保存則の問題は運動方程式と加速度三公式でも解くことができることが多いが運動量保存則を用いたほうがはるかに簡単となる。

解説

(1)　①　両方とも静止しているので、0

②　小物体は左向きに動いているので速度は$-v$（右向きを正としている）

③　運動量は質量と速度の積である。よって、$-mv$

④　右向きなのでV

⑤　運動量はMV

⑥　水平方向には外部から力がかかっていないので、運動量保存則は成立している。鉛直方向は重力が作用しており、重力の影響により物体が加速しているので、外力（重力）が作用していることになり、運動量保存則は成立していない。

⑦　$MV-mv=0$

③　小物体が台から降りた後の小物体の運動量をm,vで表せ。

④　小物体が台から降りた後の三角台の速度をVで表せ。

⑤　小物体が台から降りた後の三角台の運動量をM,Vで表せ。

⑥　小物体と三角台の運動において水平方向、鉛直方向の運動量の和は保存されているかいないか、それぞれについて判断せよ。

⑦　水平方向に関する運動量保存則の式を立てよ。

⑧　小物体が高さhの位置にあるとき、水平面を基準としたこの小物体の重力による位置エネルギーはいくらか。m,g,hで表せ。

⑨　小物体が三角台から降りた後の両物体の運動エネルギーの和はいくらか。M,m,v,Vで表せ。

⑩　⑧⑨より、この物体の運動においてエネルギー保存則の式を立てよ。

⑪　⑦⑩を解くことによりv,VをM,m,hで表せ。

(2)　(1)と同じ水平面、小物体、三角台において水平面上に静止している三角台に小物体を初速度v_0で近づけた。この状態を図１とする。

小物体は三角台の上に乗り、やがて最高点（水平面からの高さh）に達する。このときの三角台の速度をVとする。この状態が図２である。小物体は再び斜面を滑り降り、小物体、三角台それぞれ別の速度v、v'となった。この状態が、図3である。

重力加速度の大きさをgとして、以下の問いに答えよ。

図１

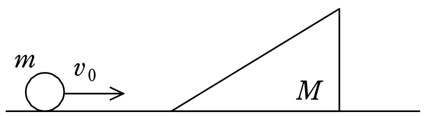


図２

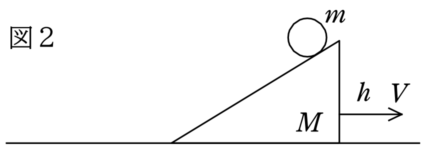
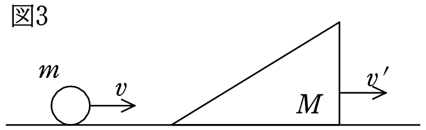


図3



・ 図1において

①　二物体が衝突する前の運動量の和をm、v_0で表せ。

②　二物体が衝突する前の運動エネルギーの和をm、v_0で表せ。

・ 図２において

③　小物体が最高点に達したときの小物体の速度の鉛直方向成分、水平方向成分を求めよ。

④　小物体が最高点に達したときの小物体と三角台の運動量の和をm、M、Vで表せ。

⑤　小物体が最高点に達したときの小物体と三角台の力学的エネルギーの和をm、M、V、hで表せ。

⑥　図１の状態と図２の状態において運動量保存則の式を立てよ。

⑦　図１の状態と図２の状態においてエネルギー保存則の式を立てよ。

⑧　図１の状態と図２の状態においては跳ね返り係数がいくらの衝突と同じ運動と考えられるか

⑨　⑥⑦を連立させてV,hを求めよ。

⑧　mgh　　⑨　$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}MV^2$

⑩　$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}MV^2=mgh$

⑪　⑦より、$V=\frac{M}{m}v$　⑩に代入して　$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}M\left(\frac{M}{m}v\right)^2=mgh$

これを解くと、$v=\sqrt{\frac{2mgh}{M+m}}$、$V=\frac{M}{m}\sqrt{\frac{2mgh}{M+m}}$

(2)　①　三角台は静止しているので小物体のみの運動量となる　mv_0

②　①と同じく　$\frac{1}{2}mv_0{}^2$

③　最高点に達したときは鉛直方向の速度は0である。
水平方向がVと異なれば、三角台との間に相対速度があることになり、小物体が斜面上をあがるか下がるかすることになるので、相対速度は0。よって、水平成分はV

④　両物体ともに速度Vなので、$(M+m)V$。

⑤　$\frac{1}{2}(M+m)V^2+mgh$

⑥　$(M+m)V=mv_0$

⑦　$\frac{1}{2}(M+m)V^2+mgh=\frac{1}{2}mv_0{}^2$

⑧　相対速度が0になっているので両物体が合体する。完全非弾性衝突に当たる。
よって、跳ね返り係数０

⑨　⑥より、$V=\frac{mv_0}{M+m}$　　$h=\frac{1}{2}\frac{M}{g(M+m)}v_0{}^2$

⑩　$mv+Mv'$

⑪　$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}Mv'^2$

⑫　エネルギーがすべて運動エネルギーとして保存されているので、弾性衝突である。
よって、跳ね返り係数1

⑬　$-\frac{v-v'}{v_0}=1$

⑭　$mv+Mv'=mv_0$

⑮　$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}Mv'^2=\frac{1}{2}mv_0{}^2$

⑯　⑬⑭を解くと、$v=\frac{m-M}{M+m}v_0$　$v'=\frac{2m}{M+m}v_0$

⑰　$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}Mv'^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{m-M}{M+m}v_0\right)^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{2m}{M+m}v_0\right)^2=\frac{1}{2}mv_0{}^2$

⑱　vは右向きが正なので、左向きの場合は$v<0$である。よって、$v=\frac{m-M}{M+m}v_0<0$

・ 図３において

⑩　小物体が再び三角台から降りたときの二物体の運動量の和をm,M,v,v'で表せ。

⑪　小物体が再び三角台から降りたときの二物体の力学的エネルギーの和をm,M,v,v'で表せ。

⑫　図１に対する図３の運動は跳ね返り係数いくらの衝突と考えることができるか

⑬　跳ね返り係数の式をv,v',v_0で表せ。

⑭　図１の状態と図３の状態で運動量保存則の式を立てよ。

⑮　図１の状態と図３の状態で力学的エネルギー保存則の式を立てよ。

⑯　⑬⑭を連立してv,v'を求めよ。

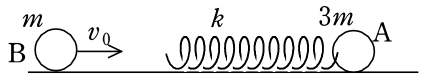
⑰　⑯で求めたv,v'について、⑮式が成立していることを確認せよ。

⑱　図３において小物体が左向きに動く場合、Mとmの大小関係はどうなっているのか

⑲　図３において小物体が静止する場合はMとmがどういう関係にあるときか

(3)　質量$3m$の物体Aにばね定数kの軽いばねを取り付け、滑らかな水平面上に静かにおいた。この物体に質量mの物体を速度v_0でぶつけた。

このときの運動について以下の問いに答えよ。



①　衝突前の両物体の運動量の和をm,v_0で表せ。

②　衝突前の両物体の運動エネルギーの和を求めよ。

③　衝突の瞬間ばねが縮むが、ばねが最も縮んだ瞬間、二物体の速度はどういう関係になっているか

・ ばねが最も縮んだ瞬間について

④　ばね縮みをxとするとき、ばねにたまっている位置エネルギーはいくらか。

⑤　物体Aの速度をVとするとき、物体A、Bの力学的エネルギーの和をk,x,m,Vで表せ。

⑥　運動量の和をm,Vで表せ。

⑦　衝突前との間で運動量保存則の式を立てよ。

⑧　Vをv_0で表せ。

⑨　②⑤より力学的エネルギーの式を立てよ。

⑩　ばねの縮みxをm,v_0,kで表せ。

・ 再び物体Bがばねから離れた瞬間の物体Aの速度をv、Bの速度をv'とする。

⑪　運動量の和をm,v,v'で表せ。

⑫　衝突前の状態との間で運動量保存則の式を立てよ。

⑬　衝突前の状態との間でエネルギー保存則の式を立てよ。

⑭　衝突前との間での跳ね返り係数はいくらと考えられるか。

⑮　跳ね返り係数の式をv,v',v_0でたてよ。

⑯　⑫⑮を解くことによりv,v'をv_0で表せ。

これを解くと、$m<M$

⑲　静止であるから$v=0$なので、$v=\dfrac{m-M}{M+m}v_0=0$。よって、$m=M$

(3)　①　mv_0　②　$\dfrac{1}{2}mv_0{}^2$

③　Aの速度のほうが大きいと更に遠ざかり、Aの速度のほうが遅いと更に近づく。最も近づいているときが最も縮んでいるときなので、二物体の速度が等しいときとなる。

④　$\dfrac{1}{2}kx^2$

⑤　物体の速度が同じなので、Bの速度もV。よって、

$$\frac{1}{2}mV^2+\frac{3}{2}mV^2+\frac{1}{2}kx^2=2mV^2+\frac{1}{2}kx^2$$

⑥　$mV+3mV=4mV$

⑦　$4mV=mv_0$　⑧　$V=\dfrac{1}{4}v_0$

⑨　$2mV^2+\dfrac{1}{2}kx^2=\dfrac{1}{2}mv_0{}^2$

⑩　⑨より$\dfrac{1}{2}kx^2=\dfrac{1}{2}mv_0{}^2-2mV^2=\dfrac{3}{8}mv_0{}^2$　$x=\sqrt{\dfrac{3}{4}\dfrac{m}{k}}\,v_0$

⑪　$mv'+3mv$

⑫　$mv'+3mv=mv_0$

⑬　$\dfrac{1}{2}mv'^2+\dfrac{3}{2}mv^2=\dfrac{1}{2}mv_0{}^2$

⑭　エネルギーが運動エネルギーの状態で保存されているので跳ね返り係数は1

⑮　Aを基準とする相対速度で考えると、

$$-\frac{v'-v}{v_0}=1$$

⑯　⑫は$v'+3v=v_0$　⑮は　$v-v'=v_0$　これを解くと、　$v=\dfrac{1}{4}v_0$、$v'=\dfrac{3}{4}v_0$