

力のモーメントの基礎

37. 回転させる力

(1) 右図のように質量が無視できる長さ2の棒の中心を棒で支え天秤 (A)をつくった。

この状態でこの棒はつりあっている。

Bのように棒の左端に重さ1のおもりをつるとたちまち回転を始めた。このときの回転力

(力のモーメント) を1とする。

これについて以下の問いに答えよ。

① Cは右端にも同じ重さのおもりをつるところつりあった。右端のおもりの持つ回転力はいくらか

② Dは棒の左側はそのままにして右側のみ

腕の中央 (支点からの長さ $\frac{1}{2}$) の位置に重さ2のおもりをつるところつりあった。

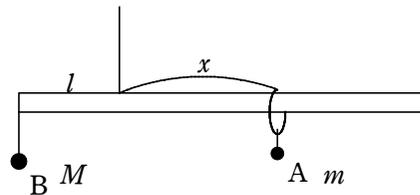
このおもりの回転力はいくらか

③ Eも支点の左側はそのままにして、右側のみ支点から $\frac{1}{3}$ のところにおもりをつるとつりあわせた。このときのおもりの重さはいくらか。また、そのときの回転力はいくらか

④ ここまでのA~Eの実験により、腕の長さ、おもりの重さ、回転力に下の表のような関係があることが分かった。回転力が同じ時に腕の長さとおもりの重さはどのような関係にあることが分かるか。また、回転力はおもりの重さ(力)と腕の長さをどういう計算すれば求められるか判断せよ。

腕の長さ	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
おもりの重さ	1	2	3
回転力	1	1	1

(2) 右の装置は天秤を利用して物体の質量を測る装置である。軽い棒の1箇所をひもでつるし支点とする。支点から離れた左端に測定したい物体Bをつるし



つりあうように質量 m のおもりAを左右に動かし、その位置でBの質量を測るものである。つりあった時のAの支点からの距離を x とする。重力加速度の大きさを g として以下の問いに答えよ。

① 物体Bの質量を M とするとき、重力の大きさはいくらか

② 物体Bの重力による力のモーメントはいくらか

③ 物体Aの重力による力のモーメントを x, m, g を用いて表わせ。

④ モーメントがつりあっていることを利用して物体Bの質量 M を x, m, l で表わせ。

解説

(1) ① Bの左側の回転力が1なので、Cも左側の回転力は1となる。Cはつりあっているので左右の回転力は等しくなっている。よって、右側の回転力も1である。

② 左側の回転力が1でつりあっているので右側の回転力も1である。

③ 重さ3でつりあう。回転力は1

④ 腕の長さとおもりの重さは反比例の関係にある。回転力は腕の長さとおもりの重さの積で求められる。

(2)

① Mg ② Mgl ③ mgx

④ $Mgl = mgx$ より、 $M = \frac{mx}{l}$

力のモーメントの基礎

38. 斜めの力に関する力のモーメント

力は速度を変化させるものであり、物体の速度変化が同じであれば力は同じであると判断する。物体の速度変化には並進と回転があり、同じ物体に対して、この二つの運動状態がまったく同じであれば同じ力が作用したと判断してよい。同一作用線上を動かした場合、力を合成・分解した場合、同一作用線上逆向き同じ大きさの力を付け加えたり取り去ったりした時は物体の運動状態は同じである。これらは同じ力と判断される。下の図は黒点を支点とする長さ l の軽い棒に力 F を様々な方向に加えたものである。

以下の問いに答えよ。

(1) 右図Aのように力が棒に対して直角に作用した時の力のモーメントはいくらか

(2) 右図Bは力 F が棒から角度 θ の方向に力がかかったものである。力を分解しても物体の速度変化は変わらないので同じ力である。

① 力 F を分解したときの水平成分と鉛直成分を求めよ。

② Bにおいて力 F の水平成分がこの棒に与える回転力(力のモーメント)はいくらか。

③ Bにおいて力 F の垂直成分がこの棒に与える力のモーメントはいくらか

④ Bにおいて力 F のモーメントはいくらか

(3) 力は同一作用線上に移動させても物体の運動状態に変化はない。そこで、力 F を同一作用線上に動かし、点Cから垂線をおろしその足をHとする。

① CHの距離はいくらか

② 力 F とCHが直角であることに注目し力 F のモーメントを求めよ。

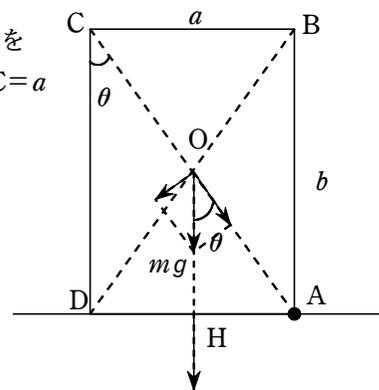
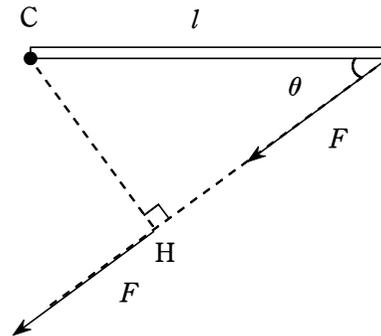
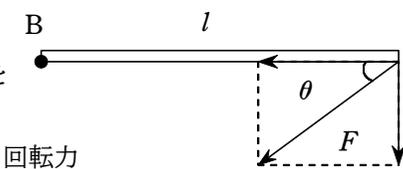
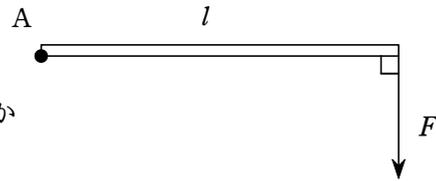
(4) (2)④、(3)②を比較することによりどのようなことが分かるか

(5) 一様な質量 m の直方体ABCDを床上に置き点Aを回転の中心とする重力 mg のモーメントを次の手順で計算することにした。AB= b 、BC= a である。以下の問いに答えよ。

・ 重力 mg を対角線AC方向とその直角方向に分解した。 $\angle ACD = \theta$ とする。

① 対角線の交点をOとするとき、AOの長さを a, b で表わせ。

② 重力のAOと直角成分の大きさを m, g, θ で表わせ。



解説

(1) $F l$

(2) ① 水平成分 = $F \cos \theta$ 垂直成分 = $F \sin \theta$

② 回転軸に向う方向に力を加えても物体は回転しない。よって 0

③ $F \sin \theta \cdot l = F l \sin \theta$

④ 水平方向のモーメントがないので垂直方向のモーメントが全体のモーメントである。 $F l \sin \theta$

(3) ① $l \sin \theta$

② $F \times CH = F l \sin \theta$

(4) 分解しても作用線上を動かしてもどちらでもモーメントは計算できる

(5) ① 三平方の定理より $\frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}$

② $m g \sin \theta$

③ $\sin \theta = \frac{AD}{AC} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

④ $AO \times m g \sin \theta = \frac{1}{2} a m g$

⑤ $\frac{1}{2} a$

⑥ 力の大きさは mg でAHと直角であるのでそのままかけると $\frac{1}{2} a m g$

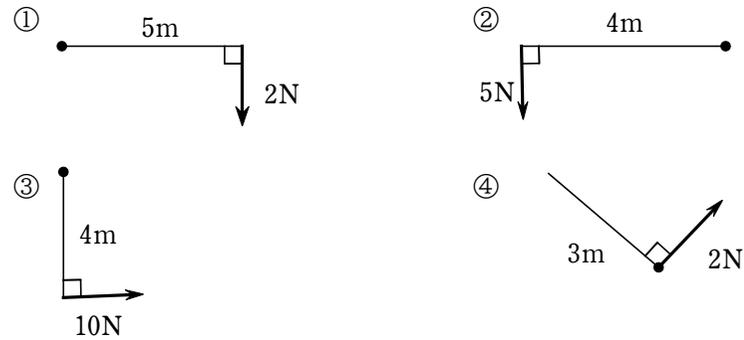
⑦ 作用線上を移動するほうが簡単

力のモーメントの基礎

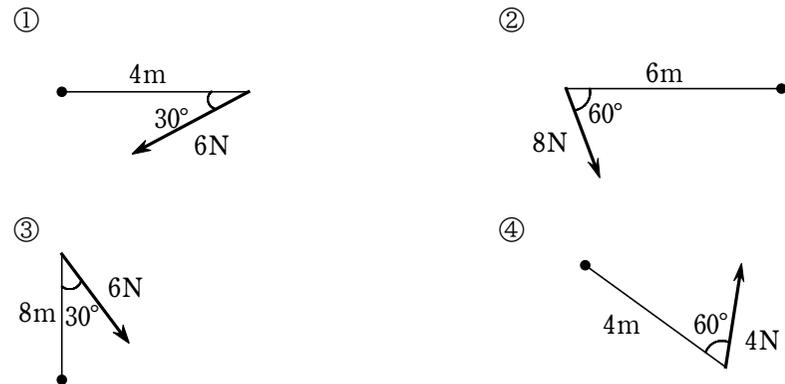
- ③ $\sin \theta$ を a, b で表わせ。
- ④ 点Aに対する重力のモーメントを a, m, g で表わせ。
 - ・ 重力を同一作用線上に動かし床面との交点Hを始点とした。
- ⑤ AHの距離はいくらか
- ⑥ 点Aに対する重力のモーメントを a, m, g で表わせ。
- ⑦ 力を分解してモーメントを求める方法と作用線上を移動してモーメントを求める方法とどちらが簡単か

39. モーメントの計算

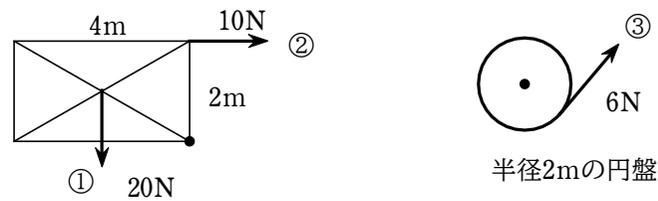
(1) 黒点が回転の中心である。カモーメントの大きさを求めよ。



(2) 次の場合の力のモーメントの大きさを求めよ。



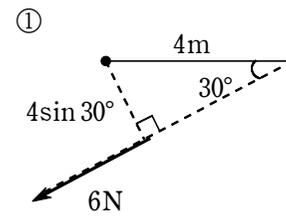
(3) 次の力のモーメントの大きさを求めよ。



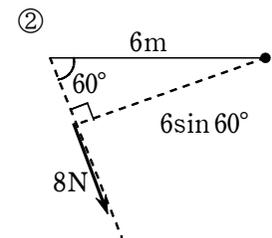
解説

- (1) ① $2 \times 5 = 10 \text{ Nm}$ ② $5 \times 4 = 20 \text{ Nm}$
 ③ $4 \times 10 = 40 \text{ Nm}$ ④ 0

(2)

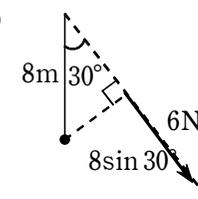


$6 \times 4 \sin 30^\circ = 12 \text{ Nm}$

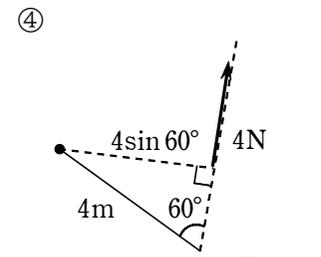


$8 \times 6 \sin 60^\circ = 24\sqrt{3} \text{ Nm}$

(3)

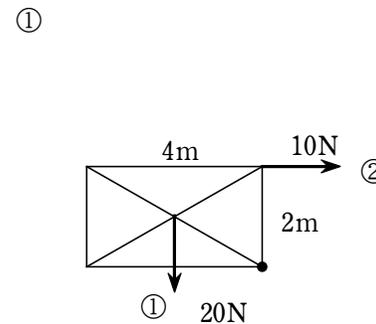


$6 \times 8 \sin 30^\circ = 24 \text{ Nm}$

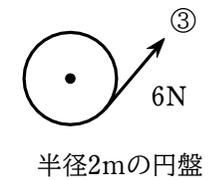


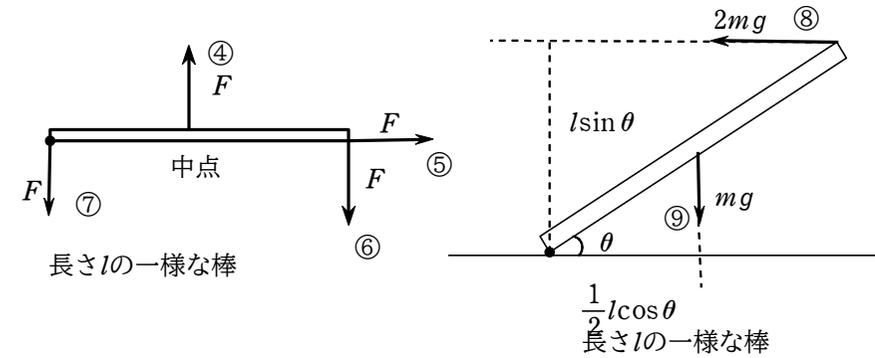
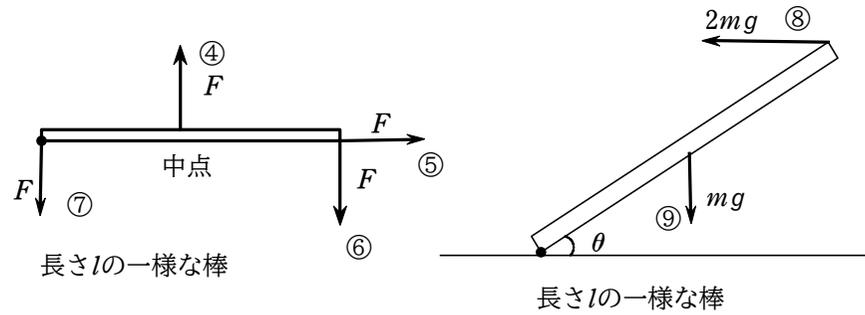
$4 \times 4 \sin 60^\circ = 8\sqrt{3} \text{ Nm}$

(3)



(3)





- ① $20\text{N} \times 2\text{m} = 40\text{Nm}$ ② $10\text{N} \times 2\text{m} = 20\text{Nm}$ ③ $6\text{N} \times 2\text{m} = 12\text{Nm}$
- ④ $F \times \frac{1}{2}l = \frac{1}{2}Fl$ ⑤ 作用線上に回転軸があるので 0
- ⑥ $F \times l = Fl$ ⑦ 0 ⑧ $2mg \times l \sin \theta = 2mgl \sin \theta$
- ⑨ $mg \times \frac{1}{2}l \cos \theta = \frac{1}{2}mgl \cos \theta$

解説

- (1) ① $\triangle AA'C$ と合同なので、水平成分は f 、垂直成分は f_1
- ② $\triangle BB'D$ と合同なので、水平成分は f 、垂直成分は f_2
- ③ 水平成分は互いに打ち消しあうので、垂直成分の大きさの和になる。
下向きに $f_1 + f_2$
- (2) ① $\triangle APH \sim \triangle A'AC$ より、 $AH : PH = f : f_1$
- ② $\triangle BPH \sim \triangle B'BD$ より、 $BH : PH = f : f_2$
- ③ $AH : PH = f : f_1 = f f_2 : f_1 f_2$
 $BH : PH = f : f_2 = f f_1 : f_1 f_2$
これより、 $AH : BH = f f_2 : f f_1 = f_2 : f_1$
- ④ ③より、 $AH f_1 = BH f_2$ になるので、モーメントが等しくなる。
- (3) A、Bの力はP点で合成できたので、大きさは $f_1 + f_2$ 、方向は下向き、作用点はP（あるいはH）である。

40. 平行力の合成

力とは物体の速度を変化させるものである。同じ物体の運動状態が同じであれば同じ力が作用していると判断してよい。下の2本の力を加えた場合と同じ運動をさせる1本の力があればその力は合成された力ということができる。

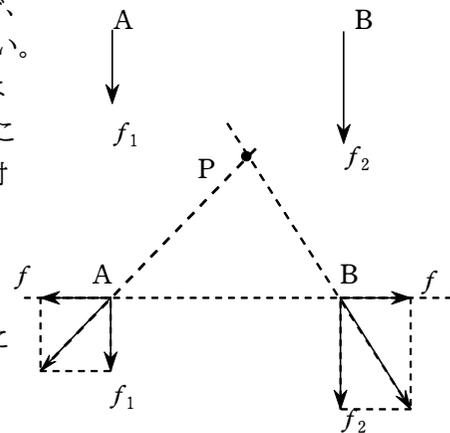
- ・ 同一作用線上を移動させても物体の運動状態は変化しない
- ・ 力を合成分解しても物体の運動状態は変化しない
- ・ 同一作用線上逆向き同じ大きさの力を勝手に付け加えても取り去っても物体の運動状態は変化しない

以上の点に注目して平行力を合成することを考えてみよう。

2本の力は始点が一致すれば合成できるので、作用線の交点に力を移動させて合成すればよい。しかし、右図のような平行な2本の力 f_1 、 f_2 は作用線上を動かしても始点が一致しない。そこで、同一作用線上逆向き同じ大きさの力 f を付け加えると、この2本の力は合成可能となる。

合成した二本の力の作用線の交点をPとする。合成した2本の力を作用線上にP点に移動しそれぞれを水平方向と鉛直方向に分解する。

Pから線分ABにおろした垂線の足をHとし、A'、B'、C、Dを右下の図のように設定した。



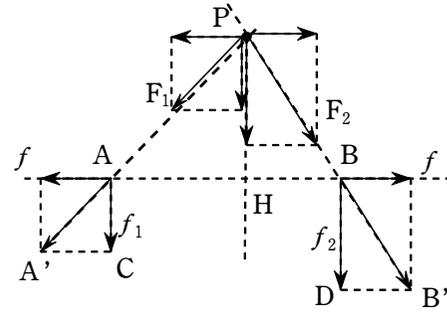
- (1) P点に移動したAA'の力を F_1 、BB'をP点に移動した力を F_2 として以下の問いに答えよ。

力のモーメントの基礎

- ① F_1 の水平成分、鉛直成分の大きさを答えよ。
- ② F_2 の水平成分、鉛直成分を答えよ。
- ③ F_1 、 F_2 を合成した力の大きさと方向を答えよ。

(2) $\triangle APH$ と $\triangle BPH$ について以下の問いに答えよ。

- ① $AH : PH$ を f 、 f_1 を用いて表わせ。
- ② $BH : PH$ を f 、 f_2 を用いて表わせ。
- ③ $AH : BH$ を f_1 、 f_2 を用いて表わせ。
- ④ 点Hを中心とする f_1 、 f_2 のモーメントの大きさはどういう関係にあるか



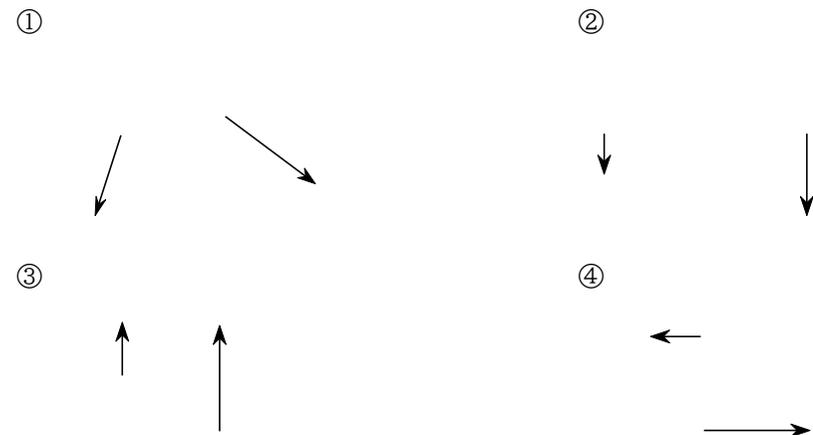
(3) 平行力 f_1 、 f_2 を合成した力の方向、大きさ、作用点をそれぞれ答えよ。

41. 力の合成

力とは物体の速度を変化させるものである。同じ物体の運動状態が同じであれば同じ力が作用していると判断してよい。下の2本の力を加えた場合と同じ運動をさせる1本の力があればその力は合成された力ということができる。

- ・ 同一作用線上を移動させても物体の運動状態は変化しない
- ・ 力を合成分解しても物体の運動状態は変化しない
- ・ 同一作用線上逆向き同じ大きさの力を勝手に付け加えても取り去っても物体の運動状態は変化しない

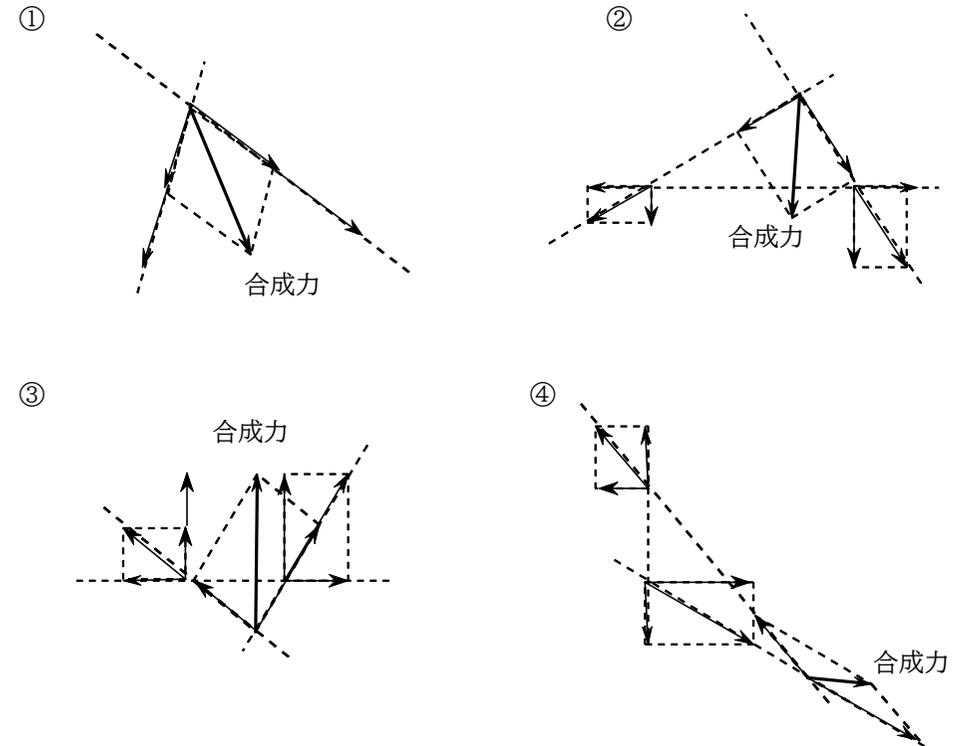
以上のことを基にして次の力を合成せよ。



42. 平行力の合成

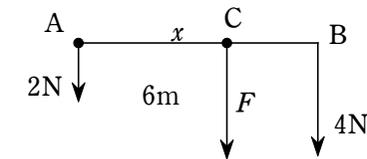
(1) 力の合成とは同じ能力（速度変化させる）を持つ1本の力を求めることである。次の平行力について以下の問いに答えよ。

解説



解説

- (1) ① $A : B = 2 : 4$ であるので、 $4 : 2 = 2 : 1$ で内分した点となる。
- ② 平行力の大きさは単純和なので6N
- (2) ① 6N
- ② $4N \times 6m = 24Nm$
- ③ $Fx = 24$ $F = 6$ より、 $x = 4m$



力のモーメントの基礎

① 合力の作用点はABをいくらの比で内分した点か

② 合力の大きさはいくらか

(2) (1)と同じ問題を次のようにして解いた。

各問いに答えよ。

合力の大きさを F 、作用点のA点からの距離を x とする。

① 合力は F と同じ大きさである。 F はいくらか

② F はA、Bに作用する二本の力と同じ能力を持っている。Aを中心とした回転力も同じである。Bに作用している力のモーメントはいくらか

③ ②を利用して x を求めよ。

(3) (1)と同じ問題を次のようにして解いた。以下の問いに答えよ。

Aから x の位置に上向きに F の力を加えたところ、この物体は静止した。

① 大きさ F はいくらか

② Aを中心とした時のBに作用する4Nの力のモーメントと F のモーメントは等しい。このことを利用して x を求めよ。

③ この力によって動かないということはA、B2力の合力は力 F と同一作用線上逆向き同じ大きさの力のはずである。A、Bの合力の作用点の位置、大きさ、方向を求めよ。

(4) 右図のように逆向きの平行な二力がかかっている。

合成した力がAから x 離れたところに F の大きさの力であるとして以下の問いに答えよ。

合力と元の力は同じ力なので、物体は同じ運動をすることに注目せよ。

① F, x を求めよ。

② CはABを何対何に外分する点になっているか

(5) 斜めになった一様な棒OAの点Aに f_1 、Oに f_2

の力がともに下向きにかかっている。力 f_1 を

作用線に沿ってOと同じ高さの位置に平行移動し

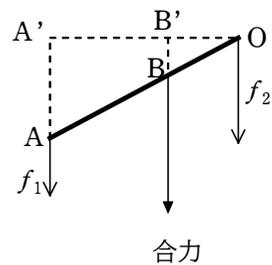
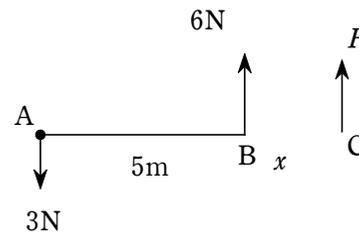
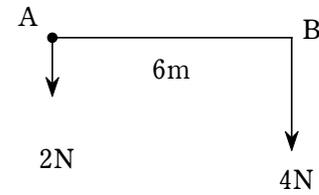
その始点をA'、力 f_1 、 f_2 の合力の作用点をB

とし、合力を作用線上に動かし、OA'との交点をB'とする。

① A'B' : B'Oを f_1 、 f_2 で表せ。

② AB : BOを f_1 、 f_2 で表せ。

③ 合力の大きさを f_1 、 f_2 で表せ。



(3) ① $F=6N$

② Aを中心としたBのモーメントは24Nm

F のモーメントは Fx

この力はつりあっているので、このモーメントは等しい

よって、

$Fx=24$ $F=6$ より、 $x=4m$

③ Aから4mの位置、下向き6N

(4) ① 大きさは $6-3=3N$

合力と元の力は同じ運動をするので、回転の中心をどこにしても同じモーメントのはずである。

Aを中心とするモーメントはBが $6N \times 5m = 30Nm$ 、 F が $Fx = 3x$

よって、 $3x = 30$ $x = 10m$

② AC : BC = 10 : 5 = 2 : 1

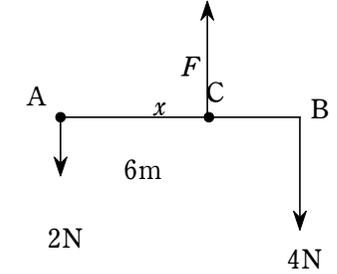
逆向きに平行な力の合力の作用点は大きさの比の逆の外分点である。

(5) ① B'はモーメントのつり合いの位置なので、A'B' : B'O = $f_2 : f_1$

② 三角形の相似によりA'B' : B'O = AB : BO

よって、AB : BO = $f_2 : f_1$

③ $f_2 + f_1$



解説

(1) ① Fx ② $F(l-x)$

③ ①+② = $Fx + F(l-x) = Fl$

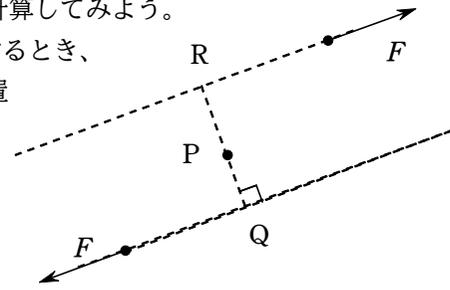
④ x の値に関係なくモーメントは同じである。このことは回転の中心がどこでもよ

力のモーメントの基礎

ないことになる。偶力のモーメントを計算してみよう。

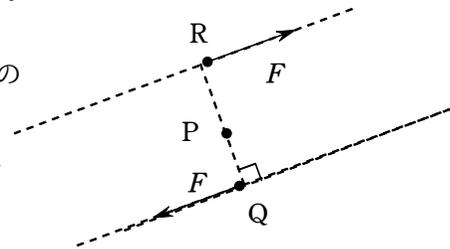
右図のような大きさ F の偶力が存在するとき、
回転の中心が分からないので任意の位置
Pを回転の中心とする。

Pから二本の力の作用線に垂線を
おろし、その足をそれぞれQ,Rとする。
QR= l とし、二本の力をQ、Rに
移動しQR= x とする。

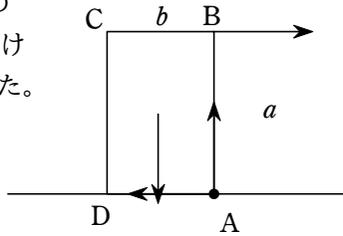


(1) 偶力のモーメントに関して以下の問いに答えよ。

- ① Pを回転の中心とするとときQにある力のモーメントを F, x で表わせ。
- ② Pを回転の中心とするとときRにある力のモーメントを F, l, x で表わせ。
- ③ 全体のモーメントの和を F, l で表わせ。
- ④ ③に x が含まれないがこれは何を意味しているのか



(2) 右図は質量 m 、高さ a 、幅 b の直方体の物体である。この物体のB点にひもをつけ水平に力 F を加えるとD点が浮き上がった。右図はその瞬間を表わしている。この瞬間この物体はA点のみで水平面と設置している。重力加速度の大きさを g として以下の問いに答えよ。



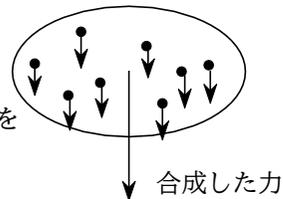
- ① この物体は上下方向に動いていないことに注目して、重力の大きさ及び垂直抗力の大きさを求めよ。
- ② この物体は左右方向に動いていないことに注目して、B点の張力及びA点での摩擦力の大きさを求めよ。
- ③ ①の二本の力は偶力になっている。偶力のモーメントの大きさはいくらか
- ④ ②の二本の力は偶力になっている。偶力のモーメントの大きさはいくらか
- ⑤ ③と④の偶力は互いに逆方向に回転させる偶力であるが、この物体は回転していない。このことを利用して F を m, g, a, b で表わせ。

44. 重心

物体を構成するすべての原子に重力は作用している。この複数の重力を合成してみよう。

(1) 右図(楕円の部分)のような物体が

原子(黒点)8個で構成されているとする。
各原子には重力 mg が下向きに作用している。
このとき、このすべての重力を合成した1本の力を考えることにする。この合成した力について力の大きさ及び方向を答えよ。



いことを意味している。

- (2) ① 重力 mg つりあっているため垂直抗力も mg
② 張力は問題より F 、つりあっているため摩擦力も F
③ 重力の作用線と垂直抗力の作用線の間隔は $\frac{b}{2}$ なので、
偶力のモーメントは $\frac{1}{2}bmg$
④ 張力と摩擦力の作用線の間隔は a であるので、
偶力のモーメントは aF
⑤ 回転していないため③と④の偶力のモーメントは等しい。よって、

$$\frac{1}{2}bmg = aF \quad \text{これより、} F = \frac{bmg}{2a}$$

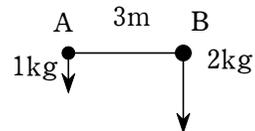
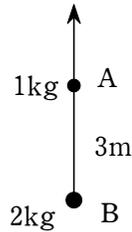
解説

- (1) 平行力の合成は元の力と平行になる。そのため合力は下向き
平行力の合成において大きさは各力の大きさの単純和である。 $8mg$
(2) ① 重力と張力はつりあい関係にあるために同一作用線上にある。直線AB上
② A、Bに作用する重力は合成できる。合成した重力はA,Bを2:1に内分する点である。よってAから $2m$ の位置。重力作用線はこの合力の作用線である。

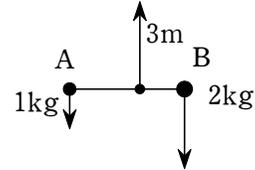
力のモーメントの基礎

(2) 質量1kgの物体Aと質量2kgの物体Bを3mの軽い棒でつないだ。この物体の重心の位置に関して以下の問いに答えよ。

- ① 物体Aにロープを取り付けてつるしたところ、右図のようになった。このとき重力の作用線はどこにあるか示せ。
- ② 下の図は物体A、Bに作用する重力を作図したものである。合力はAから何mのところにあるか。また、この場合の重力作用線はどこか。

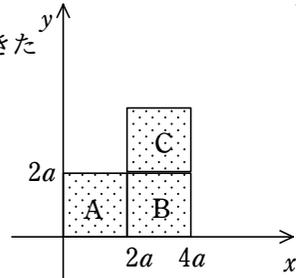


- ③ 重心は2本の重力作用線の交点である。この物体の重心の位置はAから何mの位置にあるか。
- ④ この物体の重心に右図のように力を加えた。この場合この物体は回転するかしないか答えよ。

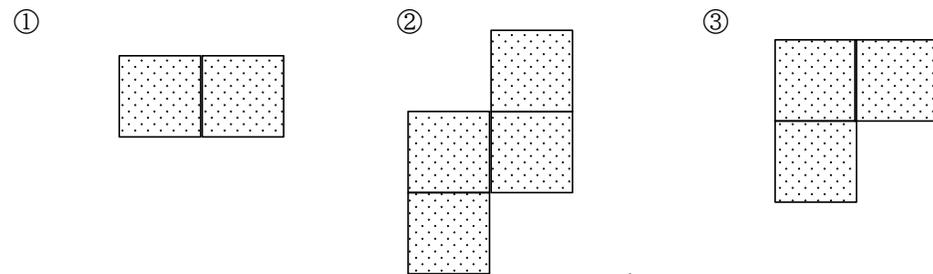


(3) 右図のように座標平面上に一様な材質でできた一辺 $2a$ の正方形の板A,B,Cを設置した。以下の問いに答えよ。

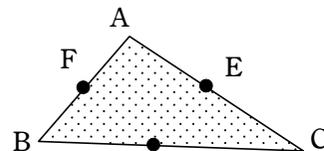
- ① 板Aの重心の座標を答えよ。
- ② 板Bの重心の座標を答えよ。
- ③ 板Cの重心の座標を答えよ。
- ④ 板ABの重心の座標を答えよ。
- ⑤ 板ABCの重心の座標を答えよ。



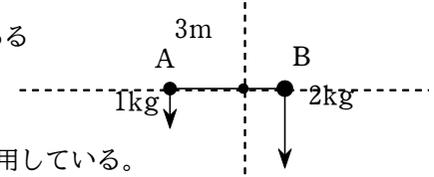
(4) 重心は2本の重力作用線の交点である。以下の物体のはっきり分かる重力作用線と重心の位置を作図せよ。



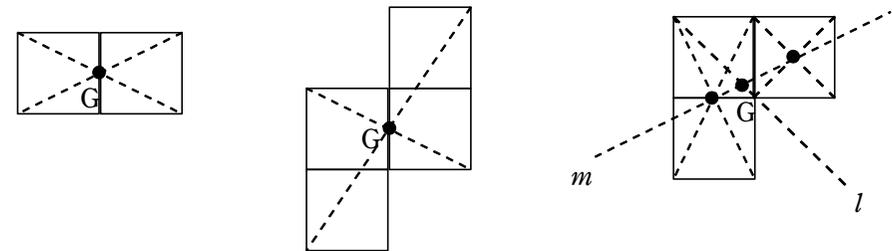
(5) 右図△ABCは一様な材質でできた一様な厚さの三角形の板である。D,E,Fは各辺の中点である。この板の重心を作図せよ。



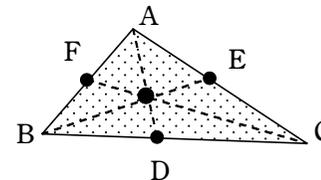
- ③ ①の重力作用線が図の横破線、②の重力作用線が図の縦は線である。重心はその交点なので、②と同じくAから2mの位置にある。
- ④ 重心にはAとBの重力の合力が作用している。この重心に外力を加えた場合、加えた力と重力の合力が同一作用線上になるために偶力がない。よって回転しない。重心に作用する力は回転を伴わず移動するのみである。



- (3) ① 正方形の重心は正方形の対角線の交点である。 (a,a)
- ② ①と同じく $(3a,a)$
- ③ ①と同じく $(3a,3a)$
- ④ ABの重心は①と②の中点。ベクトルとして計算すると、
$$\frac{(a,a)+(3a,a)}{2}=(2a,a)$$
- ⑤ 重心の位置はABの重心 $(2a,a)$ とCの重心 $(3a,3a)$ を1:2に内分する点である。ベクトルとして計算すると、
$$\frac{2(2a,a)+(3a,3a)}{3}=\left(\frac{7}{3}a,\frac{5}{3}a\right)$$
- (4) ①② 図の破線が重力作用線である。重心はその交点
- ③は直線*l*が重力作用線である。もう一本の重力作用線は左側2個の正方形の重心と右側の正方形の重心を結んだ線分*m*の交点である。



(5) 数学でいう重心は、物理でいう重心と同じである。数学でいう三角形の中線は物理でいう重力作用線である。



- (6) ① 半径 $2r$ の円の面積は $4\pi r^2$ であり、切り抜いた部分の面積は πr^2 である。よって、この板の面積は $3\pi r^2$
- ② 重力比は面積比と等しい。よって、3:4:1
- ③ AとCの力の大きさの比が3:1なので、 $AB:BC=1:3$

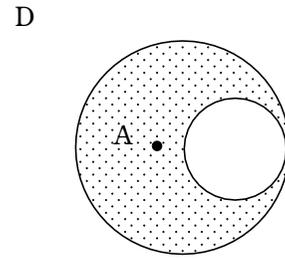
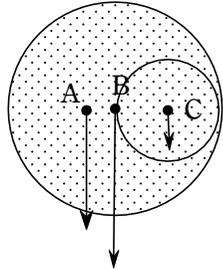
力のモーメントの基礎

(6) 半径 $2r$ の円盤から半径 r の円を切り抜いたのが下の図である。この板切れの重心の位置Aを計算するのに以下の問いに答えよ。

- ① この板の面積と切り抜いた部分の面積を答えよ。

この板の切り抜いた部分に戻した。Cは埋めた円盤の重心、Bは全体の重心である。

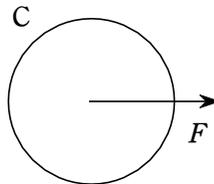
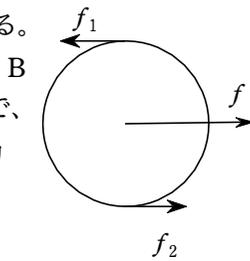
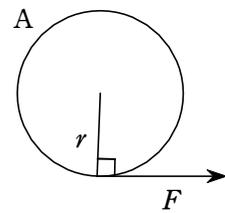
- ② A、B、Cの重力の大きさの比を求めよ。
 ③ BはAとCの合力と考えられる。このことを利用してAB:BCを計算せよ。
 ④ 距離ABはいくらか。



(7) 右図Aのように物体の重心から r 離れたところに力 F を加えた時、この物体は移動すると同時に回転する。偶力は物体の移動を伴わず回転のみを引き起こし、重心に作用する力は回転を伴わず移動のみを伴う。

よって、この図のように作用した力は重心に作用する力と偶力とに分けることができる。それを表わしたのが右下の図Bである。右上の力と右下の力は物体の回転と移動が同じになるように決めれば、同じ力ということになる。このことに関して以下の問いに答えよ。

- ① 図Bの f_1 、 f_2 は偶力である。偶力は回転のみであるので、重心に作用する力と平行に決めることができる。この3力は平行力となる。 f_1 、 f_2 の大きさの関係を答えよ。
 ② この3力の大きさの和を答えよ。
 ③ f を求めよ。
 ④ モーメントが同じことを利用して f_1 、 f_2 を求めよ。
 ⑤ 図Cのように同じ物体の重心に力 F を同じ方向に加えた。このときAの物体の運動との共通点と異なる点を挙げよ。



- ⑥ 力を作用線を越えて平行移動した場合、元の力との物体の運動状態の共通点と相違点を挙げよ。

④ $BC=r$ なので、 $AB=\frac{1}{3}r$

- (7) ① 偶力なので、大きさは等しい
 ② AとBの物体の運動はまったく同じなのでAの力とBの合力は同じである。よって合力の大きさは F
 ③ 平行力の合力の大きさは各力の大きさの単純和である。この場合偶力の大きさの和は0なので、 $f=F$ である。
 ④ Aの力のモーメントは Fr である。Bの偶力のモーメントは $f_1 \times 2r$ である。よって、
 $Fr=f_1 \times 2r$ よって、 $f_1=f_2=\frac{1}{2}F$ となる。
 ⑤ 偶力は回転のみなので、力 F によるAの移動は、Bの f による移動と等しい。よって、AとCは同じ移動（加速度）である。Aは回転するがCは回転しない。
 ⑥ ⑤より、力を平行移動した場合物体自体の加速度（移動）は共通であるが、物体の回転状態が異なる。

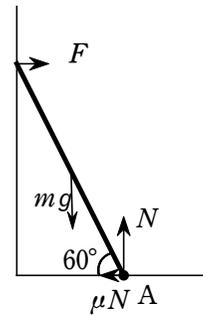
「物体の回転を考えないときは力を平行移動しても良い。」

力のモーメントの基礎

45. 力のつりあい

(1) 長さ l 、質量 m の一様な棒を静止摩擦係数

μ の床と摩擦のない壁に立てかけた。床からの角度を小さくしていくと 60° になった時に滑り出した。重力加速度の大きさを g として以下の問いに答えよ。棒に床から作用する垂直抗力を N 、最大摩擦力を μN 壁から棒が受ける垂直抗力を F とする。

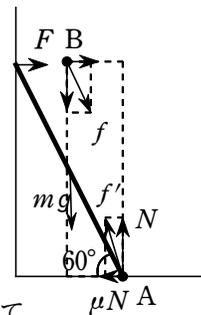


- ① この物体は鉛直方向には動かない。物体の回転を考えると力は平行移動してよいことを用いて鉛直方向のつりあいの式を立てよ。
- ② この物体は水平方向に動かない。①と同じようにしてこの物体の水平方向のつりあいの式を立てよ。
- ③ 物体が回転していないとき回転の中心をどこにしても回転していないことには変わらない。つまり、回転の中心はどこでもよいことになる。回転の中心をA点としたとき、垂直抗力 N と最大摩擦力 μN の力のモーメントはいくらか。
- ④ 回転の中心をAとした時、重力 mg 及び垂直抗力 F の力のモーメントを求めよ。
- ⑤ 回転のつりあいの式を立てよ。
- ⑥ F 、 μ 、 N を求めよ。

(2) (1)と同じ問題を次のようにして解こうとした。以下の問いに答えよ。

壁からの垂直抗力と重力の作用線の交点をBとする。

- ① F と mg の合力を f とし、床からの垂直抗力と摩擦力の合力を f' とした時、 f と f' の力はあるか。この物体が動いていないことに注意して答えよ。
- ② 力 f' を作用線上にB点まで動かした。 f' 、 F 、 mg はつりあっていることになる。つりあいの式を立てよ。
- ③ 重力の作用線と床との交点をHとすると、 f' と μN がA点に作る三角形は三角形ABHと相似であることを利用して μ の値を求めよ。



46.

次の各力の F, T, N の大きさを求めよ。

解説

(1)

- ① 物体の回転を考えない時、力を平行移動しても良い。力 N を mg の同一作用線上に移動できる。よって、 $N = mg$
- ② ①と同じようにして $F = \mu N$
- ③ 回転軸にかかる力であるのでともに力のモーメントは0
- ④ 右図のように力を作用線上に移動してモーメントを計算する。

$$\text{力} F : Fl \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} Fl$$

$$\text{重力} : mg \times \frac{1}{2} l \cos 60^\circ = \frac{1}{4} mgl$$

- ⑤ 回転のつりあいより $\frac{\sqrt{3}}{2} Fl = \frac{1}{4} mgl$

<別解> 偶力のモーメントが等しいとしても良い。

$$\text{垂直抗力と重力の偶力} = mg \times \frac{1}{2} l \cos 60^\circ$$

$$\text{摩擦力と垂直抗力の偶力} = Fl \sin 60^\circ$$

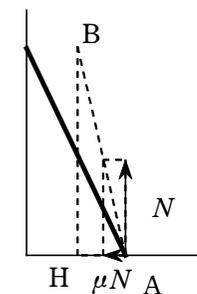
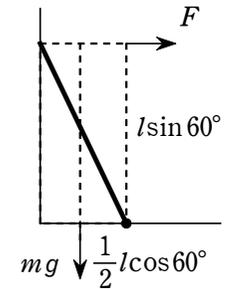
$$\text{これより、} \frac{\sqrt{3}}{2} Fl = \frac{1}{4} mgl$$

- ⑥ これを解くと $F = \frac{\sqrt{3}}{6} mg$ 、 $N = mg$ 、 $\mu = \frac{\sqrt{3}}{6}$

(2)

- ① この物体はつりあっていて動かない。 $F, \mu N, N, mg$ の4力が合成されて f, f' の2力になっているので、この2力は同一作用線逆向き同じ大きさである。
- ② f' の鉛直成分が N 、水平成分が μN なので、 $N = mg$ $F = \mu N$ が成立。

$$\text{③ } \mu = \frac{\mu N}{N} = \frac{AH}{BH} = \frac{\frac{1}{2} l \cos 60^\circ}{l \sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$



解説

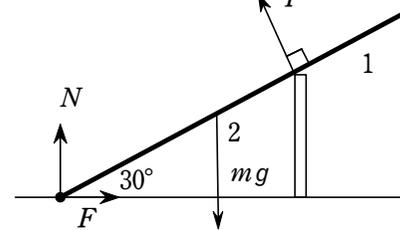
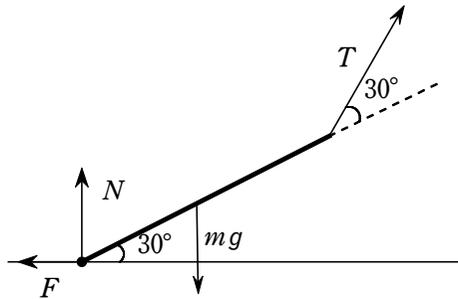
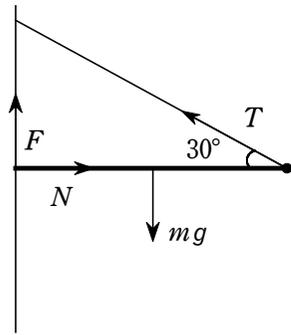
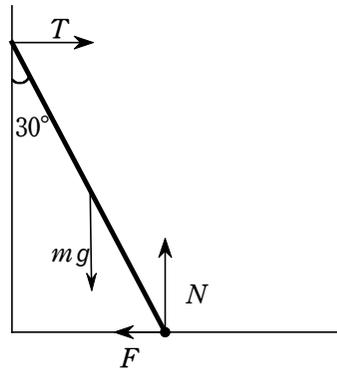
(1) 上下のつりあい $N = mg$

左右のつりあい $F = T$

$$\text{回転のつりあい } Tl \cos 30^\circ = mg \times \frac{1}{2} l \sin 30^\circ$$

これを連立させると、

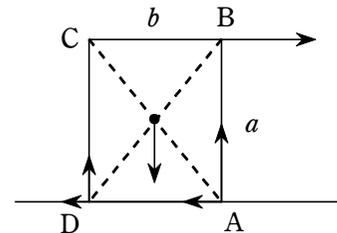
力のモーメントの基礎



47. 滑るか倒れるかの判定

静止摩擦係数 μ の水平面上に一樣な直方体 ABCD (重力 mg) を設置し B 点を力 F で水平に引いた。このとき、面から受ける垂直抗力の作用点が AD 上のどこにあるのかわからないので A 点と D 点のみに作用しており、実際の垂直抗力はその合力であると考えことにする。

$AB=a$ 、 $BC=b$ 、A 点の垂直抗力を N_A 、B 点の垂直抗力を N_B とする。A 点と B 点に作用している摩擦力は同一作用線上にあるので合成して 1 本と考えてもよいことになる。これについて以下の問いに答えよ。



(1) $F=0$ の時以下の問いに答えよ。

- ① 垂直抗力の合力はどこにあるか
- ② N_A 、 N_B を m, g で表わせ。

(2) 垂直抗力の合力が AD を 1:2 に内分する点にあるとき

- ① $N_A + N_B$ はいくらか。
- ② $N_A : N_B$ はいくらか

$$N = mg \quad T = \frac{1}{2\sqrt{3}}mg \quad F = \frac{1}{2\sqrt{3}}mg$$

- (2) 上下のつりあい $T \sin 30^\circ + F = mg$
- 左右のつりあい $T \cos 30^\circ = N$
- 回転のつりあい $F l = mg \times \frac{1}{2} l$

これを連立させると、

$$F = \frac{1}{2}mg \quad T = mg \quad N = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$$

- (3) 上下のつりあい $N + T \sin 60^\circ = mg$
- 左右のつりあい $F = T \cos 60^\circ$
- 回転のつりあい $mg \times \frac{1}{2} l \cos 30^\circ = T l \sin 30^\circ$

これを連立させると、

$$T = \frac{\sqrt{3}}{2}mg \quad F = \frac{\sqrt{3}}{4}mg \quad N = \frac{1}{4}mg$$

- (4) 上下のつりあい $T \cos 30^\circ + N = mg$
- 左右のつりあい $T \sin 30^\circ = F$
- 回転のつりあい $T \times \frac{2}{3} l = mg \times \frac{1}{2} l \cos 30^\circ$

これを連立させると、

$$T = \frac{3\sqrt{3}}{8}mg \quad F = \frac{3\sqrt{3}}{16}mg \quad N = \frac{7}{16}mg$$

解説

- (1) ① $F=0$ なので、摩擦力も 0 であり、水平方向の力が存在しない。そのため鉛直方向のみの釣り合いであるから、重力と垂直抗力の合力は同一作用線上にある。すなわち、垂直抗力の合力は AD の中点にある。

- ② 鉛直方向のつりあいより $N_A + N_B = mg$ 、合力が中点なので、 $N_A = N_B$

よって、 $N_A = N_B = \frac{1}{2}mg$

- (2) ① $N_A + N_B = mg$

- ② 平行力の合成により $N_A : N_B = 2:1$

- ③ ①②より、 $N_A = \frac{2}{3}mg : N_B = \frac{1}{3}mg$

- ④ 垂直抗力の合力、重力ともに大きさは mg 、作用線間の距離は $\frac{2}{3}b - \frac{1}{2}b = \frac{1}{6}b$

よって、偶力のモーメントは $\frac{1}{6}mgb$

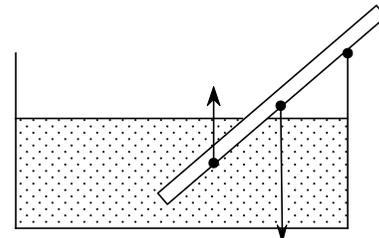
- ⑤ 重力と垂直抗力の偶力のモーメントは時計と反対方向に回すモーメントなので、

力のモーメントの基礎

- ③ N_A, N_B はいくらか
 ④ 垂直抗力と重力との偶力のモーメントはいくらか
 ⑤ F はいくらか
 ⑥ 摩擦力はいくらか
- (3) 垂直抗力の合力がA点にあるとき
 ① N_A, N_B はいくらか
 ② 垂直抗力と重力との偶力のモーメントはいくらか
 ③ F はいくらか
 ④ 摩擦力はいくらか
- (4) F が(3)の F よりも大きくなった時この物体はどうなるか
 (5) F を大きくしていった時倒れる前に滑り出した。 μ の最大値を答えよ。

48. 浮力とモーメント

- (1) 右図のように水を入れた水槽に細くて一様な長さ l 、質量 m の木の棒を設置した。棒は水槽の壁に接触し、一端は水中に浮いている。棒の水中に入っている部分は $0.4l$ で、棒の水槽の壁との接点は棒の右端から $0.2l$ の位置である。これに関して以下の問いに答えよ。



なお、重力加速度の大きさを g とし、比重とは木の棒の密度の水の密度に対する比のことである。

- ① この棒の重力の大きさはいくらか。
 ② 力の水平方向のつりあいを考慮し棒が壁から受ける抗力の方向はどの方向か
 ③ 浮力の作用点は棒の中心からどれだけ離れた位置か
 ④ この棒の重心は棒の中央にあることと、平行力の合成方法を考慮して抗力と浮力の大きさを求めよ。(力は同一作用線上を動かしても良い。)

棒の断面積を S 、水の密度を d_0 、棒の密度を d とする

- ⑤ 水中部分の棒の体積はいくらか
 ⑥ 水中部分の棒を水に置き換えた時、その水の重力の大きさを $d_0 l S g$ で答えよ。

張力と摩擦力のモーメントが時計方向に回すモーメントで大きさが $\frac{1}{6}mgb$ でなければならぬ。よって、

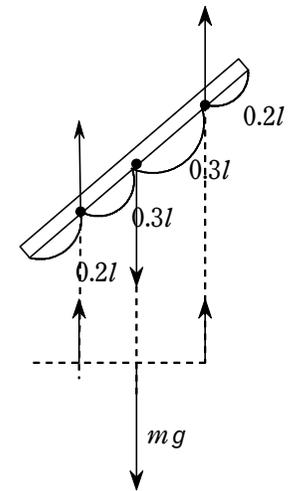
$$Fa = \frac{1}{6}mgb \quad \text{これより、} F = \frac{mgb}{6a}$$

- ⑥ 摩擦力も張力と同じ $\frac{mgb}{6a}$
- (3) ① $N_A = mg, N_B = 0$ D点で垂直抗力が0になっているので、D点は浮いている。これは倒れる直前である。
 ② 作用線間隔は $\frac{1}{2}b$ なので、偶力のモーメントは $\frac{1}{2}mgb$
 ③ (2)と同じく $Fa = \frac{1}{2}mgb$ で、 $F = \frac{mgb}{2a}$
 ④ 摩擦力も同じく $\frac{mgb}{2a}$
- (4) (3)が倒れる瞬間であるので、それを超えた場合この物体は倒れる。
 (5) 倒れる直前の摩擦力が $\frac{mgb}{2a}$ である。これ以前に滑り始めるということは最大摩擦力(μmg)がこの値に満たないということである。よって、

$$\mu mg < \frac{mgb}{2a} \quad \text{これより、} \mu < \frac{b}{2a}$$

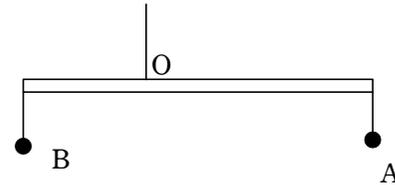
解説

- (1)
 ① mg
 ② 力の水平方向成分は浮力も重力も存在しない。そのため抗力も水平方向成分は存在しない。
 (もし、存在すれば水平方向につりあわないので、水平方向に加速度が生じる)
 よって、上向き
 ③ 浮力は水中の物体を水で置き換えた時の重力とつりあっているため、この重力と同じ作用線上にある。よって、浮力の作用点(浮心)は水中部分を水で置き換えた時の重力の作用点と同じと考えてよい。
 水中部分は $0.4l$ なので、浮心はその中点にある。よって、棒の中心より $0.3l$ の位置である。
 ④ 力は同一作用線上に作用しているため、力を同じ高さの位置に移動できる。右のように移動すると、重力の作用線は抗力と浮力の作用線の中央にあるために抗力と浮力の大きさの比は1:1である。よって、
 抗力の大きさ $= \frac{1}{2}mg$ 浮力の大きさ $= \frac{1}{2}mg$



力のモーメントの基礎

- ⑦ この棒に作用する浮力の大きさを d_0, l, S, g で答えよ。
- ⑧ この棒の質量 m を d, l, S で表わせ。
- ⑨ この棒の比重を求めよ。
- (2) アルキメデスは王冠が純金であるか混ぜ物が混入されているのかを判定するため、浮力を用いて実験を行なった。この原理を考えてみよう。純金の密度を d 、水の密度を d_0 、重力加速度の大きさを g として以下の問いに答えよ。
- ① 体積 V の純金の重さ（重力）はいくらか
- ② 体積 V の水の重さはいくらか
- ③ 体積 V の純金を水に沈めた時の浮力の大きさはいくらか
- ④ 体積 V の純金を水に沈めた時の重さ（重力から浮力を引いたもの）はいくらか
- 体積 V_1 の純金 A と純金でできている体積 V_2 の王冠 B を天秤でつりあわせて水中に沈めた。
- ⑤ A, B に作用する重力の大きさを求めよ。
- ⑥ 水中に沈める前、天秤の支点からの長さの比 $AO : BO$ を V_1 と V_2 で表わせ。
- ⑦ 水中に沈めた時の A, B の水中での重さを求めよ。
- ⑧ 水中に沈めた時、天秤の支点からの長さの比 $AO : BO$ を V_1 と V_2 で表わせ。
- ⑨ ⑥⑧ からどのようなことがいえるか。下の文章の () に適語を入れよ。
- A, B が同じ材質でできていた場合、空中でつりあっていた天秤は水中でも (a)。しかし、材質が異なれば、空中でつりあっていた天秤も水中では (b)。これを利用して混ぜ物が入っているかどうかを判定できる。



- ⑤ $0.4Sl$
- ⑥ ⑤ に水の密度 d_0 をかけると質量になる。よって、水の重力は $0.4d_0Slg$
- ⑦ 水に置き換えた時の重力が浮力である。よって浮力は⑥ と等しい $0.4d_0Slg$
- ⑧ 棒の体積は Sl 、棒の密度をかけると棒の質量になる。 dSl
- ⑨ ④ の結果と比較すると、 $0.4d_0Slg = \frac{1}{2}mg = \frac{1}{2}dSlg$
- 簡単になると、 $0.8d_0 = d$
- 比重は $\frac{d}{d_0}$ なので、0.8 となる。
- (2)
- ① 質量が dV なので、 dVg ② d_0Vg ③ d_0Vg ④ $dVg - d_0Vg$
- ⑤ A: dV_1g B: dV_2g
- ⑥ 力の逆比が距離の比である。 $AO : BO = dV_2g : dV_1g = V_2 : V_1$
- ⑦ ④ と同じようにして A: $dV_1g - d_0V_1g$ B: $dV_2g - d_0V_2g$
- ⑧ $AO : BO = (dV_2g - d_0V_2g) : (dV_1g - d_0V_1g) = V_2 : V_1$
- ⑨ A, B が同じ材質でできていた場合、空中でつりあっていた天秤は水中でもつりあう。しかし、材質が異なれば、空中でつりあっていた天秤も水中ではつりあわなくなる。これを利用して混ぜ物が入っているかどうかを判定できる。
- a=つりあう。b=つりあわない