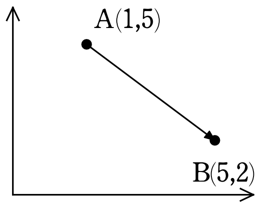
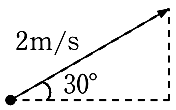
12. 変位ベクトルと速度ベクトル＜解説書P16＞

(1) ある物体が座標平面上の点A(1,5)から、点B(5,2)に2秒間で移動した。座標1目盛りは1mとして以下の問いに答えよ。



① 変位ベクトルを成分で表せ。
② 変位ベクトルの大きさ（移動距離）はいくらか
③ この物体の速度を成分で表せ。
④ この物体の速さはいくらか

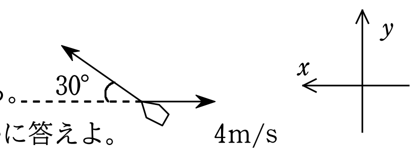
(2) ある物体が座標平面上の点A(2,3)よりx方向から30°上方に2m/sで5秒間移動した。これについて以下の問いに答えよ。



① 移動距離はいくらか
② 速度ベクトルを成分であらわせ。
③ 変位ベクトルを成分で表せ。
④ 到着位置の座標を答えよ。（根号はそのままで良い。）

13. 速度の合成と分解＜解説書P16＞

(1) 右図のように4m/sで一様に流れている川を静水中で8m/sの速さをもつ船が川上より30°の方向に船首を向けて移動している。x軸を川上方向、y軸を上方向にして以下の問いに答えよ。（根号はそのままでよい）



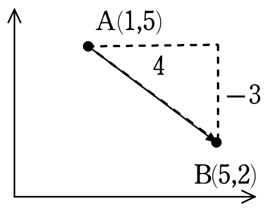
① 静水中の船の速度のx成分、y成分を求めよ。
② 川の流れの速度のx成分、y成分を求めよ。
③ 川を進行している船の速度のx成分、y成分を求めよ。
④ 川幅80mの川を横断するのに何秒かかるか。

(2) (1)と同じ川で同じ船を同じ速さで移動させた。船の川上からの角度をθとして、以下の問いに答えよ。

① 静水中の船の速度のx成分、y成分を求めよ。
② この川を進んでいる船の速度のx成分、y成分を求めよ。
③ 船が流水に対して直角方向（y軸方向）に進むためには、船首の向いている角度（θ）を何度にすればよいか。

解説

(1) ① 図より$\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$



＜別解＞ $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$

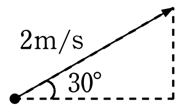
② 大きさは$\sqrt{4^2+3^2}=5\,\mathrm{m}$

③ $\vec{v}=\dfrac{\vec{x}}{t}$より　$\vec{v}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1.5\end{pmatrix}$

x成分＝2m/s　y成分＝−1.5m/s

④ 5mを2秒間で移動しているので2.5m/s

(2) ① 2m/sで5秒間移動したのであるから移動距離は10m



② x成分$=2\cos 30°=\sqrt{3}$ m/s

y成分$=2\sin 30°=1$ m/s

③ x成分$=\sqrt{3}\times 5=5\sqrt{3}$ m

y成分$=1\times 5=5$m

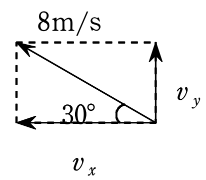
④ 到着地点は元の座標に変位ベクトルを加えると良い。

x座標$=2+5\sqrt{3}$

y座標$=3+5=8$

解説

(1) ① 右図より、



$v_x=8\cos 30°=4\sqrt{3}$ m/s

$v_y=8\sin 30°=4$m/s

② 下流方向に4m/sであるので、

$v_x=-4$m/s　$v_y=0$m/s

③ 各成分の和となる。　$v_x=4\sqrt{3}-4$　m/s　$v_y=4+0=4$m/s

④ 川を横断する速度はy成分で考えればよい。船の速度のy成分は4m/sなので、川幅80mを横断するには$\dfrac{80}{4}=20$秒必要となる。

(2) (1)において30°をθに変えればよい。

① $v_x=8\cos\theta$　$v_y=8\sin\theta$

② $v_x=8\cos\theta-4$　$v_y=8\sin\theta$

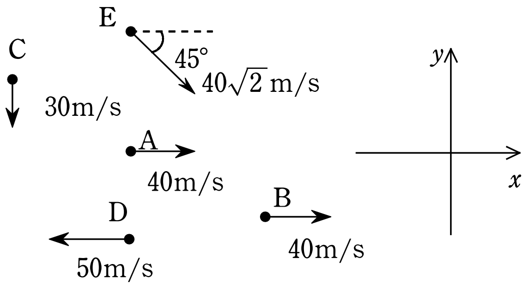
③ 直角方向に船が進むためには船の速度のx成分が0になればよい。よって、

$v_x=8\cos\theta-4=0$　これより、$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$　$\theta=60°$

14．相対速度

⑴　右図のようにA～Eの５つの物体がさまざまな速度で移動している。ここで、物体Aに乗っている人から見た速度を考えることにする。右図のようにx,y軸を設定する。

①　Aから見ると周りの景色はどの方向へどの速さで動いていることになるか。



②　AからBを見ると、Bはどの方向にどの速さで動いていることになるか。

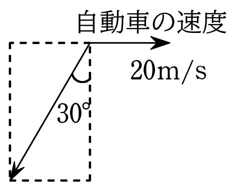
③　AからDを見ると、Dはどの方向にどの速さで動いていることになるか。

④　AからEを見ると、Eはどの方向にどの速さで動いていることになるか

⑤　AからCを見たとき、Cの速さはいくらに見えるか。

⑵　20m/sで走っている自動車から見ると雨が鉛直より30°の角度で降ってくるのが見えた。以下の問いに答えよ。

①　自動車に乗っている人から見ると、周りの景色はどの方向にどれだけの速度で動いているように見えるか



②　静止している人からみて、雨はどれだけの速さで落下してきているか。

③　自動車に乗っている人から見て雨はどれだけの速さで落下しているように見えるか。

15．水平投射

⑴　10m/sで水平方向にボールを投げた。重力加速度の大きさを$10\mathrm{m/s^2}$として以下の問いに答えよ。

①　初速度の水平方向成分と、鉛直方向成分を求めよ。

②　投げてから2秒後のボールの速度の水平方向成分と鉛直方向成分を求めよ。

③　投げてから2秒間の水平方向の平均の速さと鉛直方向の平均の速さを求めよ。

④　投げてから2秒間に移動した距離は水平方向、鉛直方向にそれぞれいくらか。

⑵　初速度v_0で水平方向にボールを投げた。重力加速度の大きさをgとして以下の問いに答えよ。

①　初速度の水平方向成分と、鉛直方向成分を求めよ。

②　投げてからt秒後のボールの速度の水平方向成分と鉛直方向成分を求めよ。

③　投げてからt秒間の水平方向の平均の速さと鉛直方向の平均の速さを求めよ。

④　投げてからt秒間に移動した距離は水平方向、鉛直方向にそれぞれいくらか。

解説

⑴　相対速度は景色の速度を加えると良い。

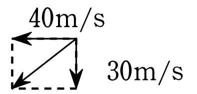
①　Aは40m/sでx軸性方向に動いているので、Aから見た周りの景色はその逆方向に同じ速さで動いているように見えるはずである。よって、x軸負の方向へ40m/s

②　Bはx軸性の方向に40m/sで動いている。Aから見ると、x軸負の方向に40m/sで動く景色の中でx軸正の方向へ40m/sで動いていることになるので、打ち消しあい、静止しているように見える。

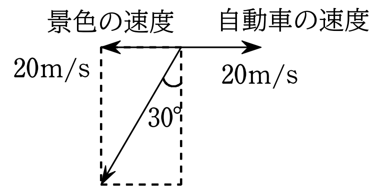
③　Dはx軸負の方向に50m/sで動いているので、景色の速度が加わり、x軸負の方向に$40+50=90$m/sで動いていることになる。

④　Eはx軸正の方向に40m/s、y軸負の方向に40m/sで動いており、景色がx軸負の方向に40m/sで動いているためにx軸方向の速度は打ち消される。よって、y軸負の方向に40m/sとなる。

⑤　Cの速度はy軸負の方向に30m/sである。これにx軸負の方向に40m/sの景色の速度を加えると、図のように50m/sの速さになる。



⑵　①　景色の速度は自動車の速度の逆である。進行方向逆に20m/sとなる。



②　$1:2:\sqrt{3}$の直角三角形の三辺の比より、$20\sqrt{3}$ m/s

③　②と同じく、40m/s

解説

⑴

①　水平方向に10m/sで投げているので、水平方向成分は10m/s、鉛直成分は0m/s

②　重力の加速度は下向きにかかるので水平方向の速度は一定である。よって、水平方向は10m/s、鉛直方向は下向きに$10\mathrm{m/s^2}$の加速度がかかっているので、1秒ごとに10m/sだけ速くなる。最初の速さが0だったので、2秒後は20m/sとなっている。

③　水平方向成分はずっと10m/sのままであるので、水平方向の平均の速さは10m/s
鉛直方向は初速度において0m/sで、2秒後は20m/sなので、鉛直方向の平均の速さは10m/sとなる。

④　水平方向に2秒間に移動した距離は水平方向平均の速さ10m/sなので、20m
鉛直方向に2秒間移動した距離は鉛直方向の平均の速さが10m/sなので、20m
よって、水平方向に20m、鉛直下方向に20m移動していることになる。

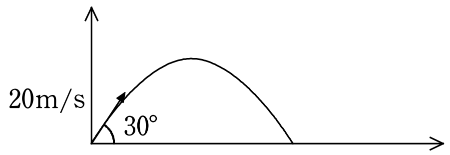
⑵

①　水平方向にv_0で投げているので、水平方向成分はv_0、鉛直成分は0

②　重力の加速度は下向きにかかるので水平方向の速度は一定である。よって、水平方向はv_0、鉛直方向は下向きにgの加速度がかかっているので、1秒ごとにgだけ速くな

16.　斜方投射

(1)　右図のようにボールを40m/sで水平より30°上方に投げた。重力加速度の大きさを10m/s²として、以下の問いに答えよ。



①　初速度の水平方向成分と鉛直方向成分を求めよ。根号はそのままで良い。
②　1秒後の速度の水平方向成分と鉛直方向成分を求めよ。
③　最初の一秒間の平均速度の水平成分と鉛直成分を求めよ。
④　投げてから1秒後のボールの水平位置と高さを求めよ。
⑤　最高点における速度の水平成分と鉛直成分を求めよ。
⑥　このボールが最高点に達するのは何秒後か
⑦　最高点に達するまでの平均速度の水平成分と鉛直成分を求めよ。
⑧　最高点の水平位置と高さを求めよ。
⑨　このボールが落下するのは何秒後か
⑩　このボールの水平到達距離はいくらか
⑪　このボールが地上に落下する直前の速度の水平成分と鉛直成分を求めよ。

(2)　初速度の大きさv_0で水平方向よりθ上方にボールを投げた。重力加速度の大きさをgとして以下の問いに答えよ。

①　初速度の水平方向成分と鉛直方向成分を求めよ。根号はそのままで良い。
②　t秒後の速度の水平方向成分と鉛直方向成分を求めよ。
③　最初のt秒間の平均速度の水平成分と鉛直成分を求めよ。
④　投げてからt秒後のボールの水平位置と高さを求めよ。
⑤　最高点における速度の水平成分と鉛直成分を求めよ。
⑥　このボールが最高点に達するのは何秒後か
⑦　最高点に達するまでの平均速度の水平成分と鉛直成分を求めよ。
⑧　最高点の水平位置と高さを求めよ。
⑨　このボールが落下するのは何秒後か
⑩　このボールの水平到達距離はいくらか
⑪　このボールが地上に落下する直前の速度の水平成分と鉛直成分を求めよ。

る。最初の速さが0だったので、t秒後の速さはgtとなっている。

③　水平方向成分はずっとv_0のままであるので、水平方向の平均の速さはv_0
鉛直方向は初速度において0で、t秒後はgtなので、鉛直方向の平均の速さは$\frac{gt}{2}$となる。

④　水平方向にt秒間に移動した距離は水平方向平均の速さv_0なので、v_0t
鉛直方向にt秒間移動した距離は鉛直方向の平均の速さが$\frac{gt}{2}$なので、$\frac{1}{2}gt^2$
よって、水平方向にv_0t、鉛直下方向に$\frac{1}{2}gt^2$移動していることになる。

解説

(1)

①　水平成分　$40\cos 30° = 20\sqrt{3}$ m/s　　鉛直成分　$40\sin 30° = 20$m/s
②　水平方向成分は一定である。　水平方向成分＝$20\sqrt{3}$ m/s
鉛直方向成分は1秒間に10m/sずつ遅くなる。
鉛直方向成分＝20－10＝10m/s
③　水平方向成分は一定なので、$20\sqrt{3}$ m/s
鉛直方向成分は最初20m/sで1秒後が10m/sなので、15m/s
④　水平方向は平均$20\sqrt{3}$ m/sの速さで1秒間移動するから$20\sqrt{3}$ m
鉛直方向は平均15m/sの速さで1秒間移動するから15m
⑤　最高点では鉛直方向成分は0、水平方向成分は変わらないので$20\sqrt{3}$ m/s
⑥　鉛直方向は最初20m/sだったが、1秒間に10m/sずつ遅くなり、0になったときが最高点であるので、2秒後最高点に達する。
⑦　水平方向成分は一定なので初速度と同じ$20\sqrt{3}$ m/s
鉛直方向成分は最初20m/sで最高点では0m/sなので、10m/s
⑧　水平位置は平均$20\sqrt{3}$ m/sで2秒間移動するので$40\sqrt{3}$ m/s
鉛直成分は平均10m/sで2秒間移動するので、20m
⑨　最高点に達するまでの時間と落下時間は同じなので、4秒後に落下する。
⑩　水平方向の速さ$20\sqrt{3}$ m/sで4秒間移動したので$80\sqrt{3}$ m
⑪　水平方向成分は一定なので$20\sqrt{3}$ m/s
鉛直方向成分は初速度と方向のみ入れ替わり下向きに20m/s

(2)

①　水平方向　$v_0\cos\theta$　鉛直方向　$v_0\sin\theta$
②　水平方向は一定　水平方向は$v_0\cos\theta$
鉛直方向は初速の$v_0\sin\theta$より、1秒間にgずつ遅くなるのでt秒間ではgt遅くなる。
よって、$v_0\sin\theta - gt$
③　水平成分は一定なので$v_0\cos\theta$

⑶　初速度の大きさ20m/sで水平方向に対して45°上方に向けてボールを投げた。このときの最高点の高さと水平到達距離を求めよ。ただし、重力加速度の大きさは10m/s²とする。

鉛直方向は初速　$v_0\sin\theta$　でt秒後に　$v_0\sin\theta-gt$　なので、平均値は

$$\frac{v_0+v_0-gt}{2}=v_0-\frac{1}{2}gt$$

④　水平位置は平均　$v_0\cos\theta$　の速さでt秒間移動するので、$v_0\cos\theta\cdot t$

鉛直方向は平均　$v_0-\frac{1}{2}gt$　の速さでt秒間移動するので、$v_0t-\frac{1}{2}gt^2$

⑤　水平方向は一定なので、$v_0\cos\theta$　　　　鉛直方向は0

⑥　鉛直方向の初速$v_0\sin\theta$が0になったときが最高点である。鉛直方向は1秒ごとにgずつ小さくなっていくので、$\frac{v_0\sin\theta}{g}$

⑦　水平方向は一定なので、$v_0\cos\theta$

鉛直方向は最初$v_0\sin\theta$で最高点で0なので平均の速さは　$\frac{1}{2}v_0\sin\theta$

⑧　水平位置は平均$v_0\cos\theta$の速さで、$\frac{v_0\sin\theta}{g}$秒間動いているので、$\frac{v_0{}^2\sin\theta\cos\theta}{g}$

鉛直方向は平均$\frac{1}{2}v_0\sin\theta$の速さで$\frac{v_0\sin\theta}{g}$秒間動いているので、$\frac{v_0{}^2\sin^2\theta}{2g}$

⑨　上昇時間と下降時間は同じなので、上昇時間$\frac{v_0\sin\theta}{g}$の2倍である。$\frac{2v_0\sin\theta}{g}$

⑩　水平方向は$v_0\cos\theta$の速さで$\frac{2v_0\sin\theta}{g}$秒間移動しているので、$\frac{2v_0{}^2\sin\theta\cos\theta}{g}$

⑪　落下直前の速度は水平方向は初速度と同じで鉛直方向のみ方向が下向きになっている。

水平方向　$v_0\cos\theta$　鉛直方向　$-v_0\sin\theta$

⑶　初速度水平成分は　$20\cos45°=10\sqrt{2}$ m/s

初速度鉛直成分は　$20\sin45°=10\sqrt{2}$ m/sである。

重力加速度の大きさが10m/s²であるので、1秒ごとに鉛直方向の速度が10m/sずつ遅くなる。最高点では鉛直方向の速度が0なので、　$\frac{10\sqrt{2}}{10}=\sqrt{2}$秒で最高点に達する。

鉛直方向は最初の速さが$10\sqrt{2}$ m/sで最高点では0なので、平均の速さは$5\sqrt{2}$ m/sとなる。最高点の高さはこの平均の速さで$\sqrt{2}$秒間移動した距離であるから、

$5\sqrt{2}\times\sqrt{2}=10$m

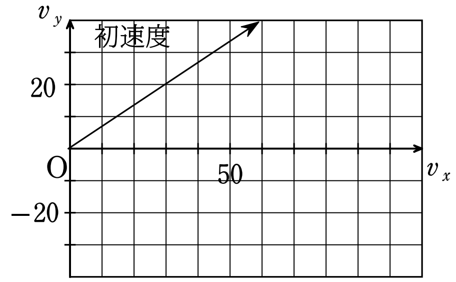
水平方向の速さは$10\sqrt{2}$ m/sで一定なので、この速さで$\sqrt{2}$秒間移動すれば最高点の水平距離が求められる。

$10\sqrt{2}\times\sqrt{2}=20$m

水平到達距離はその2倍となるので40mである。

17．　ベクトルと斜方投射

(1)　右図は速度ベクトルを座標平面上に表わしたものである。今、鉛直成分40m/s水平成分60m/sの初速度でボールを投げた。重力加速度の大きさを10m/s²として、ボールの運動に関する次の各問いに答えよ。



①　1秒後及び5秒後の速度ベクトルを原点を始点として右のグラフに描け

②　最高点に達するのは何秒後か。また、そのときの速度ベクトルを右のグラフに描け

③　最高点に達するまでの平均速度ベクトルをグラフに描け

④　最高点の高さ、水平距離を計算せよ。

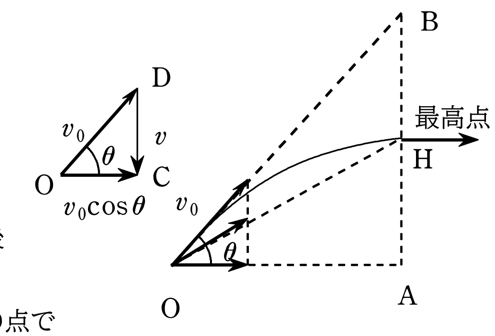
⑤　物体が地上に落下する時の速度ベクトルをグラフに描け。それは何秒後か

⑥　物体が落下するまでの平均速度ベクトルをグラフに図示せよ。

⑦　水平到達距離を求めよ。

(2)　速さv_0、角度θでボールを斜方投射する場合を考える。図の△OCDでODは初速度を表わし、OCは最高点での速度を表わしているものとする。

この初速度でボールを投げた時、t秒後に最高点に達したときの運動の様子を表わした図が△OABである。このときO点で投げ、最高点はHである。重力加速度の大きさをgとして以下の問いに答えよ。



①　△OCDにおいて速度ベクトルDCの大きさを重力の加速度が下向きであることを利用してg、tで表わせ。

②　△OCDを利用して最高点に達する時間tをg、v_0、θで表わせ。

③　△OCD上に最高点に達するまでの平均速度ベクトルを記入せよ。

④　△OABにおいてBH:AHの比を求めよ

⑤　ABの長さをg、v_0、θで表わせ。

⑥　AHの長さをg、v_0、θで表わせ。

18．　空中衝突

(1)　地上120mの高さからボールAを自由落下させると同時にその真下から30m/sでボールBを投げ上げると、t秒後に空中衝突した。上向きを正とし重力加速度の大きさを10m/s²として以下の問いに答えよ。

①　ボールA、Bそれぞれt秒後の速度を求めよ。

②　ボールA、Bそれぞれt秒間の平均の速度を求めよ。

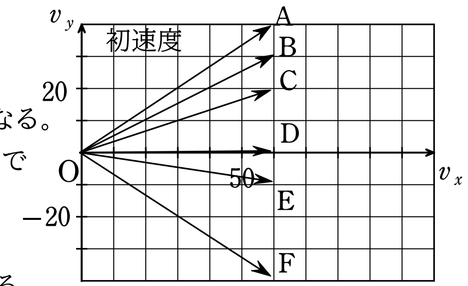
③　ボールA、Bそれぞれt秒間の移動距離を求めよ。

④　ボールAからボールBを見たときの相対速度を求め、時間にかかわらず一定である

解説

(1)

①　重力加速度によって速度ベクトルは1秒ごとに下向きに10m/sずつ速くなる。よって、1秒後は右図のB、5秒後はEとなる。



②　最高点では速度は水平になっているので右図のDとなる。4秒後である。

③　最高点に達するまでの平均速度は終点の中点であるので、グラフのCとなる。

④　Cの平均速度ベクトルで4秒間移動した後最高点に達するので、$\begin{pmatrix}60\\20\end{pmatrix}\times 4=\begin{pmatrix}240\\80\end{pmatrix}$

水平距離240mで高さ80mとなる。

⑤　落下時は初速度と鉛直方向の符号が逆になるので、グラフFである。8秒後である。

⑥　平均速度はAFの中点であるから落下までの平均速度はグラフD

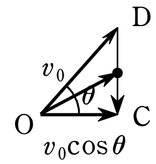
⑦　グラフDの平均速度ベクトルで8秒間移動するので、60×8＝480m

(2)

①　加速度が下向きにgであるので速度はt秒間に下向きにgt変化していることになる。よって、gt

②　$\mathrm{CD}=v_0\sin\theta=gt$　これより、$t=\dfrac{v_0\sin\theta}{g}$

③　平均速度は線分CDの中点を終点とするベクトルである。



④　平均速度の終点はCDの中点である。また、△OABにおいてOHは平均速度ベクトルでt秒間移動した時の変位ベクトルなので、HはABの中点となる。

よって、１：１

⑤　△OCDと△OABの相似比は1:tである。CD＝gtであるから、

$\mathrm{AB}=gt^2=\dfrac{v_0{}^2\sin^2\theta}{g}$

⑥　HはABの中点なので$\mathrm{AH}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}=\dfrac{v_0{}^2\sin^2\theta}{2g}$

解説

(1)

①　Aは自由落下なので静止状態から1秒ごとに10m/sずつ下向きに速くなる。　$-10t$

Bは30m/sから10m/sずつ遅くなる。　$30-10t$

②　Aは初速度0なので平均速度は$-5t$[m/s]

Bは初速度30m/s、最終速度$30-10t$なので、　$30-5t$

③　Aは平均の速さ$5t$でt秒移動するから、$5t^2$[m]

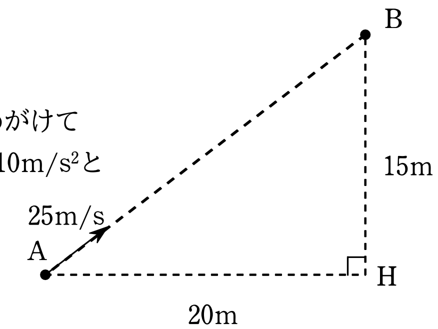
Bは平均の速さ$30-5t$でt秒移動するから、$30t-5t^2$[m]

ことを確認せよ。

⑤　衝突したのは何秒後か

(2)　<モンキーハンティング>

20m先の15mの高さのところに物体Bがある。
物体Bが自由落下すると同時に、物体AをBめがけて
25m/sで投げつけた。重力加速度の大きさを10m/s^2と
し上向きを正として以下の問いに答えよ。



①　AB間の距離はいくらか

②　物体Aの初速度の水平成分と鉛直成分を
求めよ。

③　水平速度から考えて空中衝突するとすれば、それは何秒後に起こるか

④　空中衝突時の物体Aの鉛直方向の速度はいくらか

⑤　空中衝突するまでの鉛直方向の平均の速度はいくらか

⑥　空中衝突する時の物体Aの高さは何mか

⑦　同じ時刻におけるBの高さは何mか計算し、この２物体が衝突することを確認せよ。

④　AからBを見た速度はBの速度からAの速度を引けばよい。

$(30-10t)-(-10t)=30$m/s

相対速度の式にtが含まれないために相対速度は一定である。

⑤　相対速度30m/sであるから、AB間の距離は1秒間に30mずつ狭まっていく。よって、120m÷30m/s＝4秒後

＜別解＞　移動距離の和が120mになった時衝突である。

$5t^2+30t-5t^2=120$　　これより$t=4$

(2)

①　三平方の定理より25m

②　三角形の相似より初速度大きさと水平成分と鉛直成分の比は
25m:20m:15m＝5:4:3である。よって、水平成分20m/s、鉛直成分15m/sである。

③　AH＝20mなので、20m移動すればBの真下に到達する。衝突が起こるのはBの真下なので、初速度の水平成分20m/sを考慮し1秒後に衝突する。

④　物体Aの鉛直方向初速度は15m/sで1秒ごとに10m/s遅くなる。
よって、1秒後は5m/s

⑤　最初15m/sで最後が5m/sなので、平均の速度は10m/s

⑥　平均速度10m/sで1秒間移動したのであるから高さは10m

⑦　Bの1秒後の速さは10m/sなので平均の速さは5m/sである。よって、最初の位置から5m下がった位置にあることになる。よって高さは10m
AとBは同じ時刻に同じ高さ10mにあるので、この２物体は衝突する。