80.

原子と電子

(1) ① 半減期T年の原子核がN_0個あったとする。t年後の原子核の数は$N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$で表される。これを証明せよ。

② 放射線の強さの単位Bq（ベクレル）は1秒間に崩壊する原子の数である。$X[Bq]$とは1秒間にX個の原子が崩壊しているということである。N_0個の放射性元素があったとき、$X[Bq]$の放射線の強さだったとすると、この原子の半減期は$T=\frac{N_0\log_e 2}{X}$ であることを示せ。

(2) 陽子どおしは互いのクーロン力で反発し、中性子はその陽子をくっつける接着剤の役割をしている。しかし中性子は単独では安定を保つことができず、十数分で崩壊する。そのとき、中性子は陽子と電子に分離する。原子核内でも陽子数に対して中性子数が多すぎるときに中性子の崩壊が起きる。この考え方を利用し次の問いに答えよ。

① ${}^3_1H$、${}^{14}_6C$などはβ崩壊をすることを説明せよ。

② 巨大な原子核は中性子数が陽子数に比べて多くなることを説明せよ。

③ 巨大な原子核はα崩壊を起こすことを説明せよ。

④ γ線はどのようなときに放出されるか説明せよ。

81.

核エネルギー

(1) $m_1[u]$と$m_2[u]$の核が融合して$m[u]$の原子核となったとき、生ずるエネルギーは$\frac{(m-m_1-m_2)c^2}{10^3eN_0}[eV]$であることを示せ。ただし$N_0$をアボガドロ数とする。

(2) 核子1個あたりの結合エネルギーが$E_1[eV]$、質量数$2n$の原子核が核分裂し核子1個あたりの結合エネルギーが$E_2[eV]$、質量数がnの2個の原子核になった。このとき生ずるエネルギーが$2n(E_2-E_1)$であることを示せ。

(3) 質量$(M+m)$の原子核がα崩壊をして質量Mの原子核になった。このときEのエネルギーが放出されたとするとき、α粒子の速さは$\sqrt{\frac{2ME}{(M+m)m}}$であることを示せ。

(4) ${}^3_2He$は電気量$e[C]$の陽子を2個、距離$x[m]$に近づけておかなければならない。この力

解説

(1) ①

時間	0	T	$2T$	$3T$	$4T$	$\frac{t}{T}T$
個数	N_0	$\frac{1}{2}N_0$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2N_0$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3N_0$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4N_0$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}N_0$

表を見ることにより、$N=N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$であることがわかる。

数学的に解くと、

t年後$N(t)$とすると、$t+T$年後は$N(t+T)=\frac{1}{2}N(t)$、

$N(t)=N(nT)=a(n)$とおくと、$a(n+1)=\frac{1}{2}a(n)$となり、漸化式である。

よって、$a(n)=a(0)\left(\frac{1}{2}\right)^n$、$a(0)=N(0)=N_0$、$n=\frac{t}{T}$より、$N=N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$

② 半減期T秒の原子のt秒後の原子数は$N=N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$と表される。これを$f(t)$とおくと、$t+\Delta t$秒後の原子数は$f(t+\Delta t)$、よって、$\Delta t$秒間に壊れた原子数は$f(t)-f(t+\Delta t)$である。よって、1秒間当たりに壊れた原子数は、

$-\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$、ここで短時間で測定するため$\Delta t\to 0$とおくと、

$\lim_{\Delta t\to 0}\left(-\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}\right)=-f'(t)$となる。

よって、$N=N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$を$t$で微分すれば放射線の強さが求められる。

$X=\frac{N_0}{T}\log_e 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$　　ここで、現在時刻であるから$t=0$とおくと、

$X=\frac{N_0\log_e 2}{T}$となる。　よって、$T=\frac{N_0\log_e 2}{X}$

半減期が短いほど放射線が強いことがわかる。

(2) ① どちらの原子核も陽子数よりも中性子数のほうが多くなっている。そのため、陽子と結合して安定を保つことができない中性子が発生し、その中性子が崩壊して電子を放出する。これがβ崩壊である。

② 陽子間の反発力はクーロン力であるために離れていても作用するが、中性子の接着力は核力で接触している核子にしかほとんど作用しない。そのため、巨大な原子核になった場合、陽子はすべての陽子から反発力を受けるが、接着力は接触している中性子からしか作用しない。そのため、増大する陽子どおしの反発力を抑えるためには多量の中性子が必要となる。

しかし、中性子は多くなりすぎると、陽子と結合できない中性子が発生し、中性子の崩壊を招くようになる。そのため、ある限度を超える巨大原子核（原子番号82以上）はすべて放射性原子核となる。

③ たとえば、${}^{238}_{92}U$は陽子92に対し、中性子146あるが、この状態でも陽子の反発力のほうが優勢である。（さらに中性子の多い${}^{239}_{92}U$は中性子が多すぎ中性子の崩壊の確率が高くなるため、β崩壊を起こす。）そのため、陽子の反発力を削減するため、陽子を放出するようになるが、陽子2個中性子2個の塊、${}^4_2He$原子核はきわめて安定であるため、この原子核を放出するようになる。これがα崩壊である。

④ α崩壊またはβ崩壊を起こした後の原子核は陽子･中性子の配置のバランスが悪くなっている。それが、安定な方向に組み替えられるときにあまったエネルギーが電磁波のかたちで放出される。これがγ線である。

解説

(1) $1u$とは原子量１に相当する質量である。

よって、$1u=\frac{1}{N_0}[g]=\frac{1}{10^3N_0}[kg]=\frac{1}{6.02\times 10^{23}}g=1.66\times 10^{-27}kg$

$E=mc^2$より、$E=\frac{c^2}{10^3N_0}[J]=\frac{c^2}{10^3eN_0}[eV]$

質量欠損は$(m-m_1-m_2)[u]$であるから、$\frac{(m-m_1-m_2)c^2}{10^3eN_0}[eV]$

(2) 核子1個あたりの結合エネルギーがE_1、質量数$2n$の原子核の結合エネルギーは$2nE_1$である。同様にnE_2が核分裂してできた原子核の結合エネルギーである。

原子核${}^{2n}X$が２個の${}^nY$になったとき$E[eV]$のエネルギーが放出されたとすると、

${}^{2n}X\to 2{}^nY+E$の核反応式が成立する。これをエネルギーで表すと、

が核力である。核力がこの距離内で一様に作用するとする。

① 核力の大きさが$k_0\dfrac{e^2}{x^2}$であることを導け

② 結合エネルギーによる質量欠損は最低$\dfrac{10^3N_0k_0e^2}{xc^2}[u]$であることを示せ。

③ ２つの重陽子${}^2_1H$を核融合させるのに、$x[m]$まで接近させればよいとして、そのときの重陽子のプラズマの温度は$T=\dfrac{k_0e^2}{3kx}$（kはボルツマン定数）であることを示せ。

$-2nE_1=2\cdot(-nE_2)+E$となり、$E=2n(E_2-E_1)$となる。

このとき結合エネルギーは負の値であることに注意

(3) 運動量保存則　$MV-mv=0$

エネルギー保存則　$\dfrac{1}{2}MV^2+\dfrac{1}{2}mv^2=E$

を連立させて解くと、$v=\sqrt{\dfrac{2ME}{(M+m)m}}$

となる。

(4) ① $e[C]$の陽子2個のクーロン力は$k_0\dfrac{e^2}{x^2}$である。これは強烈な反発力である。これとつりあう力が核力であるとすれば、核力は$k_0\dfrac{e^2}{x^2}$となる。

② 核力が距離xで一定であるとすれば、その位置エネルギーは$k_0\dfrac{e^2}{x^2}x=\dfrac{k_0e^2}{x}[J]$である。$E=mc^2$より、$-\dfrac{k_0e^2}{xc^2}[kg]$の質量欠損に相当する。これはアボガドロ数を用いて、$1[u]=\dfrac{1}{10^3N_0}[kg]$　より、$\dfrac{10^3N_0k_0e^2}{xc^2}[u]$

（これは最低値であり実際の質量欠損はこれよりはるかに大きい）

③ ボルツマン定数をkとして、$\dfrac{3}{2}kT=\dfrac{1}{2}mv^2$であり、重陽子は2つあるので結合エネルギーを補うためには1個当たりの運動エネルギーは$\dfrac{k_0e^2}{2x}$である。

よって、$\dfrac{3}{2}kT=\dfrac{k_0e^2}{2x}$　$\therefore T=\dfrac{k_0e^2}{3kx}$