

A33粒子性と波動性

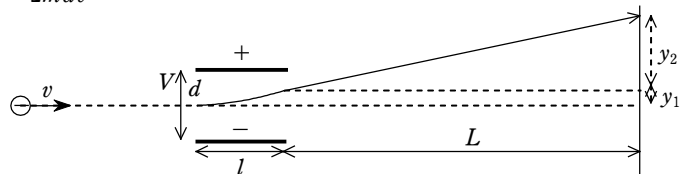
80.

原子と電子

(1) トムソンの式を導け

電圧 V 、長さ l の金属板を d だけ離しておき、その間に質量 m 、電気素量 e の電子を金属板に平行に打ち込んだところ、方向が変化して金属板から L だけ離れたスクリーンに $y = y_1 + y_2$ の位置に衝突した。

このとき、 $y = \frac{eVl(l+2L)}{2mdv^2}$ であることを示せ。



(2) ミリカンの実験

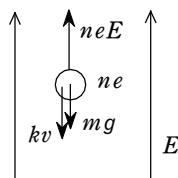
① 実験方法を説明し、電気素量を求める方法を述べよ。

② 電場 E の中に質量 m で電荷 $+ne$ に帯電した油滴が一定の速さ v で上昇中速さに比例する抵抗 kv をうけた。

$$neE = kv + mg$$

であることを導け

③ 上の実験結果 ne の値が複数わかった。このことから電気素量はどのようにして求めたらよいか。説明せよ。



81.

光電効果

右のような実験装置を使って光の波動性と粒子性の関係を調べた。

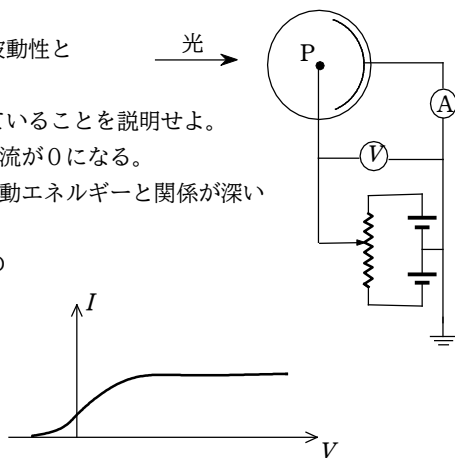
(1) 電流計の値は光子数と関係していることを説明せよ。

(2) 端子Pの電位を下げると電流が0になる。

このときのPの電位は光子の運動エネルギーと関係が深いことを説明せよ。

(3) 電圧をいろいろと変えたときの電流は右図のようになる。

このような形になる理由を説明せよ。



(4) 光の強さ(振幅)を変えたとき、電流と電圧の関係はどのようになるか説明せよ。また、このことより、光の振幅は光を粒子と考えたときの何に相当するか。分かることを述べよ。

(5) 光の振動数を変えたとき、電流と電圧の関係はどのようになるか説明せよ。また、このことより、光の振動数は光を粒子と考えたときの何に相当することが分かるか。

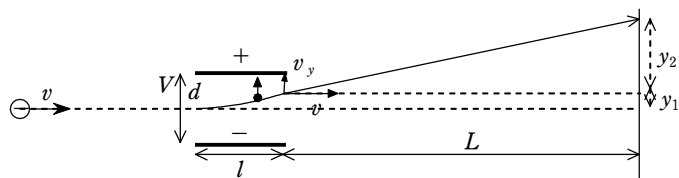
(6) この実験で光子の運動エネルギーが $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ で表されることが分かった。

なぜ分かったのか説明せよ。

(7) 1電子ボルト[eV]は電子1個が1Vの電圧で加速されたとき、電子が得る運動エネルギーを表している。 $e = 1.6 \times 10^{-19}$ として、 $1eV = 1.6 \times 10^{-19} J$ であることを示せ。

解説

(1)



平行電極板内を通過中の電子に作用する力は $F = eE = \frac{eV}{l}$ である。よって、電子の加速度は $a = \frac{F}{m} = \frac{eV}{ml}$ 。この加速度で、平行電極板内を放物線を描いて上方方向に移動する。並行電極板を通過する時間は $t = \frac{l}{v}$ であるから、上方方向の移動距離は、

$$y_1 = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \frac{eV}{ml} \left(\frac{l}{v}\right)^2 = \frac{eVl}{2mv^2}$$

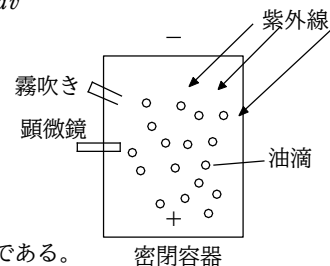
$$\text{三角形の相似より、} v : v_y = L : y_2, \quad v_y = at = \frac{eV}{ml} \frac{l}{v} = \frac{eV}{mv}$$

$$\text{よって、} y_2 = L \frac{v_y}{v} = \frac{eVL}{mv^2}, \quad y = y_1 + y_2 = \frac{eVl(l+2L)}{2mdv^2} \text{となる。}$$

(2) ① 図のような密閉容器に電圧をかけ

霧吹きで油滴を散布する。その油滴に紫外線をあてると、油滴は正負いずれかに帯電する。帯電量も電気素量 e の数倍程度である。

この油滴を顕微鏡で観察し、その運動状態から電氣量を測定し、その結果がある数値の整数倍であることを利用して電気素量を求めるというものである。



② 等速で上昇中であるから力はつりあっている。

上向きにクーロン力 neE が作用し、下向きに重力 mg と空気による抵抗 kv が作用している。よって、 $neE = kv + mg$

③ 測定値はいずれも電気素量の整数倍である。数学的にいうならば最大公約数を求めればよいことになるが、これは測定値であるから誤差を含んでいる。電気素量を推定し、それを元に平均値を求めるという方法をとる。

数学的には数値A,Bがあって、最大公約数がGであるとして、 $A = Ga$ 、 $B = Gb$ が成立すると、その差は $A - B = G(a - b)$ となり、差もGを含む。

例として、

3.21×10^{-19} 、 6.38×10^{-19} 、 8.03×10^{-19} の3データがあったとすると、指数部分はのけて、3.21、6.38、8.03の最大公約数となるが誤差を含んでいるので数学的には処理できない。小さい順に差をとると、 $6.38 - 3.21 = 3.17$ 、 $8.03 - 6.38 = 1.65$ 、差の差をとってみると、 $3.17 - 1.65 = 1.52$ となり、いずれも1.5~1.6前後と思われる。よって、 $e = 1.5 \times 10^{-19}$ 程度と推定。するとこの3データは $2e$ 、 $4e$ 、 $5e$ である。

和を求めると、 $11e = 17.62 \times 10^{-19}$ となる。これより、 $e = 1.60 \times 10^{-19} C$ という数値が求められる。

解説

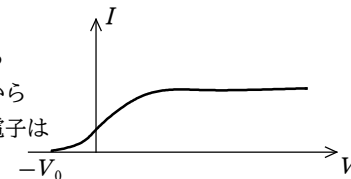
(1) 電流は1秒間に通過する電氣量であり、電子1個が $e[C]$ であることから、

電流 I は1秒間に通過する電子数が $\frac{I}{e}$ 個であることを意味している。光子1個から電子1

個が飛び出すとすれば、光子数と電子数が等しくなる。実際は光子が当たっても飛び出さない電子もあると思われ、完全に等しいとはいえないがほぼ等しいと考えてよい。

(2) Pがマイナス電位になったときは電子は金属板に押し戻されるが、エネルギーの高い電子はそれに勝ってPに届く、電流が0になった瞬間は最もエネルギーの高い電子がかろうじて届いたことを意味する。この電子は光子のエネルギーを100%受け取ったものと考えられる。そのため、この電子の運動エネルギーを測ることにより光子の運動エネルギーを類推することができる。

(3) 光子が金属内の電子に衝突し、電子は光子のエネルギーを吸収して、原子のクーロンによる位置エネルギーを超えたとき、その金属表面から電子が飛び出す。+電圧が高いときは、この電子はすべて、P点まで達し最大電流が流れる。電圧が低くなると、先に飛び出した電子が後から飛び出した電子を押し返し、P点に達する電子数は減る。そのために電流は下がる。電圧がマイナス電位になったときは、多くの電子は金属板に押し戻されるが、光子のエネルギーを多く吸収した高エネルギーの電子のみがP点に届く。そのため、電流はわずかに流れる。さらにマイナス電位 $(-V_0)$ になったとき、最大のエネルギーの電子以外は届かなくなる。

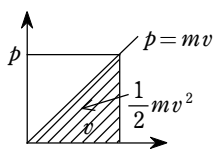


82.

光の運動量

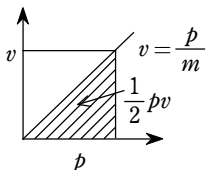
(1) 粒子の運動量 $p = mv$ と運動エネルギー $E = \frac{1}{2}mv^2$ は v における微積関係にあることを

$W = Fs$, $F = ma$ などを用いて示せ。



(2) 粒子の運動量と運動エネルギーは右図のような関係にあることが分かった。これは横軸と縦軸を入れ替えた下のグラフにしても差し支えない。

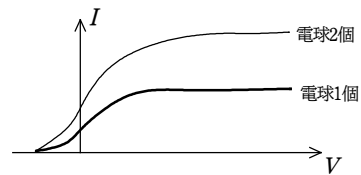
このときの、グラフは通常粒子について述べたものであるが、光子についていえば、速さ v は一定となるため、その面積は長方形部分となり、その運動エネルギーは pv となる。



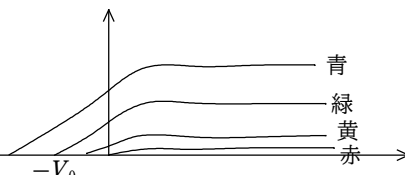
この考え方をを用いて、 $p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$ が成り立つことを示せ。

(3) 質量欠損において質量 m が光子に変わったとき、そのエネルギーは $E = mc^2$ となることを上の考え方をを用いて示せ。

(4) 明るさを2倍にするということは電球を2個にするということと等しい。電球が1個の場合と2個の場合で各電圧のときに流れる電流は右のグラフのようになる。最低電圧に変化はないが、最大電流は大きく違う。明るさが2倍になると、飛び出た電子数がほぼ2倍になっている。このことは、明るさが2倍になると光子数が2倍になることを意味している。よって、明るさは光子の数であることがわかる。すなわち振幅が光子数を意味している。つまり、振幅のないところに光子は存在しない。しかし、このときの最低電圧は変わらない。このことは明るくなると、光子の数は増えるが、光子1個あたりのエネルギーに変化がないことを意味している。

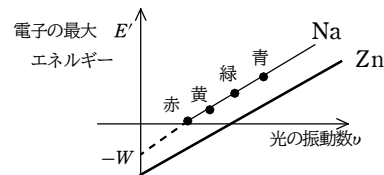


(5) 光の振動数（色）を変えた場合は最低電圧に変化が起こる。振動数が高いほど飛び出した電子のエネルギーが大きい。このことは振動数が大きいほど



光子の運動エネルギーが大きいことを意味している。光の振動数は光の運動エネルギーを意味しているのである。

(6) 各波長ごとの最低電圧から計算した電子のエネルギー $E' = eV_0$ と振動数の関係をグラフにすると次のようになる。



傾きを h 、切片を $-W$ とすると、

$$E' = h\nu - W$$

この式の h と W の意味を探るために

金属板を Zn（今までは Na だった）に変えたところ

傾き h は変わらなかったが、切片 W は変化した。このことは、 W は金属板による定数であることを意味し、電子が原子から飛び出すために必要なエネルギーである。化学でいうところの第一イオン化エネルギーに相当する。第一イオン化エネルギーが原子そのものから電子が飛び出すエネルギーであるが、これは原子集団であるため、若干異なる。ということは、 $h\nu$ は光子そのものの性質を現し、光子の運動エネルギーと考えられる。よって、 $E = h\nu$ 。

$E' = h\nu - W$ の意味は、電子は光子より、 $h\nu$ のエネルギーを受け取り、そのうち金属板から飛び出すのに、 W のエネルギーを使いその残りのエネルギーが E' ということになる。

波動の $v = f\lambda$ は、 c は光速、 ν は振動数であるので、光では $c = \nu\lambda$ となる。これを使うと、 $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ となる。

(7) 原子レベルの運動エネルギーを扱うとき、J では扱う数字が小さくなりすぎて不便である。そこで、電子1個が 1 V で加速されたときの運動エネルギーを $1eV$ ときめた。電子が 1 V で加速されたときのエネルギーは $W = qV = e[J] = 1.6 \times 10^{-19}[J]$ 。よって、 $1eV = 1.6 \times 10^{-19} J$ となる。

解説

(1) $dW = Fds = mad s = m \frac{dv}{dt} ds = m \frac{ds}{dt} dv = mv dv$ となる。

よって、 $mv = \frac{dW}{dv}$ で、運動エネルギー W を速さ v で微分したものが運動量になっている。

(2) 光の場合速さは光速 c で一定である。 $E = h\nu = pc$ 、これと、

$$c = \nu\lambda \text{ で、 } p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \text{ が導かれる。}$$

(3) 通常物体の運動エネルギーが $\frac{1}{2}mv^2$ となるのはだんだんと速くなるときの、その間に物体に加えた仕事を合計するためである。仕事は(1)より、運動量 \times 速度変化である。光子の場合、物体から離れると同時に光速である。よって、 $\frac{1}{2}$ が必要なく、 $E = mc^2$ が光子の持つエネルギーとなる。

(これは簡易的な説明である。正式には相対性理論が必要である。)