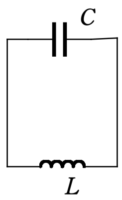
67.

共振回路

自己インダクタンスLのコイルと、電気容量Cのコンデンサーをつないで共振回路を作った。



(1)　コンデンサーが最大電圧（満タン）のとき電流は０であることを示せ。

(2)　コンデンサーに電気がたまっていないとき、電流の大きさが最大になっていることを示せ。

(3)　振動周期が$T=2\pi\sqrt{LC}$であることを示せ。

(4)　コンデンサーに電荷Qがたまっていたのを最大とすると、最大電流は$I_0=\dfrac{Q}{\sqrt{LC}}$であることを示せ。

(5)　コンデンサーが電荷Qで満タンになっている時刻を０として、この回路を流れる電流と、コンデンサーにかかる電圧のグラフを描け。

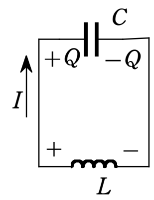
解説

(1)　電流がコンデンサーに流れ込んでいる場合は、たまった電気量は増加する。逆に流れ出している場合は減少する。満タンの状態ではこれ以上増えることもなければ減ることもない状態である。よって、電流は０

(2)　コンデンサーが空の場合、$Q=0$、$Q=CV$より、$V=0$となる。よって、コイルの方の起電力も０でなければならない。$V=-L\dfrac{dI}{dt}=0$であるから、$\dfrac{dI}{dt}=0$となる。

よって、電流は最大か最小である。

(3)　電圧1周＝０より、　$-L\dfrac{dI}{dt}-\dfrac{Q}{C}=0$



コイルの場合電流の流れと逆方向に起電力が発生するのでコイルの起電力は負となる。

また、$I=\dfrac{dQ}{dt}$より、上式を微分すると、

$L\dfrac{d^2I}{dt^2}+\dfrac{I}{C}=0$

$I=Asin\omega t$と仮定すると、（正弦関数であろうと推定）

$-AL\omega^2 sin\omega t+\dfrac{A}{C}sin\omega t=0$

これが成立するためには$L\omega^2=\dfrac{1}{C}$すなわち、$\omega=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$が成立しなければならない。

よって、$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{LC}$

となる。

＜別解＞　この回路を流れる電流の実効値をI_eとすると、電圧1周＝０より、

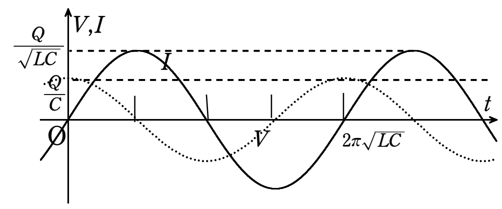
$V_e=\omega LI_e=\dfrac{I_e}{\omega C}$　これを解く事により求められる。

ただし、この方法は位相が$\dfrac{\pi}{2}$ずれている抵抗があった場合、インピーダンスを計算してから求める必要があり、間違えやすい。この回路の場合位相のずれがπであるため、大きさを計算するにおいては位相のずれの影響がない。そのために可能であるに過ぎない。

(4)　コンデンサーにたまっていた最大エネルギーは$\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$である。コンデンサーが空になったとき、コイルに最大電流が流れている。このときにコイルに最大エネルギーがたまっている。よって、エネルギー保存則より、$\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}=\dfrac{1}{2}LI_0{}^2$。これを解くと、

$I_0=\dfrac{Q}{\sqrt{LC}}$となる。

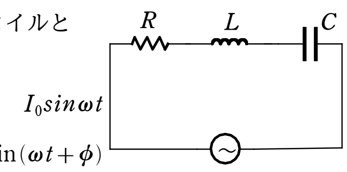
(5)



68.

交流回路

(1)　抵抗値Rの抵抗と自己インダクタンスLのコイルと電気容量Cを用いた直列回路に$I=I_0 sin\omega t$の電流を流した。



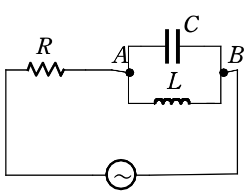
①　交流電圧が$V=I_0\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}\sin(\omega t+\phi)$

$tan\phi=\dfrac{\omega L-\dfrac{1}{\omega C}}{R}$と表されることを示せ。

②　$\omega=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$が成り立つとき、最大電流が流れることを示せ。

③　ωをいろいろと変化させたときの電流の実効値を表すグラフを描け

(2)　右図のような回路でAB間の電圧が$V=V_0 sin\omega t$で表されているとする。



①　この回路全体を流れる電流は

$I=\left(\omega C-\dfrac{1}{\omega L}\right)V_0 cos\omega t$で表されることを示せ。

②　$\omega=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$の時この回路に電流が流れないことを示せ。

解説

(1)　R、L、Cそれぞれの電圧は

$V_R=RI_0 sin\omega t$、$V_L=\omega LI_0 cos\omega t$、$V_C=-\dfrac{I_0}{\omega C}cos\omega t$

全体の電圧は$V=V_R+V_L+V_C$であるため、

$$V=RI_0 sin\omega t+\omega LI_0 cos\omega t-\frac{I_0}{\omega C}cos\omega t$$

$$=I_0\left\{Rsin\omega t+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)cos\omega t\right\}$$

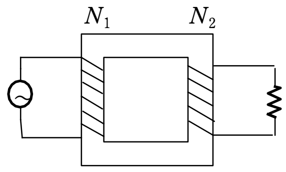
この三角関数を合成すると、

$V=I_0\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}\sin(\omega t+\phi)$、　$tan\phi=\dfrac{\omega L-\dfrac{1}{\omega C}}{R}$

実効値は　$V_e=I_e\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$となり、$V_e$を一定にしたとき、最大電流を流すためにはインピーダンスが最小であれば良い。

③　この回路全体を流れる電流のグラフを描け

(3)　巻き数N_1の1次コイルと巻き数N_2の2次コイルのトランスの1次コイルに$V=V_1 sin\omega t$の電源をつないだ。

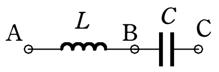


①　2次コイルの電圧最大値をV_2とするとき、$N_1:N_2=V_1:V_2$であることを示せ。

②　各コイルの電流最大値をI_1、I_2とするとき、$V_1I_1=V_2I_2$が成立することを示せ。

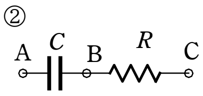
(4)　図の回路に角振動数ωの交流を流したところ、コイル、コンデンサー、抵抗の電圧がV_L、V_C、V_Rであったとき、AC間の電圧を求める式を証明せよ。

①



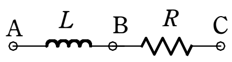
$V=|V_L-V_C|$

②



$V=\sqrt{V_C{}^2+V_R{}^2}$

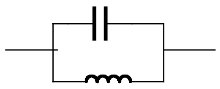
③



$V=\sqrt{V_L{}^2+V_R{}^2}$

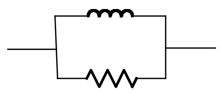
(5)　コイル、コンデンサー、抵抗にそれぞれ実効値でI_L、I_C、I_Rの電流を流したとき、端子Aを流れる電流が次の式で表されることを示せ。

①



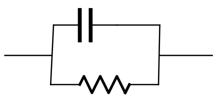
$I=|I_C-I_L|$

②



$I=\sqrt{I_L{}^2+I_R{}^2}$

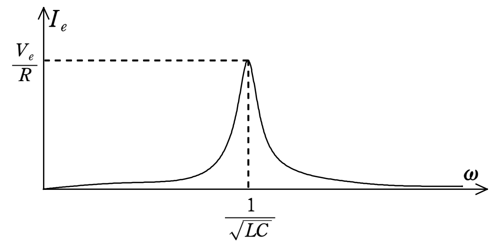
③



$I=\sqrt{I_C{}^2+I_R{}^2}$

よって、$\omega L-\dfrac{1}{\omega C}=0$、これより、$\omega=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

③



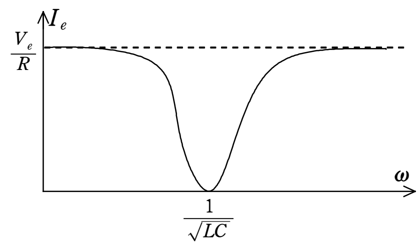
(2)　①　$I_C=\omega CV_0 cos\omega t$、$I_L=-\dfrac{V_0}{\omega L}cos\omega t$より、

$$I=\omega CV_0cos\omega t-\frac{V_0}{\omega L}cos\omega t=\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)V_0cos\omega t$$

②　上の式で$\omega C-\dfrac{1}{\omega L}=0$のとき電流が0となる。よって、$\omega=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

③

$\omega\to 0$のとき、及び$\omega\to\infty$のときはコイル及びコンデンサーがリアクタンス0に近づくために抵抗のみによる電流となる。



(3)　①　鉄心内の磁束をΦとすると、1次コイルの誘導起電力より、

$V_1sin\omega t-N_1\dfrac{d\Phi}{dt}=0$　　これより、$\dfrac{d\Phi}{dt}=\dfrac{V_1}{N_1}sin\omega t$

2次コイルの電圧を$V(t)$とすると、$V(t)-N_2\dfrac{d\Phi}{dt}=0$

よって、$V(t)=N_2\dfrac{d\Phi}{dt}=\dfrac{N_2}{N_1}V_1sin\omega t$

これより、2次コイルの電圧の最大値は$V_2=\dfrac{N_2}{N_1}V_1$

よって、$N_1:N_2=V_1:V_2$

②　抵抗で消費する電力は1次コイル側から供給される。

よって、1次コイルで消費される電力と2次コイルで消費される電力は等しくなる。

∴　$V_1I_1=V_2I_2$

(4)　位相がずれているため、各電圧の最大値が一致せず全体の電圧は単純和になっていない。瞬間値で計算して最大値を求め、それを実効値に直すのが基本である。この回路に流した電流を$I_0\sin\omega t$とすると、コイル、コンデンサー、抵抗の電圧の実効値はそれぞれ、$V_L=\dfrac{\sqrt2}{2}\omega LI_0$、$V_C=\dfrac{\sqrt2}{2}\dfrac{I_0}{\omega C}$、$V_R=\dfrac{\sqrt2}{2}RI_0$である。

①　$V=\omega LI_0\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{2}\right)+\dfrac{I_0}{\omega C}\sin\left(\omega t-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sqrt2\,V_L\cos\omega t-\sqrt2\,V_C\cos\omega t$

$=\sqrt2\,(V_L-V_C)\cos\omega t$

$V>0$　より、実効値は　$|V_L-V_C|$　である。

②　$V=\dfrac{I_0}{\omega C}\sin\left(\omega t-\dfrac{\pi}{2}\right)+RI_0\sin\omega t=-\sqrt2\,V_C\cos\omega t+\sqrt2\,V_R\sin\omega t$

$=\sqrt2\sqrt{V_C{}^2+V_R{}^2}\sin(\omega t+\phi)$　　(ϕは合成したときの位相)

よって、　$V=\sqrt{V_C{}^2+V_R{}^2}$

③　$V=\omega LI_0\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{2}\right)+RI_0\sin\omega t=\sqrt2\,V_L\cos\omega t+\sqrt2\,V_R\sin\omega t$

$=\sqrt2\sqrt{V_L{}^2+V_R{}^2}\sin(\omega t+\phi)$

よって、　$V=\sqrt{V_L{}^2+V_R{}^2}$

(5)　位相がずれているため、各電流の最大値が一致せず全体の電流は単純和になっていない。瞬間値で計算して最大値を求め、それを実効値に直すのが基本である。この回路の電圧を$V_0\sin\omega t$とすると、コイル、コンデンサー、抵抗の電流の実効値はそれぞれ、$I_L=\dfrac{\sqrt2}{2}\dfrac{V_0}{\omega L}$、$I_C=\dfrac{\sqrt2}{2}\omega CV_0$、$V_R=\dfrac{\sqrt2}{2}\dfrac{V_0}{R}$である。

①　$V=\dfrac{V_0}{\omega L}\sin\left(\omega t-\dfrac{\pi}{2}\right)+\omega CV_0\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sqrt2\,I_L\cos\omega t+\sqrt2\,I_C\cos\omega t$

$=\sqrt2\,(I_C-I_L)\cos\omega t$

$I>0$　より、実効値は　$|I_C-I_L|$　である。

②　$I=\dfrac{V_0}{\omega L}\sin\left(\omega t-\dfrac{\pi}{2}\right)+\dfrac{V_0}{R}\sin\omega t=-\sqrt2\,I_L\cos\omega t+\sqrt2\,I_R\sin\omega t$

$=\sqrt2\sqrt{I_L{}^2+I_R{}^2}\sin(\omega t+\phi)$

よって、　$I=\sqrt{I_L{}^2+I_R{}^2}$

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　)

③ $I=\omega CV_0\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{2}\right)+\dfrac{V_0}{R}\sin\omega t=\sqrt{2}\,I_C\cos\omega t+\sqrt{2}\,I_R\sin\omega t$

$=\sqrt{2}\sqrt{{I_C}^2+{I_R}^2}\sin(\omega t+\phi)$　　（ϕは合成したときの位相）

よって、　$I=\sqrt{{I_C}^2+{I_R}^2}$

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　　）