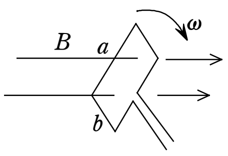
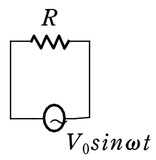
67.

交流

(1)　磁束密度Bの磁束内で、図のように長さ$a\times b$の長方形のN回巻きコイルを磁束に垂直な回転軸の元で角速度ωにて回させた。このコイルの面が磁束に垂直になった瞬間の時刻を０とすると、このコイルの誘導起電力が$V=NBab\omega sin\omega t$で表されることを証明せよ。



(2)　起電力$V=V_0 sin\omega t$の交流電源に電気抵抗Rの抵抗をつないだ。



①　流れる電流が$I=\frac{V_0}{R}sin\omega t$であることを導け。

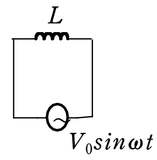
②　電流の最大値をI_0とするとき、$V_0=RI_0$であることを証明せよ。

③　消費電力の平均値が$\overline{P}=\frac{1}{2}I_0V_0=\frac{1}{2}RI_0{}^2=\frac{1}{2}\frac{V_0{}^2}{R}$であることを示せ。

④　電圧$V=V_0 sin\omega t$の2乗平均値が実効値$V_e=\frac{\sqrt{2}}{2}V_0$で表されることを示せ。

⑤　実効値でオームの法則$V_e=I_eR$が成り立つことを示し、消費電力の平均値が$\overline{P}=I_eV_e=I_e{}^2R=\frac{V_e{}^2}{R}$であることを示せ。

(3)　起電力$V=V_0 sin\omega t$の交流電源に自己インダクタンスLのコイルを接続した。



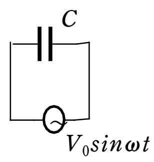
①　流れる電流が$I=\frac{V_0}{\omega L}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$であることを示せ。

②　消費電力が０であることを示せ。

③　$V_e=\omega LI_e$が成り立つことを示せ。

このときのωLをリアクタンスという。

(4)　起電力$V=V_0 sin\omega t$の交流電源に電気容量Cのコンデンサーを接続した。



①　流れる電流が$I=\omega CV_0\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$であることを示せ。

②　消費電力が０であることを示せ。

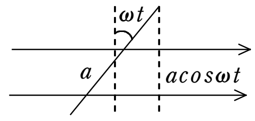
③　$V_e=\frac{1}{\omega C}I_e$が成り立つことを示せ。

このときの$\frac{1}{\omega C}$をリアクタンスという。

(解説)

(1)　図より、コイル内の磁束を貫く面積は$S=abcos\omega t$である。よって、磁束は$\Phi=Babcos\omega t$

誘導起電力は$V=-N\frac{d\Phi}{dt}=NBab\omega sin\omega t$



となる。

(2)　①　オームの法則$V=RI$より、

$V=V_0\sin\omega t=RI$　よって、$I=\frac{V_0}{R}sin\omega t$

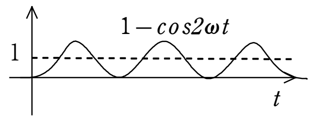
②　$I=\frac{V_0}{R}sin\omega t$より、電流の最大値を$I_0$とすると$I_0=\frac{V_0}{R}$

よって、$V_0=RI_0$

③　抵抗を流れる電流のする電力は

$P=IV=I_0 sin\omega t\cdot V_0 sin\omega t=I_0V_0\sin^2\omega t$

三角関数の公式　$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$　より



$P=\frac{1}{2}I_0V_0(1-cos2\omega t)$

$1-cos2\omega t$の平均値は右図より１であることがわかる。

よって、　$\overline{P}=\frac{1}{2}I_0V_0$

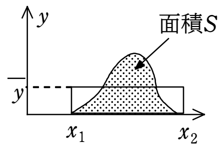
$V_0=RI_0$を利用すると、

$\overline{P}=\frac{1}{2}I_0V_0=\frac{1}{2}RI_0{}^2=\frac{1}{2}\frac{V_0{}^2}{R}$　が成立する。

④　aとbの2乗平均は$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$で相加平均をすると０になるものに対してよく計算される。標準偏差などはその例である。

<平均値の考え方>

右図のような場合、元の関数と面積の等しい長方形を考えると、その高さが平均値となる。よって、グラフの面積をSとすると、



$\overline{y}=\frac{S}{x_2-x_1}=\frac{\int_{x_1}^{x_2}ydx}{x_2-x_1}$となる。

電圧Vの2乗平均を1周期の範囲で計算してみる。

$$\sqrt{\overline{V^2}}=\sqrt{\frac{\int_{t_1}^{t_2}V^2dt}{t_2-t_1}}=\sqrt{\frac{\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}V_0{}^2sin^2\omega tdt}{\frac{2\pi}{\omega}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}V_0$$

⑤　$V_0=I_0R$に$V_e=\frac{\sqrt{2}}{2}V_0$、$I_e=\frac{\sqrt{2}}{2}I_0$を代入して、$V_e=I_eR$。

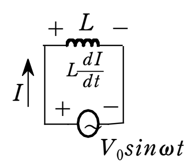
$V_e=\frac{\sqrt{2}}{2}V_0$、$I_e=\frac{\sqrt{2}}{2}I_0$を$\overline{P}=\frac{1}{2}I_0V_0=\frac{1}{2}RI_0{}^2=\frac{1}{2}\frac{V_0{}^2}{R}$に代入すると、

$\overline{P}=I_eV_e=I_e{}^2R=\frac{V_e{}^2}{R}$

(3)　①　電圧1周＝０より、

$V_0 sin\omega t-L\frac{dI}{dt}=0$　（コイルの電圧の符号に注意）

交流のある瞬間の電流で符号を考えると良い。



これは、

$\frac{dI}{dt}=\frac{V_0}{L}sin\omega t$

積分して

$I=-\frac{V_0}{\omega L}cos\omega t+C$

ここで積分定数Cは直流を意味しているが、直流電源がないため、超伝導でない限り、流れていたとしてもすぐに流れなくなる。よって、$C=0$

よって、$I=\frac{V_0}{\omega L}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$が成立。

②　$P=IV=-\frac{V_0}{\omega L}cos\omega t\cdot V_0 sin\omega t=-\frac{V_0{}^2}{2\omega L}sin2\omega t$

$y=sinx$の平均値は０であるため、

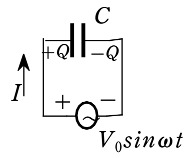
$\overline{P}=0$となる。

③　電圧の実効値は$V_e=\frac{\sqrt{2}}{2}V_0$、①より、電流の実効値は$I_e=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{V_0}{\omega L}$

代入して、$V_e=\omega LI_e$が成立。

(4)　①　電圧1周＝０より、

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)



$V_0 sin\omega t-\frac{Q}{C}=0$

Iが流れることによりQが増加するため、

$dQ=Idt$　よって、$I=\frac{dQ}{dt}$

第一式を微分すると、$\omega V_0 cos\omega t-\frac{1}{C}\frac{dQ}{dt}=0$

よって、$I=\omega CV_0 cos\omega t=\omega CV_0 \sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$

② $P=IV=\omega CV_0 cos\omega t\cdot V_0 sin\omega t=\frac{\omega C{V_0}^2}{2}sin2\omega t$

⑶の②と同じ理由により、$\overline{P}=0$

③ $I=\omega CV_0 \sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$より電流の最大値は$I_0=\omega CV_0$となる。

両辺に$\frac{\sqrt{2}}{2}$をかけると、実効値となり　$V_e=\frac{1}{\omega C}I_e$となる。

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　　）