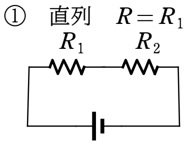
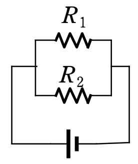
53.

電気回路

(1)　並列及び直列の合成抵抗の式

①　直列　$R=R_1+R_2$　　　②　並列　$\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}$





を導け

③　直列のとき　　$R_1:R_2=V_1:V_2$　並列のとき　　$R_1:R_2=I_2:I_1$　を示せ。

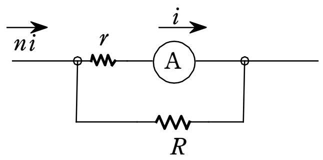
(2)　分流器、倍率器の抵抗の式

①　分流器

n倍の電流を測定できるようにするには

分流器の抵抗は　$R=\dfrac{r}{n-1}$

であることを示せ

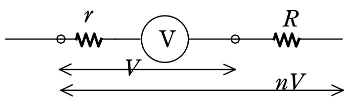


②　倍率器

n倍の電圧が測定できるようにするには

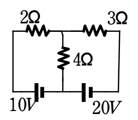
倍率器の抵抗が$R=(n-1)r$

であれば良いことを示せ。



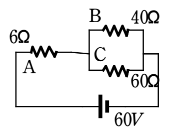
③　電流０～１Ａまで計れる内部抵抗の無視できる電流計がある。この電流計を100Ｖまで計れる電圧計に変更したい。どのようにすれば電圧計にできるか。

(3)　次の回路の電流を計算する方法を述べよ。



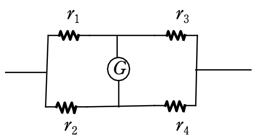
(4)　直列と並列のみでできた回路は抵抗の合成を利用することにより比較的簡単に計算できる。

その計算方法を述べよ。



(5)　ホイートストンブリッジ剣流計に電流が流れていないとき　$r_1r_4=r_2r_3$

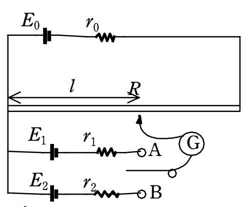
が成立していることを証明せよ。



(6)　メートルブリッジ

内部抵抗r_0、起電力E_0の電池を一様な材質で一様な太さの抵抗Rにつなぎ、内部抵抗r_1、起電力E_1の電池と内部抵抗r_2、起電力E_2の電池をつないだ。検流計の接点と抵抗の左端との距離をlとする。このときE_1とl以外はすべて未知とする。スイッチをＡにしたとき$l=l_1$のとき検流計の針は０をさし、Ｂにしたときは$l=l_2$にしたとき検流計の針が０をさした。

このとき、　$E_1:E_2=l_1:l_2$であることを示せ。

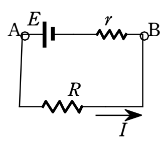


(7)　起電力E、内部抵抗rの電池に抵抗Rをつないだ電流がIのとき、

①　この電池の端子電圧は$V=-rI+E$　であることを示せ。

②　この電池の最大電力は抵抗を$R=r$

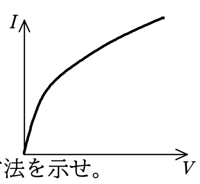
にしたときでその電力は$P=\dfrac{E^2}{4r}$であることを導け。

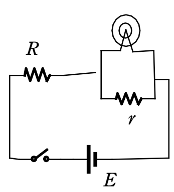


(8)　図のように電球を配線した。この電球の特性曲線が右図である。電球を流れる電流Iと電球両端電圧Vの間に

$I=\dfrac{E}{R}-\dfrac{R+r}{Rr}V$が成り立つことを示し、

これを用いて電球に流れる電流を求める方法を示せ。

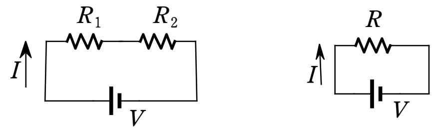




解説

(1)　①　合成抵抗を求めるということは同じ能力を有するひとつの抵抗で置き換えることを意味している。同じ能力を有する抵抗とは同じ電圧につないだとき同じ電流が流れるということである。

電圧Vの電源につないだときIの電流が流れたとすると、



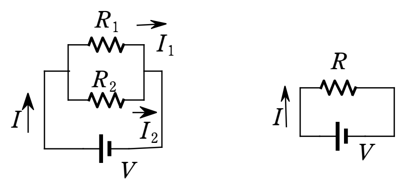
$V=R_1I+R_2I=RI$　　よって、　$R=R_1+R_2$

②　図のように電流が流れたとすると、

$I=I_1+I_2$

これより、

$I=\dfrac{V}{R}$、$I_1+I_2=\dfrac{V}{R_1}+\dfrac{V}{R_2}$



よって、　$\dfrac{V}{R}=\dfrac{V}{R_1}+\dfrac{V}{R_2}$　　∴　$\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}$

③　直列配線のときは電流が一定である。　$I=\dfrac{V_1}{R_1}=\dfrac{V_2}{R_2}$

よって、$R_1:R_2=V_1:V_2$

並列配線のときは電圧が一定である。　$V=I_1R_1=I_2R_2$

よって、$R_1:R_2=I_2:I_1$

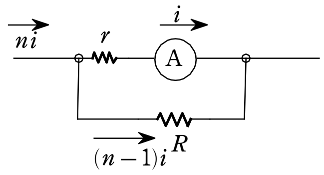
(2)　①　並列配線であるため、

$R_1:R_2=I_2:I_1$

よって、

$r:R=(n-1)i:i$

∴　$R=\dfrac{r}{n-1}$



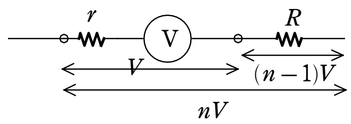
②　直列配線であるため、

$R_1:R_2=V_1:V_2$

よって、

$r:R=V:(n-1)V$

∴　$R=(n-1)r$



③　電流が１Ａ流れたときに100Vの電圧がかかっていればよい。よって、電流計と直列に100Ωの抵抗を付け加えればよいことになる。

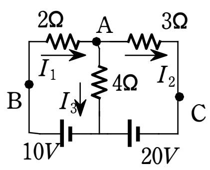
(3)　①　各抵抗を流れる電流を仮定する。

$I_{1\sim3}$の仮定

②　各交差点に流れ込む電流と交差点から出て行く電流は等しい。（キルヒホッフ第一法則）

交差点Aに入る電流はI_1

交差点Aから出る電流はI_2+I_3　　よって、$I_1=I_2+I_3$



③　電圧1周＝０

Ｂ、Ｃをスタートとして右回りに1周させる。抵抗は電流の流れに沿って移動させれば電位は下がる。流れに逆らって移動すれば電位はあがる。川の流れと同じである。

Ｂ　　$-2I_1-4I_3+10=0$

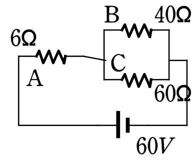
Ｃ　　$+20+4I_3-3I_2=0$

この3方程式を連立させると解ける。

これは必殺技であり、確実に解けるが一般的に複雑である。他に簡単な方法があればそれを優先すると良い。

(4)

	I	R	V
A	①	6	⑥
B	②	40	⑦
C	③	60	⑧
全体	④	⑤	60



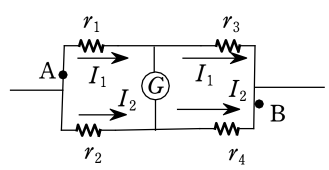
全体の合成抵抗を計算すると、⑤が埋まる。次に$V=RI$より、④が埋まる。④の電流はすべてＡを流れるため①が埋まる。$V=RI$により⑥が埋まる。BCの電流の比を使えば②③が埋まる。

(5)　まず電流を図のように仮定する。

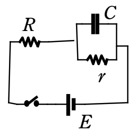
Ａ、Ｂをスタートとして右回りに電圧を1周させると、

Ａ　　$-r_1I_1+r_2I_2=0$

Ｂ　　$+r_4I_2-r_3I_1=0$



54.
コンデンサーを含む電気回路
(1) コンデンサーと抵抗を図のようにつないだとき



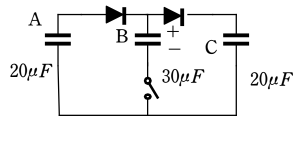
① スイッチを入れた直後の電流は$\dfrac{E}{R}$ であることを導け。

② スイッチを入れてから充分に時間がたったとき

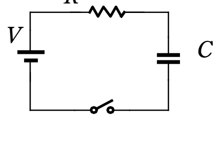
$I=\dfrac{E}{(R+r)}$の電流が流れ、コンデンサーには

$Q=\dfrac{CEr}{R+r}$の電気がたまっていることを示せ。

(2) 右の回路においてBのコンデンサーのみ
$50V$で充電しスイッチを入れた。
A,Cのコンデンサーに蓄えられた
電気量はいくらか。



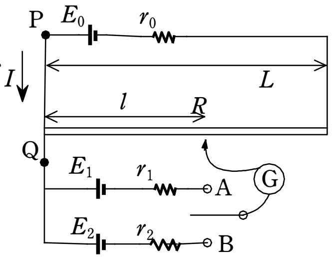
(3) 図のように起電力Vの電池と、抵抗値Rの抵抗
電気容量Cのコンデンサーをつないだ。



① コンデンサーに電気がたまっていなかったと
したとき、抵抗Rの発熱量は$\frac{1}{2}CV^2$であることを

この2式を変形すると、 $\dfrac{I_2}{I_1}=\dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{r_3}{r_4}$ これより、$r_1r_4=r_2r_3$

(6) スイッチをAにつないで、点P
をスタートとして左回りに電圧を1周させると、
$-IR-Ir_0+E_0=0$
点Qをスタートとして左回りに1周させると、



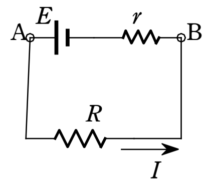
$-E_1+I\dfrac{l_1}{L}R=0$ …①
（抵抗r_1は電流が０のため電位降下０）
スイッチをBにつないで

点Qをスタートとして左回りに1周させると、 $-E_2+I\dfrac{l_2}{L}R=0$ …②

①②より、 $\dfrac{IR}{L}=\dfrac{E_1}{l_1}=\dfrac{E_2}{l_2}$ よって、$E_1:E_2=l_1:l_2$

(7) ① BからAに向けて電圧の和を求めると、
$V=-rI+E$
起電力Eを求めるにはこの式をグラフ化してその切片を求める。内部抵抗rは傾きである。

② 抵抗Rの電力は$P=RI^2$
電圧1周＝０より、



$-RI-rI+E=0$ $I=\dfrac{E}{R+r}$

$P=I^2R=\dfrac{RE^2}{(R+r)^2}$

このPの最大値を求めるのにPをRで微分すると、

$\dfrac{dP}{dR}=\dfrac{E^2(R+r)^2-2RE^2(R+r)}{(R+r)^4}=0$

$E^2(R+r)^2-2RE^2(R+r)=E^2(R+r)(-R+r)=0$

これより、 $R=r$ $P=\dfrac{E^2}{4r}$

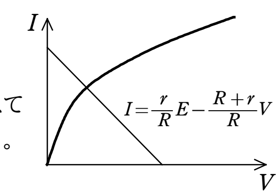
<別解>

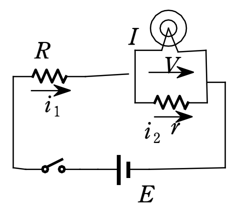
$P=I^2R=\dfrac{RE^2}{(R+r)^2}$において、$\dfrac{(R+r)^2}{R}$が最小値となればよい。

$\dfrac{(R+r)^2}{R}=R+2r+\dfrac{r^2}{R}=2r+R+\dfrac{r^2}{R}\geqq 2r+2\sqrt{R\cdot\dfrac{r^2}{R}}=4r$

（数学の相加相乗平均の大小関係を使った）

(8) 電球を流れる電流をI
電球の両端電圧をV
として、IとVの関係式
を求め、右のグラフに重ねて
その交点の座標を読み取る。



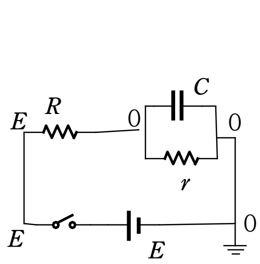


キルヒホッフの必殺技を用いる。① 電流を仮定 i_1、i_2
② 交差点に入る電流＝出る電流 $i_1=I+i_2$
③ 電圧1周＝0 $-Ri_1-V+E=0$ $V=ri_2$

この3方程式より、i_1、i_2を消去すると、$\dfrac{E-V}{R}=I+\dfrac{V}{r}$

これは、$I=\dfrac{E}{R}-\dfrac{R+r}{Rr}V$ このグラフを描きその交点を読み取ればよい。

(解説)
(1) スイッチを入れた直後はコンデンサーに電気はたまって
いない。$Q=CV$より、$Q=0$ならば、$V=0$である。
よって、コンデンサーの両端は同電位である。
1箇所をアースして回路内のすべての場所の電位
を調べると右図のようになる。



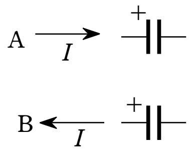
抵抗Rの方は$E=RI$より、$I=\dfrac{E}{R}$、抵抗rの方は

$0=ri$より、$i=0$ よって、この回路に$I=\dfrac{E}{R}$の電流が流れるが、rには流れていない。

コンデンサーの方に$I=\dfrac{E}{R}$の電流が流れていることになる。

スイッチを入れた直後の計算ははは電位を調べると良い。

② 充分に時間がたったときはコンデンサー満タンである。
図のAのようにコンデンサーに電流が
流れ込んでいる場合はコンデンサーの電気は
増加し、Bのように流れ出しているときは
減少している。つまり、コンデンサーが
<u>満タンであるということは電流が流れていない</u>ことを意味している。



導け。

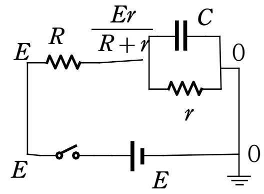
② コンデンサーを$2V$で充電してからスイッチを入れて、充分に時間がたったとき、コンデンサーにたまっていたエネルギーはどこにどれだけ配分されたか説明せよ。

③ ①②のとき、抵抗で消費される電気エネルギーは抵抗値Rに関係がないことを示せ。

よって、抵抗Rを流れる電流はそのまま抵抗rを流れる。電圧1周＝0を用いて、

$-RI-rI+E=0$ よって、$I=\dfrac{E}{(R+r)}$である。このときの電位を調べると、

抵抗rの電位降下は$\dfrac{Er}{R+r}$



コンデンサー両極端の電位差は

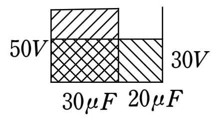
$\dfrac{Er}{R+r}$であるから、$Q=CV$より、

$Q=C\dfrac{Er}{R+r}$

スイッチを入れてから十分に時間がたったときの計算は、電流を定義してキルヒホッフの法則を使うと良い。

(2) Bの上側が正である。よって、Aには電気は流れない。ダイオードは矢印の方向のみ電流が流れ、その逆方向には流れない。よって、Cのみにたまる。

図より、Cに$600\mu F$ たまる。



(3) ①

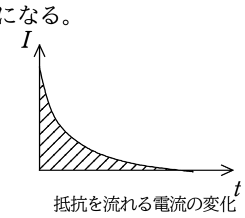
電気量Qを電池が放出したとすると、電池の仕事量は$W=QV$で表される。ところが、コンデンサーに蓄えられたエネルギーは$\dfrac{1}{2}QV$である。残りのコンデンサーに蓄えられていないエネルギーは抵抗で消費されたと考えられる。よって、抵抗で消費されたエネルギーは$QV-\dfrac{1}{2}QV=\dfrac{1}{2}CV^2$となる。

＜別解＞

抵抗で消費されるエネルギーは通常発熱量$Q=IVt$で求められるが、I、V共にコンデンサーに電荷が蓄えられることによって変化している。よってこの公式で求めることはできない。強いて用いるとすれば積分を使うことになる。

$Q=I^2R$より、

$Q=\int_0^\infty I^2Rdt$を計算すればよいことになる。



抵抗を流れる電流の変化

いまコンデンサーに$q[C]$たまっているとすると、

コンデンサーにかかる電圧は$\dfrac{q}{C}[V]$である。

よって、抵抗にかかっている電圧は$v=V-\dfrac{q}{C}$。このとき、電池からコンデンサーにdt秒間に$dq[C]$の電気量を流したとすれば電流は定義により、$I=\dfrac{dq}{dt}$となる。

よって、$I^2Rdt=Ivdt=\left(V-\dfrac{q}{C}\right)dq$となり、積分は

$$Q=\int_0^\infty I^2Rdt=\int_0^Q\left(V-\frac{q}{C}\right)dq=QV-\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}CV^2$$

となる。

② この場合電池よりコンデンサーの方が電圧が高いので、コンデンサーから電池に逆に電流が流れ込む。電池のエネルギーが増加するので電池がした仕事は負である。よって、$W=-QV$で、電池にQVのエネルギーが流れたことになる。一方、コンデンサーは、$2V$からVに電圧が減り、電気量も$2CV$からCVに減ったわけであるから、減少した（流れた）電気量は$Q=2CV-CV=CV$で、$\dfrac{1}{2}C(2V)^2-\dfrac{1}{2}CV^2=\dfrac{3}{2}CV^2$のエネルギーを放出したことになる。よって、抵抗で消費した電気エネルギーは$\dfrac{3}{2}CV^2-QV=\dfrac{1}{2}CV^2$となる。まとめると、

コンデンサーが最初持っていたエネルギー　$2CV^2$

コンデンサーに残ったエネルギー　…　$\dfrac{1}{2}CV^2$

抵抗で発熱したエネルギー　…　$\dfrac{1}{2}CV^2$

電池に蓄えられたエネルギー　…　CV^2

となる。

◎ 電池は電流を流すものというイメージがあるが入試問題を解く上では違う解釈をしなければならない。電池に電流が逆流することもあり、この場合電池は充電したのである。「**電池は電位差を維持するもの**」あるいは、「電気容量が限りなく大きいコンデンサー」と解釈すると考えやすい。

③ ①の場合も②の場合も抵抗で消費されるエネルギーは$\dfrac{1}{2}CV^2$でコンデンサーの電気容量と電圧のみによって決まっている。よって、抵抗値Rは大きくても小さくても消費電力には関係がない。抵抗が小さい場合は電流が一挙に流れるが流れる時間が短くなり、抵抗が大きい場合は電流が少ない分流れる時間が長くなっているのである。

電気回路がすべて超電導物質で組まれていた場合は流れた電子にブレーキがかからないため、抵抗で消費するはずのエネルギーは電子の運動エネルギーの形で保存されていると思われる。