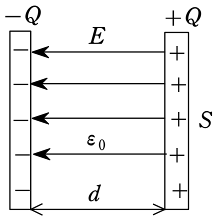
53.

コンデンサー

(1)　電場の定義を利用して$Q=CV$及び$C=\varepsilon\dfrac{S}{d}$を導け



(2)　$+Q$と$-Q$に帯電した断面積Sの金属板をdだけ離して平行に置いた。金属板間の誘電率をε_0とする

①　金属板間の電場の強さが$\dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}$であることを示せ。

②　金属板間に作用する力が$\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$と表されることを示せ。

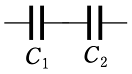
③　金属板間にたまっている静電エネルギーを求める式

$U=\dfrac{1}{2}CV^2=\dfrac{1}{2}QV=\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$

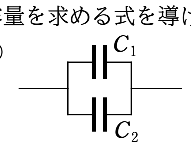
を導け

(3)　コンデンサーの並列及び直列の合成容量を求める式を導け

①



②

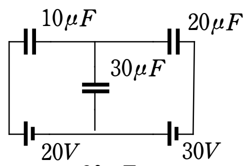


③　直列の場合　　$C_1:C_2=V_2:V_1$

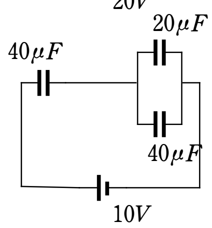
並列の場合　　$C_1:C_2=Q_1:Q_2$

を示せ。

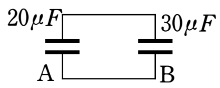
(4)　右図のような電気回路の各コンデンサーにたまっている電気量を求める方法を述べよ。



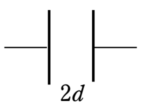
(5)　直列･並列配線のみの回路で、すべてのコンデンサーの電気が最初からであったとき、合成容量を利用して各コンデンサーの電気量を求める方法を示せ。



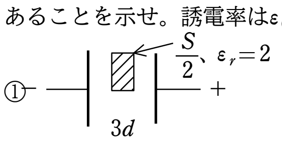
(6)　Aのコンデンサーのみを50Vで充電しBのコンデンサーに直結した。このようにコンデンサーどおしを直結した場合に簡単にBにたまる電気量を求める方法を述べよ。



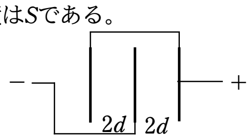
(7)　右図のようなコンデンサーの電気容量がCのとき、次の①は$\dfrac{11}{15}C$、②はのコンデンサーの電気容量で2Cあることを示せ。誘電率はε_0、極板面積はSである。



①

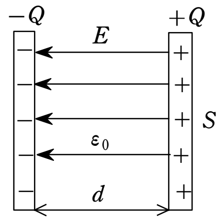


②



(解説)

(1)　電気力線密度による電場の強さは$E=\dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}$

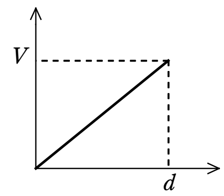


電位の傾きによる電場の強さは$E=\dfrac{V}{d}$

よって、$\dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}=\dfrac{V}{d}$

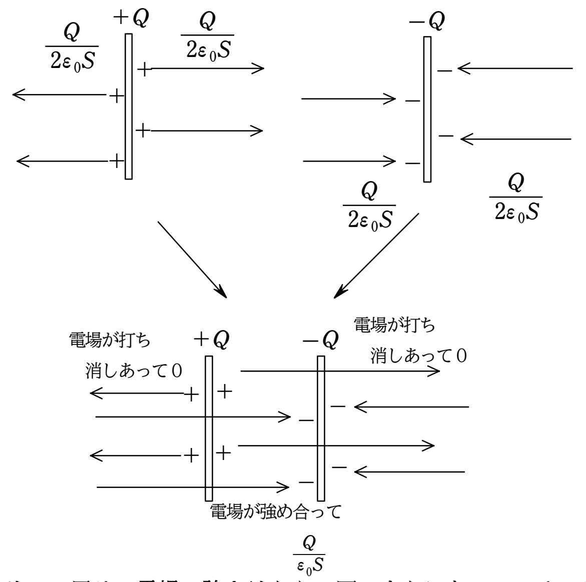
これより、$Q=\varepsilon_0\dfrac{S}{d}V$

ここで、$C=\varepsilon_0\dfrac{S}{d}$とすると、$Q=CV$



(2)　①　電気力線密度より、$E=\dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}$

②



コンデンサーの周りの電場の強さはうえの図のようになっている。$F=qE$のEには自分(q)の電場は含まれない。自分以外の電場の和である。よって、右側の電極に作用する力Fは、自分の電気量Qと相手の極板からの電場$\dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S}$の積となる。

よって、$F=qE=Q\dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S}=\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$

③　コンデンサーに蓄えられているエネルギーは極板間の空間にたまるクーロン力の位置エネルギーである。極板を力Fでd引き離すのに必要な仕事と等しい。極板を引き離しても電気力線密度は変わらないため、力Fは一定である。よって、$W=Fs$の仕事の式が使える。

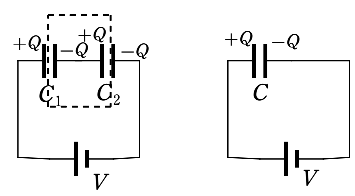
よって、$U=W=Fs=\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}d$

ここで、$C=\varepsilon_0\dfrac{S}{d}$であるから、$U=\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$となる。

この式と、$Q=CV$を用いることにより、$U=\dfrac{1}{2}CV^2=\dfrac{1}{2}QV=\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$

(3)　①　合成容量を求めるということは同等の能力を有するひとつのコンデンサーで置き換えることである。

同等の能力を有するということは同じ電圧で同じ電気量がたまるということである。



この場合、電圧Vで電荷Qがたまるとする。

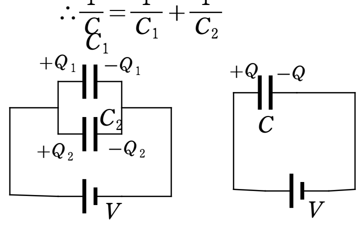
電源につながっていない部分（破線の長方形部分）の電気量は一定である。

そのため、この2つのコンデンサーにたまる電気量は等しくなる。

それぞれのコンデンサーの電圧は$V_1=\dfrac{Q}{C_1}$、$V_2=\dfrac{Q}{C_2}$

よって、$V=V_1+V_2=\dfrac{Q}{C_1}+\dfrac{Q}{C_2}=\dfrac{Q}{C}$　　　$\therefore\dfrac{1}{C}=\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2}$

②　同じ電気量がたまるのであるから、



$Q=Q_1+Q_2$

$Q=CV$より、

$Q=Q_1+Q_2=CV=C_1V+C_2V$

よって、

$C=C_1+C_2$

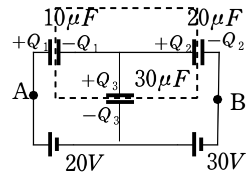
③　直列の場合　電気量Qが一定である。

よって、$Q=C_1V_1=C_2V_2$　これより、$C_1:C_2=V_2:V_1$

並列の場合　電圧Vが一定である。

よって、$V=\dfrac{Q_1}{C_1}=\dfrac{Q_2}{C_2}$　これより、$C_1:C_2=Q_1:Q_2$

(4)　次の手順で方程式を立てる。



①　各コンデンサーにたまる電気量を仮定する。

$\pm Q_{1\sim3}$を各極板に設定

②　電源につながっていない極板の電気量の各領域ごとの電気量の総和は一定である。

電気量は電源からのみ供給されるので、電源がなければ電気量は一定となる。

この場合点線の四角内の電気量が一定である。もともと電気がたまっていなかったとすれば、その和は0である。よって、

$$-Q_1+Q_2+Q_3=0$$

③　各回路において電圧1周＝0である。電圧は電位の高さを意味しており、1周して同じ位置に戻れば当然ながら1周する前と同じ電位である。

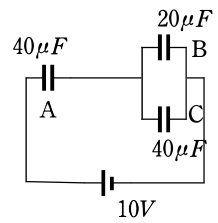
A,Bより右回りに電圧を1周させると、

A　$-\dfrac{Q_1}{10\mu}-\dfrac{Q_3}{30\mu}+20=0$　　　B　$+30+\dfrac{Q_3}{30\mu}-\dfrac{Q_2}{20\mu}=0$

この③方程式を連立して解けば、必ず解を求めることができる。この方法は必殺技であり、必ず解けるが一般的に複雑である。よって、他の解き方があればそれを優先する。

(5)

	Q	C	V
A	⑤	40μ	②
B	⑥	20μ	③
C	⑦	40μ	④
全体	⑧	①	10

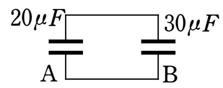


表にまとめて計算できるところから計算してすべてを埋めることを考える。

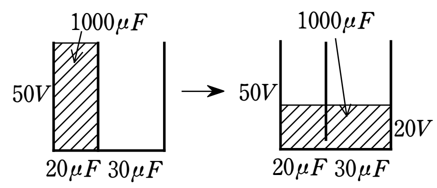
例１　全体の合成容量①を計算して、$Q=CV$で⑧を埋める。全体の電気量はAにたまる電気量と等しいため、⑤が埋まる。以下残りを埋める。

例２　BとCの合成容量を求めると、AとBCは直列になる為、電圧の比は容量の比の逆比であるから、②③④が埋まる。以下残りを埋める。

(6)　コンデンサーはバケツのイメージで考えると良い。つまり、バケツの底面積が電気容量で深さが電圧たまっている水の体積が電気量である。



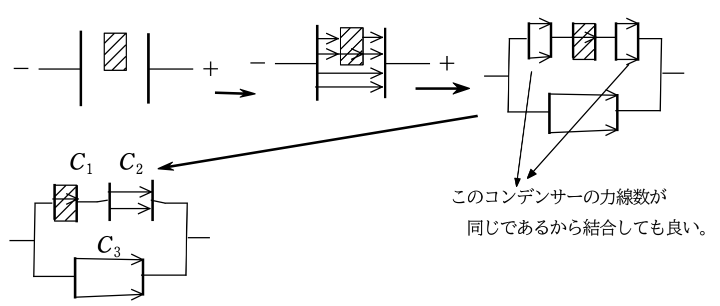
$20\mu F$のコンデンサーに$50V$の電圧をかけて充電するということは右のように片方のバケツがいっぱいになって$1000\mu F$の電気（水）がたまっている。この状態でコンデンサーを直結すると言うことは間の栓をあけてとなりのバケツに水を流したというイメージでよい。これにより、Bにたまる電気量は$600\mu F$と求められる。



(7)　元のコンデンサーの電気容量は$C=\varepsilon_0\dfrac{S}{2d}$である。

コンデンサーを分解して考えるが、分解するときに注意すべきことは分解することにより、極板間の電位差が変わってはならないということである。$V=Ed$より、電気力線の長さと電気力線密度を一定にしておけば電位差は変わらない。このことのみに注意しておけばよい。

①

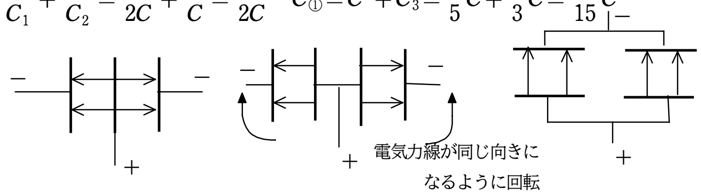


$C_1=2\varepsilon_0\dfrac{\frac{S}{2}}{d}=\varepsilon_0\dfrac{S}{d}=2C$　　$C_2=\varepsilon_0\dfrac{\frac{S}{2}}{2d}=\varepsilon_0\dfrac{S}{4d}=\dfrac{1}{2}C$　$C_3=\varepsilon_0\dfrac{\frac{S}{2}}{3d}=\varepsilon_0\dfrac{S}{6d}=\dfrac{1}{3}C$

この3コンデンサーの合成容量を求めればよい。

$\frac{1}{C'}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}=\frac{1}{2C}+\frac{2}{C}=\frac{5}{2C}$　$C_{①}=C'+C_3=\frac{2}{5}C+\frac{1}{3}C=\frac{11}{15}C$

②



$C_{②}=C_1+C_2=2C$