

A21電場・電位

53.

電場

(1) 電場の強さは+1Cの電荷に作用する力と定義されている。これを利用し、 $F=qE$ が成立することを示せ。

(2) 電気力線密度が電場の強さと定義されている。 $E[N/C]=E[\text{本}/m^2]$ である。また、電気力線1本は $\epsilon_0[C]$ の電気量から出ている。この ϵ_0 を真空誘電率と呼んでいる。

① $Q[C]$ の電荷から出ている電気力線総本数は $\frac{Q}{\epsilon_0}$ 本であることを示せ。

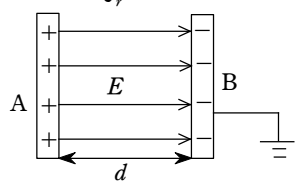
② $Q[C]$ の点電荷から $r[m]$ 離れた場所の電場の強さが $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$ であることを導け。

③ クーロンの法則と②により、 ϵ_0 がクーロン定数 k を用いて $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k}$ と表されることを示せ。

(3) 静電誘導では必要量100%の電荷が誘導される。そのため、導体内の電場は0となる。誘電分極の場合はそれ以下の電荷が誘導される。誘電率とは電気力線1本あたりの電気量である。

① 75%誘導される誘電体の誘電率はいくらか。比誘電率はいくらか。

② 比誘電率 ϵ_r の誘電体内部の電場の強さは真空の外部に比べ $\frac{1}{\epsilon_r}$ になっていることを示せ。



(4) 電位とは基準の位置から+1Cを運ぶ仕事である。

① +及び-に帯電した2枚の金属板を距離 d 離して平行に置くと、金属板間の電場の強さが E であった。このときの金属板Aの電位が $V=Ed$ であることを示せ。

② 金属板間の電位差が V であるとき、 $+q$ の電荷を負極板から正極板まで運ぶ仕事は $W=qV$ であることを示せ。

(5) $Q[C]$ の点電荷から $r[m]$ 離れた点の電位は無限大のこなたの電位を0として $V = \frac{kQ}{|r|}$ であることを導け。

(6) 電気力線に関し次のことを示せ。

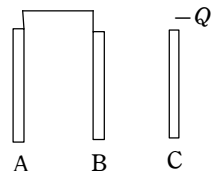
① 電気力線と等電位線は直交する。

② 電気力線どうしは反発する。

③ 1箇所に2種以上の電場がかかっている場合そのベクトル和の方向に電気力線が走る。

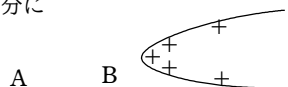
④ 金属表面から直角に電気力線が出る。

⑤ 図のような3枚の同等の金属板のうちAに $+2Q$ Cに $-Q$ 帯電させて、AとBを直結した。

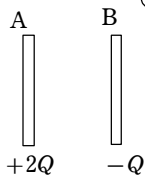


Bの金属板の帯電量が $+\frac{3}{2}Q$ となることを示せ。

⑥ 図のようなとがった金属においては先端部分に電荷が集まりやすいことを示せ。



⑦ 右図のように断面積 S の2枚の金属板にAには $+2Q$ 、Bには $-Q$ の電荷に帯電させ、 d だけ離して平行に置いた。



誘電率を ϵ とにおいて、この極板間の

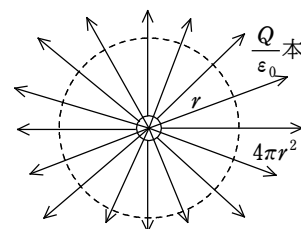
電位差が $\frac{3Qd}{2\epsilon S}$ であることを示せ。

解説

(1) 電場の強さが $E[N/C]$ ということは、 $+1C$ の電荷に作用する力が $E[N]$ であるということである。 $+q[C]$ の電荷を置いたときは、その q 倍の力が作用することになる。よって、 $F=qE$

(2) ① $Q[C]$ より、 N 本出ているとすると、 $1:\epsilon_0=N:Q$ より、 $N = \frac{Q}{\epsilon_0}$

② 電場の強さは $1m^2$ あたりの電気力線数であるから、総本数をその面積で割ればよい。面積は電気力線密度(電場)の等しいところの面積でなければならない。それは、電荷からの距離が一定の場所つまり、電荷を中心とする球面の表面積となる。



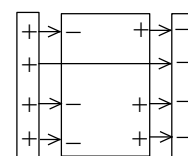
半径 r の球の表面積は $4\pi r^2$ であるから、点電荷から r 離れた点での電場の強さは

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot 4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

③ クーロンの法則 $F = k \frac{Qq}{r^2}$ は $Q[C]$ と $q[C]$ が $r[m]$ 離れているときに電荷間に作用する力である。 $+1C$ に作用する力が電場の強さであるから、 $q=1$ とすると、

$$Q[C] \text{ から } r[m] \text{ 離れたところの電場の強さとなるので、} E = k \frac{Q}{r^2}$$

②と比較することにより $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ 。



よって $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k}$

(3) ① 右図で+、-、1個が $\epsilon_0[C]$ であるとすると、金属板には $4\epsilon_0[C]$ の電荷で帯電している。

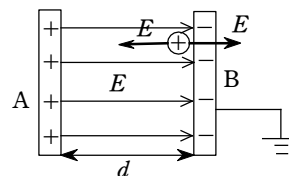
中の誘電体はその75%誘電分極しているのであるから、 $3\epsilon_0[C]$ に帯電しており、これによって電気力線が3本断ち切られている。よって、誘電体内に電気力線を1本通すには $4\epsilon_0[C]$ 必要と言うことになる。

つまり、この誘電体の誘電率は $4\epsilon_0$

比誘電率は ϵ_0 に対する比であるから 4となる。

② ①の場合誘電体内の電気力線密度は外部に対し $\frac{1}{4}$ になっている。

よって、比誘電率 ϵ_r の誘電体内部の電場の強さは真空の外部に比べ $\frac{1}{\epsilon_r}$ になっている



(4) ① 電位は電場による位置エネルギーである。

つまり、基準の位置から $+1[C]$ を外力が運ぶ仕事となる。電場の強さが E ということは $+1[C]$ を置いたときに電場から $E[N]$ の力が作用するというのである。よって、外力は E となる。この力で距離 d 運ぶ仕事は

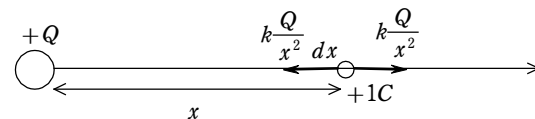
$+極板$ の電位である。よって、 $W = Ed$

② 電位差が $V[V]$ ということは $+1[C]$ を運ぶ仕事は $V[J]$ ということである。

$q[C]$ を運ぶのであるから仕事は q 倍となる。

よって、 $W = qV$

(5) 電位は $+1C$ を基準の位置から外力がつりあいの力で運ぶ仕事である。



この場合 $+1C$ であるから、電場の強さと等しい。そのクーロン力は外向きに $k \frac{Q}{x^2}$

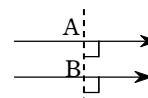
である。これとつりあう外力は内向きに $k \frac{Q}{x^2}$ である。しかし、この強さは運ぶにつれて次第に強くなるから $W = Fs$ の公式は使えない。よって、 dx 運ぶようにして積分で求める。

$$W = \int_{-\infty}^r -k \frac{Q}{x^2} dx = k \frac{Q}{r}$$

となる。このとき、クーロン力にマイナスがついているのは、この仕事自体は動かす方向と力の方向が同じであるから+であるが、 dx が減る方向に動いているから $dx < 0$ である。よって、-がつくのである。

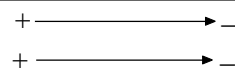
$r < 0$ のときも電位は+であるから、 $V = \frac{kQ}{|r|}$

(6) ① 電気力線は力線であるから。そのベクトルに沿って力が作用する。よって、その直角方向にはクーロン力はまったく作用しない。電位は $+1C$ を動かすときの仕事



であるから、AからBに $+1C$ を動かすと力が作用しないから仕事は0である。よって、AとBの電位差は0である。ABは等電位線となる。

② 電気力線は+〜-の向きである。同じ方向の
 電気力線は同じ電荷が重なるので、反発する。

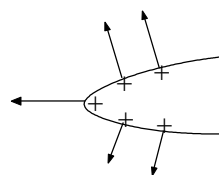


③ 電場とは+1Cに作用する力である。測定位置に+1Cをおくと、2方向に力を受ける。力であるから合成可能で、それはベクトル和である。ベクトル和の方向に力が作用する。電気力線は力が働く線であるから、このベクトル和の方向に走る。

④ 金属内に電位差が存在すると、自由電子の移動が起こる。よって、金属内はすべて同電位であり、金属表面は等電位線となっている。つまり、導体内では電場は0である。そのため、電気力線は金属面に直角である。

⑤ Cは $-Q$ であるから、Bに $+Q$ の電気がやってくる。BとCが $\pm Q$ で電気力線がつながるため、それ以外にはこの電荷の電気力線が存在しなくなる。この状態はこの電荷がないのと同じ状態であり、残りの $+Q$ の電荷はA、Bに均等に分布することになる。よって、Aは $+\frac{1}{2}Q$ 、Bは $+\frac{3}{2}Q$ となる。

⑥ 電荷が等間隔に並んでいると、先端部分の電気力線の間隔があいてしまう。電気力線は互いに反発するので、先端部分に電荷が集まる。



⑦ 極板間のAからの電場は $\frac{1}{2} \frac{2Q}{\epsilon S} = \frac{Q}{\epsilon S}$ 、Bからの電場は $\frac{1}{2} \frac{Q}{\epsilon S}$ 、この両方の電場は同じ方向であるから合成電場は $\frac{3}{2} \frac{Q}{\epsilon S}$ 。よって、 $V = Ed = \frac{3Qd}{2\epsilon S}$