77.

近似計算

(1) $R>>r>0$ のとき、$R+r$ と R の和･差･積･商を答えよ。

(2) $x \fallingdotseq 0$ のとき、$\sqrt{1+x} \fallingdotseq 1+\frac{1}{2}x$ とおけることを示せ。

(3) $x \fallingdotseq 0$ のとき、$\sin x \fallingdotseq \tan x \fallingdotseq x$ とおけることを示せ。

(4) $x \fallingdotseq 0$ のとき、$(1+x)^2 \fallingdotseq 1+2x$ とおけることを示せ。

(5) $x \fallingdotseq 0$ のとき、$\frac{1}{1+x} \fallingdotseq 1-x$ とおけることを示せ。

解説

(1) 和　$R+r+R=2R+r$ で $2R>>r$ であるため、r は省略可能である。よって、$2R$

差　$R+r-R=r$　ここで、$R+r \fallingdotseq R$ と r を省略してしまうと０となり、答えは合わなくなる。差をとる場合は省略してはならない。

積　$(R+r)R=R^2+Rr$　ここで、$R^2>>Rr$ であるから Rr は省略してもよい。

よって、R^2

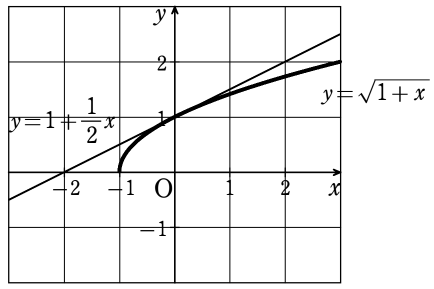
商　$\frac{R+r}{R}=1+\frac{r}{R}$ で $1>>\frac{r}{R}$ となり、$\frac{r}{R}$ は省略してよい。よって、１となる。

しかしこの場合、後ほど１を引くなどの操作をしなければならないときは省略してはならない。

(2) $\left(1+\frac{1}{2}x\right)^2=1+x+\frac{1}{4}x^2$ ここで、$\frac{1}{4}x^2$ は前項に対してはるかに小さくなるので、省略可能である。よって、$\left(1+\frac{1}{2}x\right)^2 \fallingdotseq 1+x$ となり、両辺平方根すると、$\sqrt{1+x} \fallingdotseq 1+\frac{1}{2}x$ となる。このとき第二項の x は1よりはるかに小さいので省略可能ではあるが、そうすると、すべて１になってしまうので、近似計算の意味がなくなる。よって第三項のみの省略となる。

<別解>

$\sqrt{1+x}$ において $x=0$ 周辺の近似式を求めればよいのであるが、右のグラフのとおり、$x=0$ における接線の方程式を求めれば、その周辺での近似式になる。



この式を微分すると、

$y'=(\sqrt{1+x})'=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$

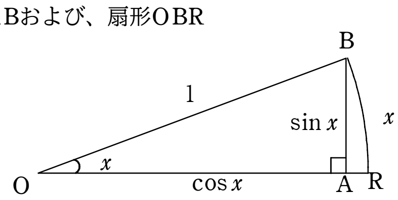
これにより、$x=0$ における微係数（接線の傾き）は $\frac{1}{2}$ である。

接線は点(0,1)を通るために、接線の方程式は $y=\frac{1}{2}x+1$ となる。

接線は近似式そのものである。

以降(3)、(4)ともにこの方法で近似式を求めることは可能である。

(3) 図のように斜辺OB＝１の直角三角形OABおよび、扇形OBRにおいて、



$x=$ 弧BR、$\sin x=\mathrm{AB}$、$\tan x=\frac{AB}{OA}$

となる。

$x \to 0$ となると、$\mathrm{AB} \fallingdotseq \widehat{BR}$、$\mathrm{OB} \fallingdotseq \mathrm{OA}$

となり、

$\sin x \to x$、$\tan x=\frac{AB}{OA} \to \frac{AB}{OB}=\sin x \to x$ となる。

よって、$\sin x \fallingdotseq \tan x \fallingdotseq x$ といえる。

(2)のように数学の微分法を用いて接線の方程式を求めても良い。

(4) $(1+x)^2=1+2x+x^2$

ここで $1>>x>0$ より、x^2 の項は無視しても良い。

よって、$(1+x)^2 \fallingdotseq 1+2x$

(2)のように数学の微分法を用いて接線の方程式を求めても良い。

(5) $\frac{1}{1+x}=\frac{1-x}{(1+x)(1-x)}=\frac{1-x}{1-x^2}$

ここで $1>>x>0$ より、x^2 の項は無視しても良い。

よって、

$\frac{1}{1+x} \fallingdotseq 1-x$　　となる。

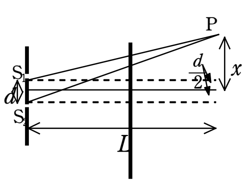
(2)のように数学の微分法を用いて接線の方程式を求めても良い。

78.

光の干渉

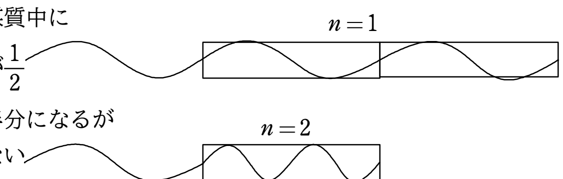
(1) 光学距離が等しい場合は位相差も同じであることを示せ。

(2) ヤングの実験における干渉条件式 $\frac{xd}{L}=m\lambda$ を導け



解説

(1) 屈折率が２の媒質中に入った光は速さが $\frac{1}{2}$ になり、波長も半分になるが振動数は変わらない



そのため、同じ振動する間に進む距離は $\frac{1}{2}$ になっている。よってその距離に屈折率をかけると元の長さと同じになる。

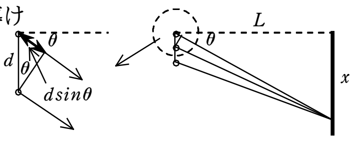
光学距離＝屈折率×距離は同じ振動回数となるから位相差が同じである。

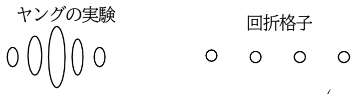
異なる媒質中を通過した光が干渉を起こす場合は、途中で波長が変化するために単純に位相差を求めようとすると大変複雑になる。ところが、光学距離を使えば、波長がすべて同じと考えてよいので、単純に距離差で経路差を計算することができる。よって、光の干渉のときに計算する経路差はすべて光学経路差にすると良い。

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　　）

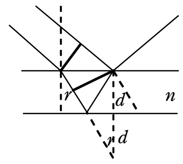
(3) ① 回折格子の干渉条件式 $dsin\theta=m\lambda$ を導け

② 回折格子による明点はヤングの実験と異なり明点の間隔が広い理由を説明せよ。





(4) 薄膜の干渉の条件式 $2ndcosr=\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda$ を導け

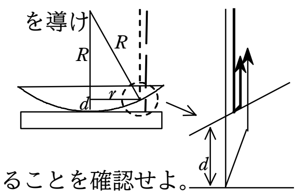


(5) ① ニュートンリングの干渉条件式 $\frac{r^2}{R}=\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda$ を導け

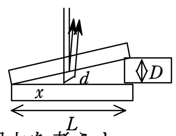
② リングの中心は明るいか暗いか

③ 反対側から見た場合どのように見えるか説明せよ。

④ 干渉が起こっても光のエネルギーは保存されていることを確認せよ。



(6) 楔の干渉条件式 $\frac{2xD}{L}=\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda$ を導け



(7) 光の経路差が小さいときしか干渉は起こらない。この理由を考えよ。

(2) 経路差 $=S_2P-S_1P=\frac{S_2P^2-S_1P^2}{S_2P+S_1P}=\frac{\left\{L^2+\left(x+\frac{d}{2}\right)^2\right\}-\left\{L^2+\left(x-\frac{d}{2}\right)^2\right\}}{2L}=\frac{xd}{L}$

これが波長の整数倍のとき波が強めあう。

よって、$\frac{xd}{L}=m\lambda$

(3) ① 図より経路差は$dsin\theta$である。

これより、$dsin\theta=m\lambda$のとき光が強めあう。

長さLとxを用いて表すと、$tan\theta=\frac{x}{L}$

$\theta\fallingdotseq0$のとき、$sin\theta\fallingdotseq tan\theta$であるから、 $dsin\theta=dtan\theta=\frac{dx}{L}$

よって、$\frac{dx}{L}=m\lambda$とヤングの実験と同じ結論になる。

② ヤングの実験におけるスリット間隔dは$0.4mm$前後であるのに対して回折格子は$\frac{1}{30}mm$前後である。$\frac{dx}{L}=m\lambda$より、dが小さくなると、xは大きくなる。

また、ヤングの実験は2本の光の干渉である。これは、2本の光の位相が完全に一致していなくてもある程度の明るさ（光の振幅）がある。干渉条件を満たすときが最大の振幅であるというだけである。一方回折格子では数百本の光の干渉であるから、位相が少しでもずれると、数百本の光の位相が少しずつずれることになり、平均して光の振幅が０となる。よって完全に位相が一致しない限り、明るくならないのである。

(4) 屈折率nの薄膜に入射角i、屈折角rで

A,Bに入射した光がB点で干渉する。

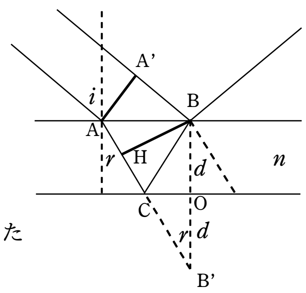
波面AA’が波面BB’になるわけであるから

A’BとAHは光学距離が等しい。

よって、Aの光とBの光の経路差は

$\overline{HC}+\overline{CB}$となる。

この距離を求めるのに、点Bの薄膜の下面を軸とした対称点をB’とする。



△BCO≡△B’COであるから、$\overline{HC}+\overline{CB}=\overline{HB'}$

よって、経路差 $=\overline{HB'}=2dcosr$

光学経路差は$2ndcosr$である。

B点は反射面のほうが屈折率が大きいため、固定端反射で位相が反転する。一方C点は反射面のほうが屈折率が小さいため自由端反射で位相のずれはない。よって、この場合通常の強めあう条件が弱めあい、弱めあう条件が強めあうことになる。

強めあう条件は $2ndcosr=\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda$

入射角でなく屈折角を使うには屈折の法則

$\frac{sini}{sinr}=n$と連立すると良い。

$cosr=\sqrt{1-sin^2r}=\sqrt{1-\frac{sin^2i}{n^2}}$ を代入すると、

$2d\sqrt{n^2-sin^2i}=\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda$である。

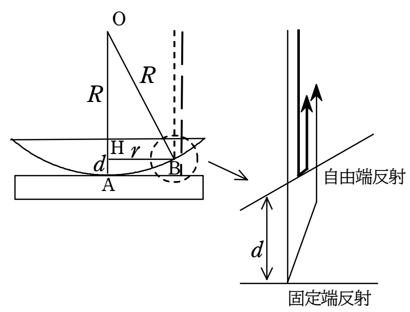
(5) ① △OBHにおいて、

OB $=R$

OH $=R-d$

AH $=d$

とすると、三平方の定理より



$R^2=(R-d)^2+r^2$

$R^2=R^2-2Rd+d^2+r^2$

ここで、$d^2<<2Rd$より、

$2Rd=r^2$となる。

よって、経路差 $=2d=\frac{r^2}{R}$

この場合の反射は自由端反射と固定端反射であるから、弱めあう条件が強めあう条件になる。

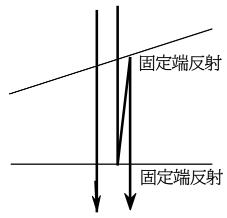
よって、強め合う条件は $\frac{r^2}{R}=\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda$

② リングの中心は$r=0$である。上の干渉条件式は整数mに何を入れても成り立たな

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　)

い。よって、暗環である。

③　裏から見た場合は図のような反射をする。



この場合経路差は$2d$でどちらも固定端反射である。そのため、通常の強め合う条件がそのまま強めあう条件となる。

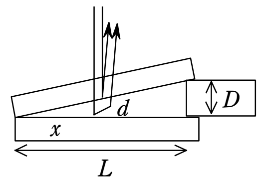
よって、$\dfrac{r^2}{R}=m\lambda$

このため、裏から見た場合は表と明暗が逆になる。

④　③により光が反射しない部分は透過し、反射する部分は透過しないのであるから、楔通過前後の光の量は変わらないので、光のエネルギーは保存されているといえる。

(6)　三角形の相似より$x:d=L:D$

よって、経路差$=2d=\dfrac{xD}{L}$



ニュートンリングと同じく固定端反射と自由端反射であるから、弱めあう条件が強めあうことになる。

よって、$\dfrac{2xD}{L}=\left(m+\dfrac{1}{2}\right)\lambda$

(7)　白色光の場合は、経路差が小さいときは可視光線$0.38\mu m<\lambda<0.78\mu m$の間であるひとつの波長しか干渉条件を満たさないが、経路差が大きくなると複数の波長で干渉条件を満たすことになるため複数の色が重なりスペクトルが見えなくなり、干渉していないように見える。

単色光の場合光の波長が完全に同じでなく多少ブレがあるためあるいは反射面が一定でなくある範囲で反射しているためその誤差が累積し干渉縞が消えると考えられる。

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　)