77.

共振共鳴

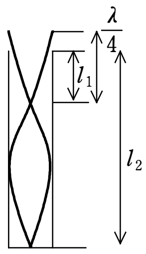
(1) 長さl、線密度ρの弦が張力Tで張られている。この弦がn倍振動しているとき、

① 弦を伝わる波の速さが$v=\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$であることを示せ

② 弦の振動数が$f=\dfrac{n}{2l}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$であることを示せ

③ 弦の振動が定常波である理由と、特定の振動数でしか振動できない理由を説明し、n倍振動は振動数がn倍、波長が$\dfrac{1}{n}$倍であることを説明せよ。

(2) 気柱の共鳴において第一共鳴点までの気柱の長さがl_1、第2共鳴点までの気柱の長さがl_2のとき、音速をVとする。



① このときの音は定常波を形成していることを示せ。

② 音の振動数は$f=\dfrac{V}{2(l_2-l_1)}$であり、

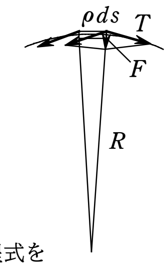
開口端補正は$\dfrac{l_2-3l_1}{2}$であることを導け

③ $2m+1$倍振動になっても開口端補正は変わらないとして、長さl_2の時の$2m+1$倍振動の振動数が$f=\dfrac{1}{6}\dfrac{2m+1}{l_2-l_1}V$であることを示せ。

(解説)

(1) ① 回転半径Rの曲がった弦に張力Tが作用しており、その合力をFとする。

弦の微小部分の長さをdsとすると三角形の相似より



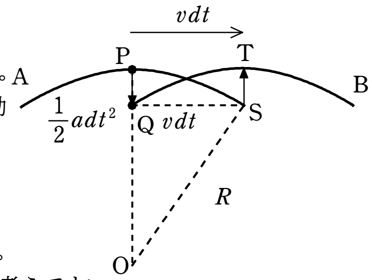
$T:F=R:ds$ よって、 $F=\dfrac{T}{R}ds$

その微小部分の質量はρdsで表される。

この運動は円運動の一部であると考えて運動方程式を立てると、$\rho ds\cdot\dfrac{v^2}{R}=F=\dfrac{T}{R}ds$

これを解くと $v=\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$

＜別解＞



dt秒間に弦Aが弦Bの状態になったとする。このとき、弦はあくまで上下方向にしか動いていない。形が右方向にvで動いているこのvが波の速さである。

弦A上の頂点Pは単振動によりdt秒後には点Qに達する。この間の加速度がaとする。

dtは非常に短い時間であるからaは一定と考えてよい。

PQの距離は等加速度の式より$\dfrac{1}{2}adt^2$となる。弦A上の点Sがdt秒後に弦Bの頂点Tに達したとし、この弦の曲率半径をR、円の中心をOとすると、SO$=R$、SQ$=vdt$、

OQ$=R-\dfrac{1}{2}adt^2$となる。

直角三角形OSQで三平方の定理を用いると、

$OQ^2+SQ^2=SO^2$で、これは、

$\left(R-\dfrac{1}{2}adt^2\right)^2+(vdt)^2=R^2$となる。

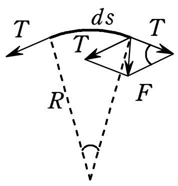
展開して

$R^2-aRdt^2+\dfrac{1}{4}a^2dt^4+v^2dt^2=R^2$

ここでdt^4の項はdt^2の項よりもはるかに小さいために省略すると、この式は

$aRdt^2=v^2dt^2$となり、 $a=\dfrac{v^2}{R}$となる。この式は向心加速度と同じ式である。

弦Aの頂点周辺の微小部分（長さds）をとる。この弦の線密度（1ｍあたりの長さ）をρとすると、この微小部分の質量はρdsである。また、弦の張力をTとすると、その合力Fは図より、$R:ds=T:F$となる。



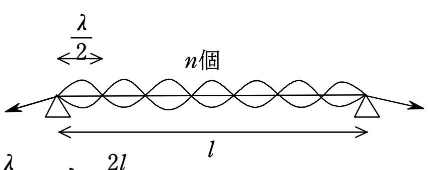
よって、$F=\dfrac{T}{R}ds$

それぞれを運動方程式に代入して

$F=\dfrac{T}{R}ds=\rho ds\cdot\dfrac{v^2}{R}$

これを解くと、

$v=\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$ が成立する。



② n倍振動は振動単位がn個ある。ひとつの振動単位の長さは$\dfrac{\lambda}{2}$であるから、 $l=n\dfrac{\lambda}{2}$ $\lambda=\dfrac{2l}{n}$

が成立する。

$v=f\lambda$より、$\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}=f\dfrac{2l}{n}$ よって、 $f=\dfrac{n}{2l}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$

③ この弦の波は横波であり、弦の両端で固定端反射を繰り返し、波が弦を何回も往復している。よって、特定の波長のときのみ、往復してきた波と位相が一致することになり、位相がずれたときは何回も往復する間に打ち消しあう。一致する場合のみ振動することになる。

この定常波の両端は常に節であるから、弦の長さLは$\dfrac{\lambda}{2}$の整数倍になる。

よって、$L=\dfrac{n\lambda}{2}$のときのみ振動可能である。よって、$f=\dfrac{v}{\lambda}=n\dfrac{v}{2L}$で振動数が$n$倍になっている。

また、$\lambda=\dfrac{2L}{n}$であり、n倍振動は波長が$\dfrac{1}{n}$になっている。

＜別解＞

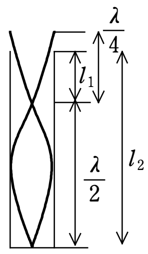
（ ）組（ ）番 名前（ ）

波の反射におけるLで反射する定常波の式　$y=2A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{L}{\lambda}\right)\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{L}{\lambda}\right)$

で$\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{L}{\lambda}\right)=0$の位置が節である。$x=0,L$で節でなければならない。$x=L$で明らかであるから、$x=0$で、$\sin 2\pi\left(-\frac{L}{\lambda}\right)=0$　これは$\frac{2\pi L}{\lambda}=n\pi$のとき成立する。

よって、$L=n\frac{\lambda}{2}$、このときのみ振動可能である。

(2)　①　この場合音波であるため、縦波である。この縦波は気柱の底で固定端反射をし、管口のところで自由端反射をしている。そのため、定常波を形成している。管の中の空気はこの振動数のみで振動できる。この振動が管に伝わり、管がこの振動数で振動することになり、管の振動が音として聞こえるのである。



②　図より、$l_2=l_1+\frac{\lambda}{2}$　　よって、$\lambda=2(l_2-l_1)$

$v=f\lambda$　　$V=f\cdot 2(l_2-l_1)$

よって、$f=\frac{V}{2(l_2-l_1)}$

開口端補正は図より、　$\Delta l=\frac{\lambda}{4}-l_1=\frac{l_2-3l_1}{2}$

③　$2m+1$倍振動は$\frac{\lambda}{4}$の部分が$2m+1$個あることを意味している。よって、定常波を起こしている部分は$\frac{2m+1}{4}\lambda$となる。この長さがl_2+開口端補正である。

よって、$\frac{2m+1}{4}\lambda=l_2+\frac{l_2-3l_1}{2}$　　振動数は　$f=\frac{1}{6}\frac{2m+1}{l_2-l_1}V$

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)