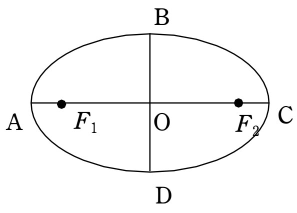
60.

楕円の性質

AOを長半径、BOを短半径という。

AO＝a、BO＝bとする。

楕円とは２焦点F_1、F_2からの距離の和が一定である点の軌跡である。



(1)　$BF_1 = a$であることを証明せよ。

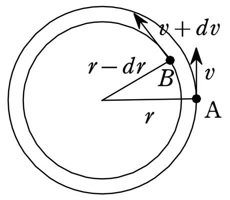
(2)　$AF_1 = R$とするとき、$F_1C = 2a - R$を導け。

(3)　$F_1O = \sqrt{a^2 - b^2}$であることを導き、$e = \dfrac{F_1O}{AO}$で定義されるeが$\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$で表されることを導け。

61.

ケプラーの法則

(1)　A点を速度vで等速円運動している物体に向心力と等しい力を加えてゆっくりと、内側に引くと速さが$v+dv$の等速円運動に変わった。これを利用してケプラーの第二法則を導け。



(2)　楕円軌道の周期は軌道の半長径のみによってきまることをケプラーの第二法則を用いて証明せよ。

(3)　万有引力の法則$F = G\dfrac{Mm}{r^2}$を用いてケプラーの第三法則を導け。

(解説)

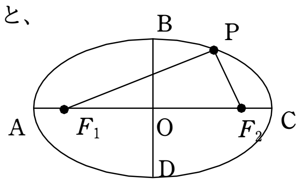
(1)　楕円の定義により楕円周上の任意の点をPとすると、

$F_1P + F_2P$は一定となる。

$F_1A = F_2C$であることから、

$F_1A + F_2A = AC = 2a$となる。

$F_1P + F_2P = F_1A + F_2A = 2a$である。



ここで、点Pを点Bの位置に置くと、

$F_1B + F_2B = 2a$、また、楕円の対象性から$F_1B = F_2B$

よって、$BF_1 = a$となる。（aを平均半径ともいう）

(2)　$AF_1 + F_1C = 2a$より、$F_1C = 2a - R$

(3)　△F_1BOは直角三角形であるから、三平方の定理より、

$F_1O = \sqrt{F_1B^2 - BO^2} = \sqrt{a^2 - b^2}$

$e = \dfrac{F_1O}{AO} = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$である。

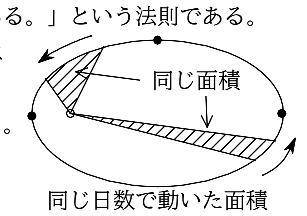
このeを離心率といい、楕円の形を現す数値である。$e=0$は円軌道をあらわし、$0<e<1$は楕円軌道で、eが大きいほど細長い楕円となる。$e=1$で放物線、$e>1$は双曲線という。天体のA点での速度が速くなればなるほどeは大きくなる。

地球表面をAとすると、$v = 7.9$km/sのとき$e=0$（第一宇宙速度）で$v=11.2$km/sで$e=1$（第二宇宙速度）となる。

(解説)

(1)　ケプラーの第二法則とは、「太陽の周りを回っている惑星と太陽を結ぶ線分（動径）が単位時間に描く面積は常に一定である。」という法則である。

惑星が軌道上で太陽に近づいたときは速く動き、遠ざかったときは遅くなるということを示した法則である。入試では黒点の位置での速度の計算が出題される。



<証明>

A点での物体のエネルギーは$\dfrac{1}{2}mv^2$、B点では$\dfrac{1}{2}m(v+dv)^2$でAからBに動かすのに

$W = Fs = \dfrac{mv^2}{r}(r - dr - r) = -\dfrac{mv^2}{r}dr$の仕事をしている。

よって、

$\dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{mv^2}{r}dr = \dfrac{1}{2}m(v+dv)^2$が成立。

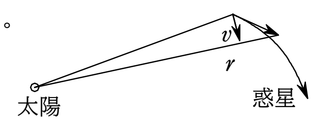
これを簡単にすると、

$vdr + rdv = 0$　これは積の微分である。よって、$(rv)' = 0$

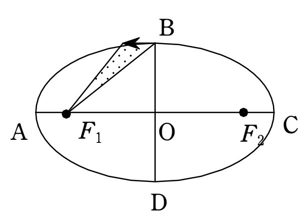
積分すると、rv＝一定となる。または、$\dfrac{1}{2}rv$＝一定

この式の左辺は動径(r)が1秒間に描く面積を意味しており、ケプラーの第二法則である。

この式におけるvは円運動で計算しているため、動径と直角方向の速度を意味しており、楕円運動でも$\dfrac{1}{2}rv$は1秒間に描く面積になる。



(2)　楕円の面積はBO＝b、AO＝aとするとπabである。$BF_1 = a$は平均距離であり、ケプラーの第二法則により1秒間に描く面積（図の影の部分）は一定である。そのため、Bにおける速度は平均速度となる。この平均速度を$\overline{v}$とすると、この面積は$\dfrac{1}{2}b\overline{v}$となる。



これより、周期は楕円の面積をこの面積で割れば求められる。

よって、

$T = \dfrac{\pi ab}{\dfrac{1}{2}b\overline{v}} = \dfrac{2\pi a}{\overline{v}}$　　変形すると　$\overline{v} = \dfrac{2\pi a}{T}$

右の式より平均速度$\overline{v}$は半径aの円軌道の軌道速度を意味していることが分かる。

左の式の中にbが含まれない。このことは周期は平均半径aのみによって決まることを意味している。

(3)　ケプラーの第三法則とは…

「惑星軌道の平均半径（楕円の長半径）の３乗と公転周期の２乗の比は、すべて一定である」という法則で、楕円軌道でも円軌道でも成立している。太陽に近い軌道を回っている惑星の公転周期は短く、太陽から遠くを回っている惑星の公転周期は長いことを意味している。

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

62.

万有引力

地球の質量をM、地球の半径をR、万有引力定数をGとする。

(1)　万有引力＝重力であることを示し、$g=G\dfrac{M}{R^2}$であることを導け。

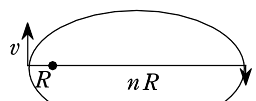
(2)　万有引力による位置エネルギーは無限大のかなたを０とすると、$U=-\dfrac{GMm}{R}$であることを示せ。

(3)　地表付近において$R>>h$のとき、Rと$R+h$の間の位置エネルギーはmghであることを示せ。

(4)　地球表面すれすれに飛ぶ人工衛星の速さは$v=\sqrt{\dfrac{GM}{R}}$であることを導け。

(5)　力学的エネルギーの和が0以上ならば無限大のかなたまで移動できる理由を説明し、地球表面から地球の重力圏を脱出する速さ（脱出速度）は$v=\sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$であることを導け。

(6)　質量Mの天体からR離れた位置から天体と直角方向に速さvで宇宙船を飛ばすと、nRの位置を遠地点とする円運動をした。このとき$v=\sqrt{\dfrac{2nGM}{(n+1)R}}$が成立することを示せ。



＜証明＞

軌道半径aの円運動をしているとして運動方程式を立てると、

$\dfrac{m\overline{v}^2}{a}=G\dfrac{Mm}{a^2}$　ここで、$\overline{v}=\dfrac{2\pi a}{T}$とおくと、

$m\left(\dfrac{2\pi a}{T}\right)^2=G\dfrac{Mm}{a}$　これを簡単にすると、$\dfrac{a^3}{T^2}=\dfrac{GM}{4\pi^2}$

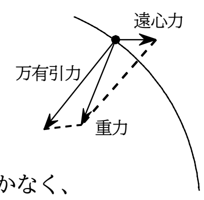
右辺が一定であるため、これはケプラーの第三法則である。

ケプラーの第三法則を使うのか、その他の法則を使うのか悩むことが多いが、天体が円運動しているときは、運動方程式で十分である。ケプラーの第二･第三を使わなければならないのは楕円軌道のときのみであると考えていたほうが良いと思われる。

解説

(1)　万有引力は地球の中心に向かって作用する力

重力は物体を引く力である。同じように見えるが、地球上の物体はすべて地球と同じように24時間で1周する円運動をしているため、遠心力が外向きにかかっているように見える。重力は万有引力にこの遠心力を合成したものである。

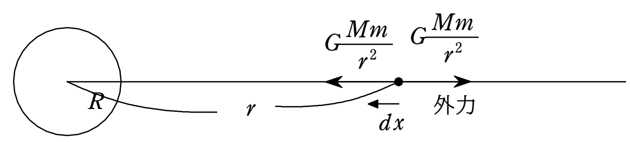


しかし、遠心力は地球の自転が緩やかで万有引力の0.3%ほどしかなく、有効数字の範囲内に収まる。よって、万有引力＝重力としても差し支えない。

$mg=G\dfrac{Mm}{R^2}$より、$g=G\dfrac{M}{R^2}$となる。

出題される問題はGMが使えないことが多いのでこの式を用いてGMを消去する。

(2)



位置エネルギーは基準の位置から外力がゆっくりと（等しい力で）運ぶ仕事である。

基準の位置が無限大であり、そこから地表まで外力がする仕事を計算すればよい。

この場合力が一定でないため少しの距離dxを運ぶ仕事を求める。

$U=\displaystyle\int_{\infty}^{R}G\dfrac{Mm}{r^2}dr=\left[-G\dfrac{Mm}{r}\right]_{\infty}^{R}=-\dfrac{GMm}{R}$

ここで、仕事は外力と動かす方向が逆であり、負であるがるがdrが減らす方向であるので負となるため、式の符号は＋である。

(3)　位置エネルギーは高いほう（$R+h$）の位置エネルギーが、大きいので、この方からRでの位置エネルギーを引くとよい。

$U=-\dfrac{GMm}{R+h}-\left(-\dfrac{GMm}{R}\right)=\dfrac{GMmh}{R(R+h)}$

ここで$R+h\fallingdotseq R$であるから、

$U=\dfrac{GM}{R^2}mh$

また、$g=\dfrac{GM}{R^2}$より、$U=mgh$となる。

重力の位置エネルギーの公式mghは地球の表面付近で$R>>h$のときに成立する公式である。$U=-\dfrac{GMm}{R}$はすべての領域で使える式である。

(4)　この人工衛星に作用する力は万有引力であるから、円運動の向心加速度を用いた運動方程式は$m\dfrac{v^2}{R}=\dfrac{GMm}{R^2}$。これを解くと、$v=\sqrt{\dfrac{GM}{R}}$

(5)　重力の位置エネルギーの基準は無限大のかなたである。このことの意味は無限大のかなたに存在していることを意味している。無限大のかなたには重力が存在していないので、この状態での力学的エネルギーは運動エネルギーのみである。運動エネルギーは負になることはないので、無限大のかなたでは0以上となる。よって、エネルギー保存則が成立する限りにおいて、力学的エネルギーの和が0以上であれば無限大のかなたに行くことは可能である。現実的には時間が無限にかかるため不可能ではある。よって、地球表面と無限大のかなたでエネルギー保存則を使う

$\dfrac{1}{2}mv^2-\dfrac{GMm}{R}=0$

これを解くと$v=\sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$

これは、円軌道速度の$\sqrt{2}$倍の速さがあれば無限のかなたまでいけることを意味している。

(6)　遠地点での速度をVとすると、ケプラーの第二法則より$Rv=nRV$…①

エネルギー保存則より、$\dfrac{1}{2}mv^2-\dfrac{GMm}{R}=\dfrac{1}{2}mV^2-\dfrac{GMm}{nR}$…②

①②を連立して解くと$v=\sqrt{\dfrac{2nGM}{(n+1)R}}$となる。

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)