60.

運動量　＜質量×速度で定義される物体の運動の激しさを表すベクトル。＞

「力とは速度を変化させるもの」より、力と速度変化すなわち加速度との関係が示されるが、加速度から力は求められない。質量が必要なのである。そして、質量は変化しないから。「力とは質量×速度を変化させるもの」と考えても差し支えない。

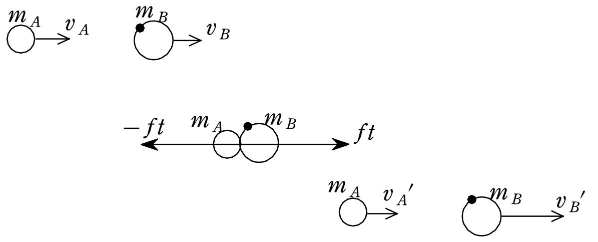
よって、「力とは運動量を変化させるもの」と言える。

(1)　上記考え方を用いて、$mv-mv_0=ft$を導け。

(2)　図はA,B2物体が衝突する様子を示している。この図より運動量保存則

$m_Av_A+m_Bv_B=m_Av_A'+m_Bv_B'$

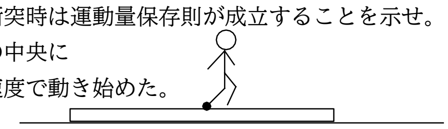
を導け。また、外力が作用しないときのみ成り立つことを示せ。



(3)　上の図で物体B上に人が乗っていて物体Aを眺めているとする。物体Aは物体Bに接近し衝突して再び離れる様子が想像できる。はね返り係数は衝突前後の相対速度比の絶対値であるとして、$e=-\dfrac{v_A'-v_B'}{v_A-v_B}$であることを示せ。

(4)　滑らかな水平面上の運動と衝突時は運動量保存則が成立することを示せ。

(5)　滑らかな水平面上にある台の中央に人が乗っており右に一定の加速度で動き始めた。このときの人と台の質量比を$m_1:m_2$とするとき、人と台の変位の大きさの比$x_1:x_2$、速度比を$v_1:v_2$、加速度比を$a_1:a_2$とするとき、

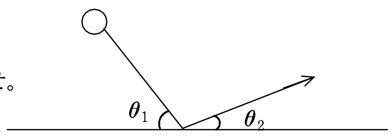


$x_1:x_2=v_1:v_2=a_1:a_2=m_2:m_1$

であることを証明せよ。

(6)　高さHの位置から水平面にボールを落としたところhの高さまで跳ね返ってきた。このボールと床の跳ね返り係数は$e=\sqrt{\dfrac{h}{H}}$で表されることを示せ。

(7)　はね返り係数eのボールが滑らかな水平面に衝突したとき、$tan\theta_2=etan\theta_1$の関係があることを示せ。

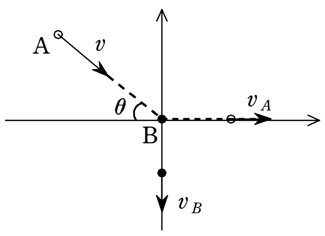


(8)　同じ質量の物体の直線上の弾性衝突について

①　その速度が衝突によって入れ替わることを示せ。

②　エネルギー保存則が成立していることを示せ。

(9)　図のように質量mの物体Aが速さvで水平方向からθの方向より静止している質量mの物体Bに衝突したところ、Bは真下に、Aは水平にそれぞれ、v_A,v_Bの速さで飛び去った。このときはね返り係数が1であることを証明せよ。



(10)　２物体の衝突前後で２物体の重心の速度は変化しないことを証明せよ。

解説

(1)　1秒間の運動量変化は$\dfrac{mv-mv_0}{t}$である。これが力であるから。

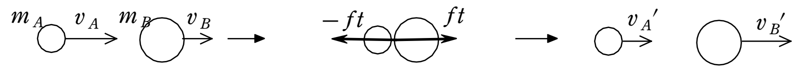
$f=\dfrac{mv-mv_0}{t}$　よって、$mv-mv_0=ft$

＜確認＞　加速度は1秒間の速度変化であることを利用し

$f=ma=m\dfrac{v-v_0}{t}=\dfrac{mv-mv_0}{t}$

(2)　物体Aに関する力積　$m_Av_A'-m_Av_A=-ft$

物体Bに関する力積　$m_Bv_B'-m_Bv_B=ft$



この2式においてf、tは測定が難しい要素である。そこでこの2式を加えるとftが消去され、$m_Av_A+m_Bv_B=m_Av_A'+m_Bv_B'$が成立する。これが運動量保存則である。

運動量保存則が成立するには、2式を加えたときのftが消去されなければならない。この物体に作用する力が、作用･反作用のみであるから、互いに打ち消されて消去が可能である。もし作用又は反作用がなければこの式は成立しない。作用･反作用両方そろっている場合を内力といい、片方だけの場合を外力という。よって、外力がない場合、運動量保存則が成立する。おもに衝突時と滑らかな水平面上の運動で考える。

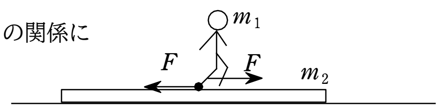
滑らかな水平面上の問題⟹運動量保存則とエネルギー保存則を考えよ。

(3)　衝突前にBからAを見た相対速度はv_A-v_Bであり、この後衝突するのであるから、この値は正となる。衝突後BからAを見た相対速度は$v_A'-v_B'$である。衝突後は互いに離れていくのでこの値は負となる。その比は$\dfrac{v_A'-v_B'}{v_A-v_B}$であるがこの符号は必ず負となるので、$e=-\dfrac{v_A'-v_B'}{v_A-v_B}$とする。

(4)　滑らかな水平面上は重力以外は作用していないが重力は垂直抗力にて打ち消されており、外力が作用していないため、運動量保存則が成立している。

衝突時は衝突が一瞬で起こるために、重力などの外力が衝突の瞬間に作用する力に比べてはるかに小さい力積になるため、運動量保存則が成立する。

(5)　人と台との間に作用する力は摩擦力であり、互いに作用反作用の関係にあるため、その大きさは等しい人と台の加速度をそれぞれ、



a_1、a_2とするとき、それぞれの物体に関する運動方程式が成立する。

$F=m_1a_1$　　$F=m_2a_2$　よって、$m_1a_1=m_2a_2$　$\therefore a_1:a_2=m_2:m_1$

それぞれの物体の速度をv_1、v_2とすると、運動量保存則より、$m_1v_1-m_2v_2=0$

左辺が差になっているのは、速度が逆であるためである。

よって、$v_1:v_2=m_2:m_1$

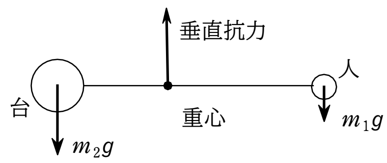
外力が加わっていないため、この人と、台の重心の位置は変わらない。（重心は静止している）人と台の動いた距離を、それぞれx_1、x_2とし、重心を回転の中心としたモーメントを考えれば、$x_1m_1g=x_2m_2g$

よって、$x_1:x_2=m_2:m_1$

以上をまとめると、

$x_1:x_2=v_1:v_2=a_1:a_2=m_2:m_1$

となる。



＜別解＞

一定の力で加速すれば、$x_1=\dfrac{1}{2}a_1t^2$、$x_2=\dfrac{1}{2}a_2t^2$、$v_1=a_1t$、$v_2=a_2t$

これより　$x_1:x_2=v_1:v_2=a_1:a_2$

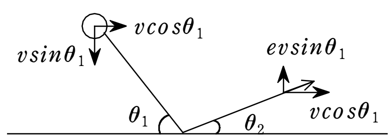
(6)　高さHのところから自由落下させた場合、落下直前の速さはエネルギー保存則より$\dfrac{1}{2}mv^2=mgH$、これより、$v=\sqrt{2gH}$。初速度v'で真上に投げたボールの最高点の高さはエネルギー保存則より、$\dfrac{1}{2}mv'^2=mgh$。これより、$v'=\sqrt{2gh}$

よって、跳ね返り係数は、$e=\dfrac{v'}{v}=\dfrac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gH}}=\sqrt{\dfrac{h}{H}}$となる。

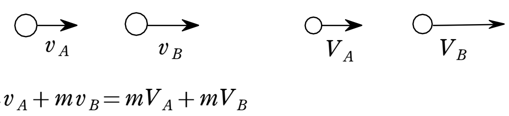
(7)　滑らかな水平面に衝突しているわけであるから水平方向の速さは一定である。

$tan\theta_2=\dfrac{evsin\theta_1}{vcos\theta_1}$が成立。

よって、$tan\theta_2=etan\theta_1$



(8)



①

運動量保存則より、　$mv_A+mv_B=mV_A+mV_B$

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　)

はね返り係数　$-\dfrac{V_A - V_B}{v_A - v_B} = 1$

これを解くことにより　$V_A = v_B$　、　$V_B = v_A$

よって、質量の等しい物体の弾性衝突はその速度が入れ替わることがいえる。

（直線上の衝突でなくても質量の等しい物体の弾性衝突はその速度が入れ替わる。）

②　衝突後の運動エネルギーの和は

$$\frac{1}{2}mV_A{}^2 + \frac{1}{2}mV_B{}^2 = \frac{1}{2}mv_A{}^2 + \frac{1}{2}mv_B{}^2$$

となり、エネルギー保存則が成立している。

（弾性衝突はどのような衝突でもすべてエネルギーが保存される。）

逆にはね返り係数が１未満（非弾性衝突）のときは衝突によってエネルギーが失われるので、エネルギー保存則が使えない。

(9)　運動量保存則

水平方向　$v\cos\theta = v_A$

鉛直方向　$v\sin\theta = v_B$

はね返り係数　$e = \dfrac{v_B}{v\sin\theta} = 1$

（滑らかな面の衝突と同じで水平方向のみではね返り係数を求める）

＜別解＞

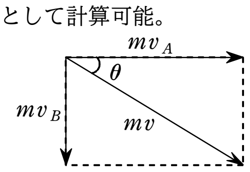
エネルギー保存則が成立していれば$e=1$である。

$$\frac{1}{2}mv_A{}^2 + \frac{1}{2}mv_B{}^2 = \frac{1}{2}m(v^2\cos^2\theta + v^2\sin^2\theta) = \frac{1}{2}mv^2$$

＜別解＞

運動量はベクトルである。よってベクトルとして計算可能。

各運動量は図のような関係がある。



三平方の定理より、

$v_A{}^2 + v_B{}^2 = v^2$　が成立。

これは

$$\frac{1}{2}mv_A{}^2 + \frac{1}{2}mv_B{}^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

を意味し、エネルギー保存則が成立しているため、はね返り係数は１である。

等しい質量の静止している物体に衝突した後、互いに直角方向に速度を持てばはね返り係数が１である。またこの逆も言える。

＜証明＞

運動量保存則より$\vec{v} = \vec{v_A} + \vec{v_B}$

両辺同じベクトルの内積を取ると、$|\vec{v}|^2 = |\vec{v_A} + \vec{v_B}|^2$

これは、$|\vec{v}|^2 = |\vec{v_A}|^2 + \vec{v_A}\cdot\vec{v_B} + |\vec{v_B}|^2$

よって、$\vec{v_A}\cdot\vec{v_B} = 0$　$\Leftrightarrow$　$|\vec{v}|^2 = |\vec{v_A}|^2 + |\vec{v_B}|^2$

（速度が互いに直角方向）　（エネルギー保存則成立）

静止している質量が等しい物体に衝突するとき、

衝突後の速度が直角ならばエネルギー保存則が成立（はね返り係数＝１）、また、エネルギー保存則が成立するなら、衝突後の速度は互いに直角であるといえる。

(10)　衝突において重心には外力が作用していないため、重心の速度は変化しない。

で説明は十分であるが、数式を用いて説明しよう。

衝突前の物体A、Bの速度を$\vec{v_1}$、$\vec{v_2}$とし、衝突後の速度を$\vec{v_1}'$、$\vec{v_2}'$とするとき、

運動量保存則より$m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = m_1\vec{v_1}' + m_2\vec{v_2}'$が成立する。

物体A、Bの位置ベクトルを$\vec{x_1}$、$\vec{x_2}$とすると、

重心の座標は$\vec{x_G} = \dfrac{m_1\vec{x_1} + m_2\vec{x_2}}{m_1 + m_2}$である。よって、重心の速度$\vec{v_G}$は

$$\vec{v_G} = \frac{d\vec{x_G}}{dt} = \frac{m_1\dfrac{d\vec{x_1}}{dt} + m_2\dfrac{d\vec{x_2}}{dt}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}}{m_1 + m_2}$$

この式の分子は運動量の和になっている。運動量保存則より、この値は一定となる。

よって、重心の速度は変化しない。