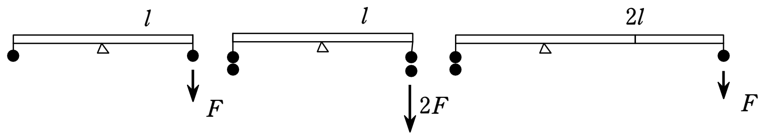
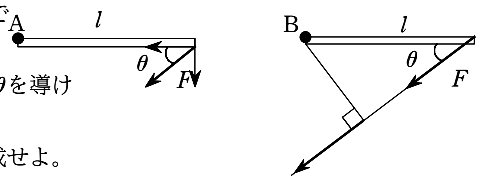
16.

力のモーメント　＜物体を回転させようとする能力＞



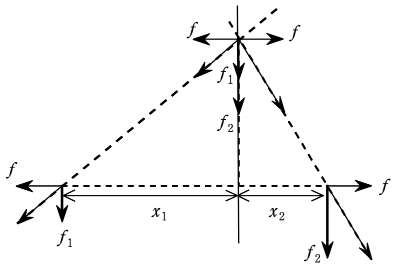
(1)　上の図を見て、力のモーメント（回転力）がFlで定義されている理由を説明せよ。

(2)　図A、Bを見てそれぞれの方法で黒点の位置を中心とする力のモーメントを求める式$M=Flsin\theta$を導け



(3)　次の平行な2力を作図により合成せよ。

(4)　平行な2力の合成の下の図を見て、次の3点を証明せよ。

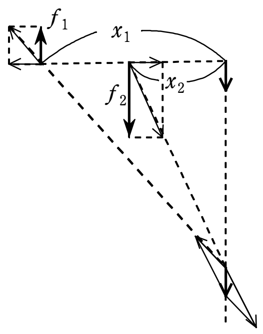


①　合成した力は元の力と平行である。

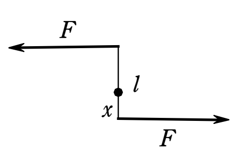
②　合成した力の大きさは元の力の大きさの和である。

③　作用線の位置は$x_1:x_2=f_2:f_1$であり、モーメントの和が０になる位置である。

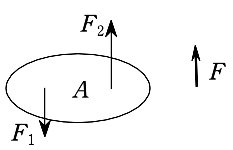
(5)　逆向きの2力の合成も同じようにして$x_1:x_2=f_2:f_1$が成立する。証明せよ。



(6)　偶力は唯一合成不可能な２力である。物体に偶力が作用すると、移動せずに回転のみが起こる。図を見て、偶力のモーメントがFlであることを証明し、あわせて、回転の中心がどこでも良いことを示せ。



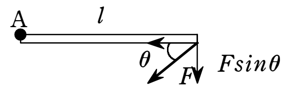
(7)　図のように物体Aに作用していたF_1、F_2を合成すると、その合力Fは物体からはみ出してしまう。このときでもFは合力として考えることができるが、この理由を考えよ。



解説

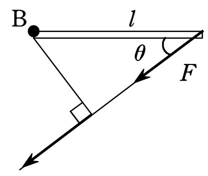
(1)　腕の長さが同じとき、右のおもり（力）が２倍になれば回転力も２倍になっている。また、同じおもりでも腕の長さが２倍になれば回転力も２倍になっている。つまり、回転力は力と腕の長さに比例している。よって、力と腕の長さの積に比例するので、この積を回転力と定義している。この定義によれば、力と腕は垂直の必要がある。
垂直でない場合は次の問題。

(2)　Aの場合



力の合成分解は自由である。
よって、力Fを棒に垂直な方向と平行な方向に分けても物体の速度変化は同じである。
このとき、棒と平行な方向の力は棒を回転させる能力を持たない。よって、回転力は棒に垂直な力のみとなり、$M=Flsin\theta$が成立。

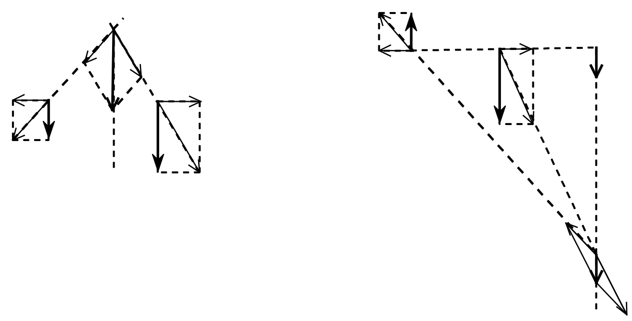
Bの場合



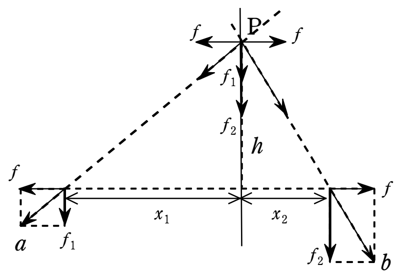
力は作用線上を自由に動かしてよい。
回転軸からこの作用線上に垂線を下ろしその足に力を移動させる。この場合垂線の長さが$lsin\theta$である。
この場合の回転力は$M=Flsin\theta$である。

(3)　・　力は同一作用線上を自由に動かしてよい。
・　力の合成分解は自由に行ってよい。
・　同一作用線上逆向き同じ大きさの力は勝手に付け加えても良いし、取り去っても良い。

この3点のみを用いて作図する。
この3点はその操作を行っても物体の速度変化は変わらない。そのため、この3点のみを用いて力を操作すれば、最初の状態と物体の速度変化は同じであるため、同じ力といってよい。



(4)



f_1とfを合成した力aとf_2とfを合成した力bをその作用線の交点Pまで平行移動する。点Pでこの力を再びf_1とf、f_2とfに分解する。aとbの合力が求める合成した力であるが、同時にf_1とf、f_2とfの合力でもある。２つのfが互いに逆向きであるから打ち消しあう。よって、この合力の方向はf_1、f_2と同じ方向になる。（①）

結局P点で、f_1とf_2を合成することになり、これは同じ方向であるから単に和を求めればよい。（②）

三角形の相似を利用することにより、$f:f_1=x_1:h$　$f:f_2=x_2:h$が成立。
この2式よりf,hを消去すると、$x_1:x_2=f_2:f_1$が求められる。

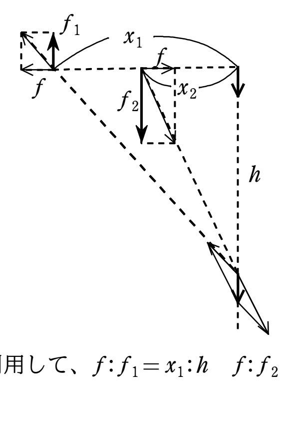
この式は$f_1x_1=f_2x_2$となり、モーメントのつりあいの関係にある。

これにより

「すべての力のモーメントの和が０になる位置に合力の作用線が存在する。」

がいえる。

(5)



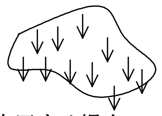
三角形の相似を利用して、$f:f_1=x_1:h$　$f:f_2=x_2:h$

17.

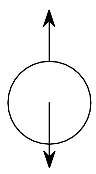
重心　<重力が一点に作用したとしたときの作用点>

重力が作用する作用線を重力作用線という。2本の重力作用線の交点が重心である。

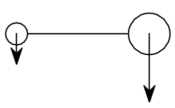
(1)　物体に作用する重力は、物体を構成するすべての原子に作用している。これらすべての重力は平行力なので合成可能である。すべての原子に作用する重力を合成した1本の重力の方向と大きさについて説明せよ。また、重力のみが作用する場合物体は回転しないことを示せ。



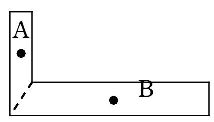
(2)　物体を一本のロープでつるしたとき、この張力の作用線が重力作用線であることを説明せよ。



(3)　2物体に作用する合力の作用線が重力作用線であることを説明せよ。



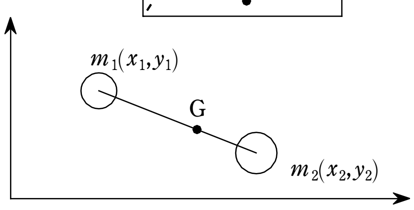
(4)　黒点A,Bはそれぞれの部分の重心である。その重力の大きさの比は2：1であるとして重心の位置を示せ。



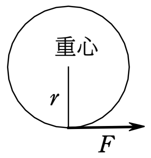
(5)　座標(x_1,y_1)に質量m_1の物体を座標(x_2,y_2)に質量m_2の物体があるときの重心の座標は

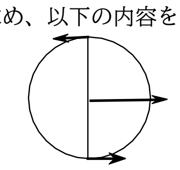
$$G\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2},\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}\right)$$

であることを導け



(6)　偶力は移動なしの回転のみを起こし、重心を作用線に含む力は回転なしで移動のみとなる。物体に力が作用すると回転しながら移動する。これはすべての力は偶力と、重心を作用線に含む力に分けられることを示している。下の回転円盤に作用する力を分解したときの併進する力と、偶力のモーメントを求め、以下の内容を証明せよ。





①　重心を作用線に含む力のみが作用した物体は回転せずに移動する。

②　偶力は物体を回転させるのみで物体を移動させない。

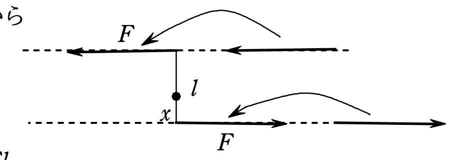
③　回転を考えなくて良いときは力を作用線外に平行移動しても良い。

これより、$x_1:x_2=f_2:f_1$が成立。

(6)　回転の中心が不明であるから、任意の位置を回転の中心とし、その点を含む2本の作用線どおしの垂線の足に、それぞれに力を移動する。

2本の作用線間隔をlとし、回転の中心から一方の作用線までの距離をxとすると、この点の周りの力のモーメントは

$M=Fx+F(l-x)=Fl$



となる。よって、偶力のモーメントはFlである。また、この式からxが消えている。これはxをどのような値にしても（回転の中心をどこにしても）モーメントは同じということになる。つまり、回転の中心は偶力に関してどこでもよいということになる。

(7)　2本の力F_1、F_2と一本の力Fは同じ力である。力は目に見えないものであり、その位置は不確定である。考えやすいように矢印であらわしているだけなので、作用線が物体から離れていても差し支えない。どうしても気になれば、分解された複数の力が物体に作用していると認識すればよい。

そのため、物体から離れたところに作用線がある力を考えるときはその物体から細くて軽い棒が出ていてその棒に力が作用していると考えればよい。

解説

(1)　平行力の合成には次のような性質がある。（平行力の合成の項参照）

①　合成した力もまた元の力と平行である。

②　合成した力の大きさは、元の力の単純和である。

③　作用線に位置に関して$f_1:f_2=x_2:x_1$の関係が成り立つ。

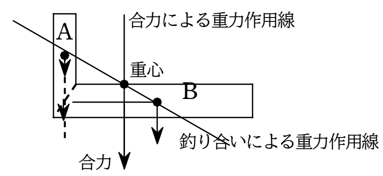
このことを参考にすると、合成した重力の方向は元の重力と同じ下向きであり、その大きさは、各原子すべてにかかる重力の和＝全体の重さになることがわかる。また、③により、$f_1x_1=f_2x_2$が成り立っている。これは、重力の作用線の位置では各原子に作用する重力のモーメントの和が0であることを意味している。よって、重力のみが作用する場合物体は回転しない。

(2)　張力と重力はつりあい関係にあるため、同一作用線上逆向き大きさの力の関係にある。よって、張力と同一作用線上に作用するため、この作用線は重力の作用線と同じである。

(3)　重力は物体のすべての点に作用している。重心に作用する重力はそのすべての微小重力の合力である。

平行な力を合成すると、方向は元の力と平行で、大きさは元の力の大きさの和であるから、重心に作用する合成した重力は下向きで、大きさはその物体の重さとなる。よって、2物体に作用する重力の合力が重力作用線となる。

(4)　張力の釣り合いによる作用線と合力の作用線を作図しその交点を求める。

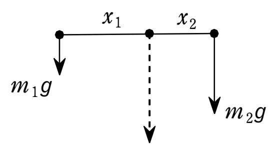


(5)　合力の位置は

$x_1:x_2=m_2g:m_1g=m_2:m_1$

すなわち重心はm_1とm_2を$m_2:m_1$に内分する点である。

よって、(x_1,y_1)と(x_2,y_2)を$m_2:m_1$に内分する点が重心である。



数学の内分の公式より、

$$G\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2},\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}\right)$$

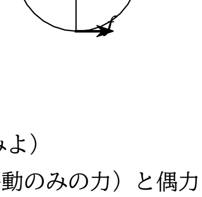
となる。

(6)　平行力の合力の大きさは作用線の位置に関係なく和のみで決められるゆえ　$F=f-f+f'$

となり、$f'=F$となる。

元の力による力のモーメントはFrである。

右図における偶力のモーメントは$2fr$。よって、



$Fr=2fr$　　　$f=\dfrac{F}{2}$となる。

この3力を合成すると元の力Fになる。（作図で確認してみよ）

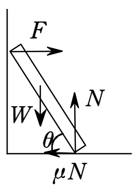
このことは物体に働くすべての力は重心に作用する力（移動のみの力）と偶力（回転のみの力）に分けられることを意味している。つまり、物体は回転しながら移動するのである。

①　上の内容は物体に加わるすべての力は重心を作用線とする力と偶力に分けられることを意味している。左図の力と右図の偶力は同じ回転力（力のモーメント）である。よって、重心に作用している力に回転力はない。移動のみである。

18.

剛体のつりあい

(1) 図のように摩擦のある床と滑らかな壁との間に棒を立てかけた。角度を少しずつ下げていくと角θのときに初めて滑り始めた。このとき、



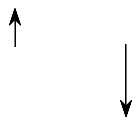
① 鉛直方向の釣り合いと水平方向のつりあいは作用線が異なっても大きさのみでつりあっていることを示せ。

② 回転の中心はどこでもよいことを示せ。

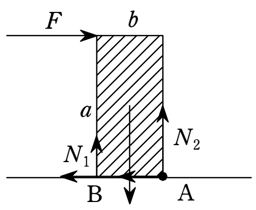
③ 静止摩擦係数は$\mu=\dfrac{1}{2tan\theta}$であることを導け。

(2) すべての力の作用線が一点で交わり、かつ、大きさがつりあっていれば、その物体は回転しない。これを説明し、上記の問題をこの考え方で解け。

(3) この2力の合力を剛体のつりあいの考え方を利用して求めよ。



(4) 図のような直方体に力Fを加えた。このとき、物体が滑らずに倒れるための条件は$N_1=0$であり、すべるための条件は$N_1>0$であることを説明せよ。



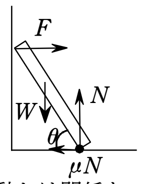
19.

② 偶力は逆向きで同じ大きさの力である。平行力の合成で証明したとおり、大きさのみは作用線が違っても和を求めてもよいという結果になった。それを用いると、偶力の大きさの和は0となる。よって、偶力に物体を移動させる能力はない。

③ この事実は、1本の力を作用線以外に平行移動したとき、重心の動きは共通で、回転のみが変化することを意味している。よって、回転を考えないときは作用線外に平行移動しても良い。

解説

(1)



① 平行力の合成の項により、

(a) 合成した力も元と平行

(b) 合成した力の大きさは元の力の和である。

鉛直方向、水平方向の力の釣り合いであるから上の2点より、作用線の位置は偶力の回転と関係し、移動とは関係ないことになる。その方向に限って考えれば、大きさのみのつりあいでよいことになる。

② すべての力を重心に作用する力と偶力にわけることができるが、大きさが水平方向鉛直方向でつりあっている場合は、重心に作用する力は0となり、残る力は偶力のみとなる。偶力の回転の中心はどこでもよいため、この場合の回転の中心もどこでもよい。

③ この棒は上下方向に速度変化しない。よって上下方向の力はつりあっている。NとWの作用線は異なるが、大きさのみは作用線無視で計算してよい。

（前述･平行力の合成）よって、 $N=W$

同じく、左右方向にもこの物体は速度変化しない。

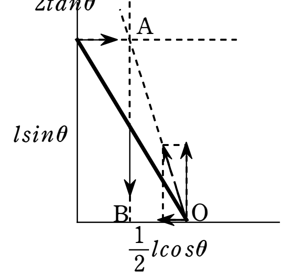
よって、 $F=\mu N$

回転の中心はどこでも良い（前述･偶力）。黒点位置を回転の中心とすると、モーメントのつりあいは、棒の長さをlとして、

$$Wcos\theta\cdot\frac{l}{2}=Fsin\theta\cdot l$$

となる。これを連立して解けばよい。$\mu=\dfrac{1}{2tan\theta}$となる。

(2) 力は作用線上に動かしてもよい。もし、作用線上に動かして1点で交われば合成することが可能であり、合成の結果0になってしまえば力が作用していないのと同じになる。



△AOBに注目すると

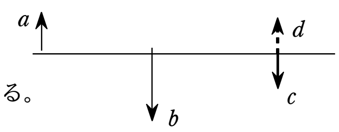
$$tan\angle AOB=\frac{N}{\mu N}=\frac{lsin\theta}{\frac{1}{2}lcos\theta}$$

これより、$\mu=\dfrac{1}{2tan\theta}$

このやり方は一般的にすばやくできることが多い。

(3) aとbの合力をcとする。

力の合成分解は自由であり、物体にaとbの力が作用した場合と、cが作用した場合では同じ速度変化をする。つまり、まったく同等である。



よって、cの力と同一作用線上逆向き同じ大きさの力dを加えると、cとdはつりあう。cとdがつりあうということは、a,b,dがつりあっているということになる。この釣り合いによって、cを求めることができる。

(4) 傾くかすべるかを考えるときは物体の両端に垂直抗力を考える。この場合点Aを中心として回転するので、最大摩擦力がかかったとき、すべるか傾くかを考えればよい。最大摩擦力がかかったとき$N_1=0$の場合、垂直抗力は必ず正であるから、物体はこの状態を保つことはあり得ない。つまり、物体はB点から離れるのである。これはこの物体が回転することを意味する。

また、最大摩擦力がかかっても$N_1>0$でつりあっている場合は、回転しないことを意味しているから、それを少しでも超えた力が加わると、最大摩擦力を超えて物体がすべることを意味している。

この状態で2本の垂直抗力を合成すると、回転しない場合は$N_1>0$であるから、その合力の作用点はこの直方体上に存在する。回転する場合は$N_1=0$となるゆえ、合力の作用点は点Aの右側に来る。この場合そこには物体が存在しないため、物体を支えられずにこの物体は回転すると考えられる。

解説