

# 運動方程式

16.

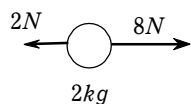
運動方程式  $\langle ma = F \rangle$

1 Nとは1kgの物体に $1m/s^2$ の加速度を生じさせる力である。

(1) 運動方程式  $m\vec{a} = \vec{F}$  を導け

(2) 右図のように力が働いているとき、  
加速度を  $a$  とすると、運動方程式は

$2a = 8 - 2$  となるが、右辺が  $8 - 2$  となる理由を説明せよ。



重力

(3) 空中にあるすべての物体は重力加速度  $g$  で落下する。このことを用いて重力の大きさが  $mg$  であることを示せ。

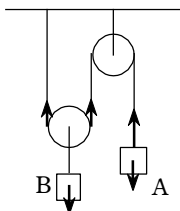
動滑車

(4) Aの移動距離を  $x_A$ 、速さ  $v_A$ 、加速度  $a_A$

Bのそれを  $x_B$ 、 $v_B$ 、 $a_B$  とすると、

$$x_A : x_B = v_A : v_B = a_A : a_B = 2 : 1$$

であることを示せ。

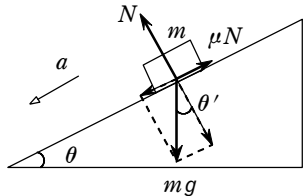


(5) 頂角  $\theta$ 、動摩擦係数  $\mu$  の斜面上にある質量  $m$  の物体が滑っている。垂直抗力を  $N$ 、加速度を  $a$  とするとき、

① 図において  $\theta = \theta'$  であることを証明せよ。

②  $mg \cos \theta = \mu N$  が成立することを「力とは速度を変化させるもの」の視点に立って説明せよ。

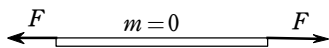
③  $mg \sin \theta - \mu N = ma$  が成立することを「力とは速度を変化させるもの」の視点に立って説明せよ。



17.

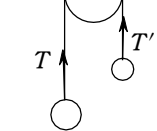
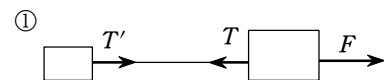
張力

(1) 質量0の物体に作用する力の合力は0であることを示せ。

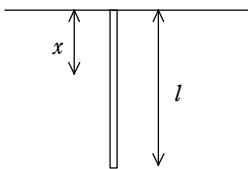


(2) 図において張力  $T$  と  $T'$  は等しいことを示せ。

② 滑らかに回る質量の無視できる滑車



(3) 質量  $m$ 、長さ  $l$  のロープを天井からつるしたとき、ロープの上端から  $x$  の位置のロープの張力は  $\frac{mg(l-x)}{l}$  であることを導け。



解説

(1) 加速度を  $a$  倍するには  $a$  倍の力が必要であり、 $m$  倍の質量の物体に同じ加速度を生じさせる力も  $m$  倍必要である。よって、加速度が  $a$  倍、質量が  $m$  倍になったときは  $ma$  倍の力が必要となる。よって  $F = ma$  といえる。

また、力の作用する方向を加速度の方向と定義すれば加速度と同じ方向になるので、 $m\vec{a} = \vec{F}$  といえる。

(2) 右側に作用している  $8N$  の力は、 $6N$  と  $2N$  の力にわけることができる。この  $2N$  と左側の  $2N$  は同一作用線上逆向き同じ大きさであるから互いに打ち消しあう。よって、残りの  $6N$  の力がこの物体を加速する。

(3) 空中にある質量  $m$  の物体は加速度  $g$  で等加速度運動をする。

よって、運動方程式は  $mg = F$

となり、この物体に働いている重力の大きさは  $mg$  となる。

(4) Bが下がったとすると、その部分のひもは動滑車の右側と左側が共に  $h$  だけ伸びなければならないため、両方で  $2h$  伸びる必要がある。この部分がAが縮んで補充される形となる。よって、

$$x_A : x_B = 2h : h = 2 : 1$$

この動きは同じ時間で行われるため、

$$x_A : x_B = \frac{1}{2} a_A t^2 : \frac{1}{2} a_B t^2 = a_A : a_B = 2 : 1$$

$$v_A : v_B = a_A t : a_B t = a_A : a_B = 2 : 1$$

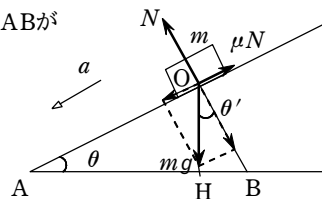
$$\text{よって、} x_A : x_B = v_A : v_B = a_A : a_B = 2 : 1$$

が成立する。

(5) ① 垂直抗力と摩擦力は互いに直角であるために、

$OA \perp OB$ 、重力は鉛直方向であるから  $OH \perp AB$  がいえる。よって、 $\triangle ABO$  と  $\triangle OBH$  はともに直角三角形である。

また、 $\angle OBA$  は共通になるため、この二つの直角三角形は相似である。よって、 $\theta = \theta'$  となる。



② 重力  $mg$  は  $OB$  方向と  $OA$  方向に分解可能である。このとき、 $OB$  成分は  $mg \cos \theta$  であらわされる。力はその方向にしか速度変化する能力を持たないため、斜面に直角な方向と斜面に沿う方向に力を分解して考えることができる。斜面に垂直な方向は上向きに垂直抗力  $N$ 、下向きに  $mg \cos \theta$  が作用している。物体はこの方向には速度変化しない。(上向きに動けば宙に浮き、下向きに動けば斜面にめり込む。ともにありえない。) そのため、この二つの力はつりあいの関係にあることになる。

よって、 $mg \cos \theta = \mu N$

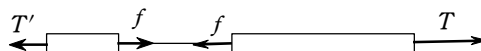
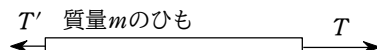
③ 斜面に沿う方向では、斜面下方向に加速度  $a$  で運動している。この速度変化を起こしている力は、斜面下向きの  $mg \sin \theta$  と逆向きの  $\mu N$  である。下方向に加速しているために  $mg \sin \theta$  の方が大きな力である。  $mg \sin \theta$  の力のうち  $\mu N$  と同じ大きさの部分は  $\mu N$  によって打ち消され、残りの力  $mg \sin \theta - \mu N$  で速度変化を起こす。

よって、 $mg \sin \theta - \mu N = ma$  が成立。

解説

(1)  $F = ma$  で  $m = 0$  であるから、 $F = 0$  となる。よって、物体が加速度を持っていても常につりあいの力となる。

ひもに質量がある場合はひもが加速していれば、その力は等しくない。この場合は張力を知りたい位置でひもを切断しその間を質量が無視できるひもでつないでから運動方程式を立てると良い。なお、分断したひもの質量は一樣なひもであれば長さに比例する。

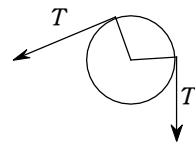


(2) 質量が無視できる物体(ひも)に作用する力は等しいため、ひもに作用する力は常に同一作用線上で逆向き同じ大きさの力となる。ひもに作用する力が等しいため、その反作用である物体に作用する力  $T$  と  $T'$  は等しくなる。

同様にして「滑らかに回転する滑車」、「質量の無視できる滑車」も回転していてもその張力は等しくなる。

(この場合は力のモーメントが等しいと考える。)

滑車に質量があり、滑らかに回らないときは、力のモーメントが等しかったら回転しないため2本の張力は等しくないが、そういった問題は大学入試では取り扱わない。

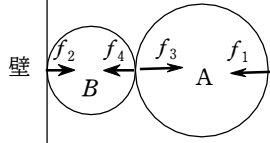


(3) 質量のあるひもの張力を求めるには、求める部分でひもを切断し、質量の無視できる

18.

作用反作用

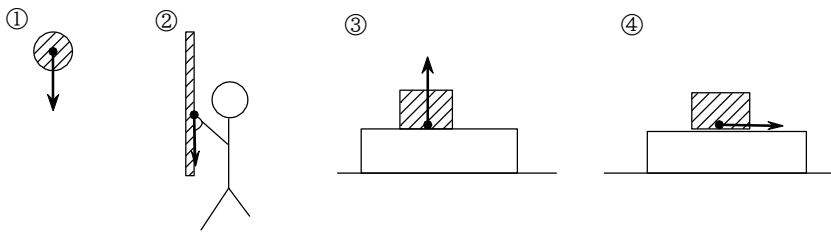
図は、壁に二つの物体A、Bを力 $f_1$ で押し付けたものである。



- (1) ① この図を用いて作用反作用の法則を証明せよ。
- ② この壁が加速度 $a$ で右向きに動いている場合でも $f_3=f_4$ であることを証明せよ。
- ③ 力のつりあいと作用反作用の法則はどちらも「同一作用線上逆向き同じ大きさ」であるが、何が違うのか指摘せよ。

(2) 次の場合反作用はどこにあるか、その作用点を指摘せよ。

- ① 物体に作用する重力（作用点は物体）
- ② 人がロープを引張った時に人がロープを引く力（作用点はロープ）
- ③ 台の上で滑っている物体に作用する垂直抗力（作用点は上の物体）
- ④ ③の時の摩擦力（作用点は上の物体）



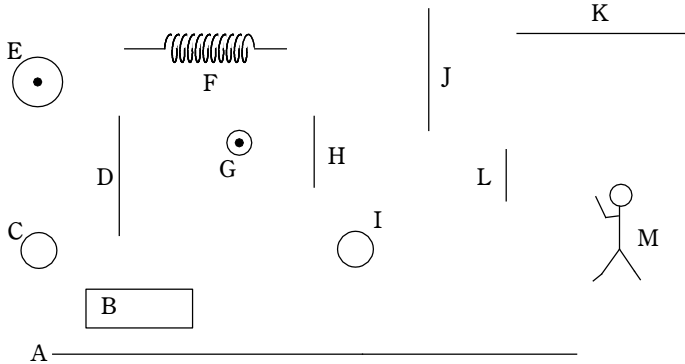
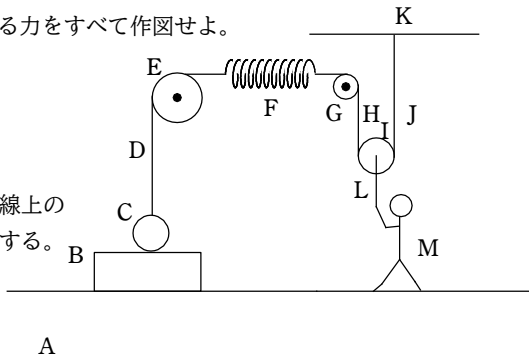
(3) 力のつりあいと作用反作用の区別

右の物体A~Mに作用している力をすべて作図せよ。

下の図は右の物体をばらばらにしたものである。

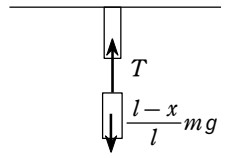
下の図に力を記入せよ。

なお、滑車、ばね、ロープの質量はないものとし、同一作用線上の力は横にずらしてもよいものとする。



ひもでつないだと考えて張力を求めればよい。  
ロープの下の部分の長さは $l-x$ であるため、  
重力は $\frac{l-x}{l}mg$ となる。

よって、張力は $\frac{l-x}{l}mg$ である。



解説

- (1) ① この物体A、Bは共につりあっている。A、Bをひとつの物体と考えると、 $f_1$ と $f_2$ はつりあい関係にある。Aのみについて考えると、 $f_1$ と $f_3$ はつりあい関係である。Bについて考えると、 $f_2$ と $f_4$ はつりあい関係になる。  
よって、 $f_3$ と $f_4$ はつりあい関係と同じ、同一作用線上逆向きで同じ大きさという関係になる。

② A、Bは一体となって加速するためどちらの加速度も $a$ である。

Aに関する運動方程式  $m_A a = f_3 - f_1$

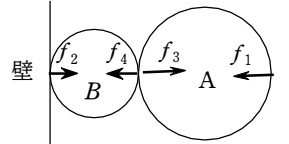
Bに関する運動方程式  $m_B a = f_2 - f_4$

ABに関する運動方程式  $(m_A + m_B)a = f_2 - f_1$

上の2式を第三式に代入すると、

$$f_3 - f_1 + f_2 - f_4 = f_2 - f_1$$

よって、 $f_3 = f_4$  が成立。



物体が加速中でも作用反作用の法則は成り立っている。

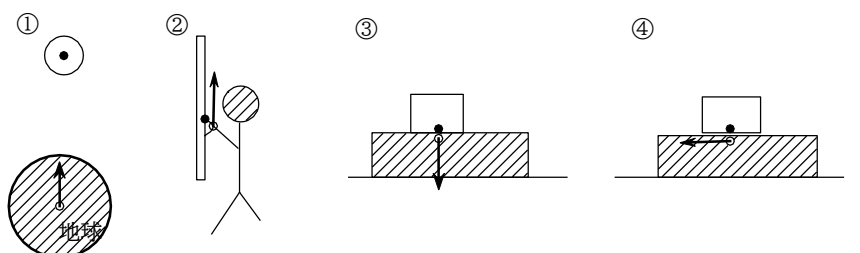
- ③ 力のつりあいの場合の逆向きの力は同一物体に作用しているため、力のつりあいの式や運動方程式の中で両方使わなければならない。しかし、作用反作用は別の物体に作用するため、力のつりあいや運動方程式ではどちらか片方の力しか使わない。つまり、Aの物体について力のつりあいや運動方程式を立てるときは、 $f_1$ や $f_3$ はAに作用する力であるから計算に入れなければならないが、 $f_2$ や $f_4$ はBに作用する力はAには関係がないためにAの方程式内では使ってはならない。

- (2) ① 重力は地球が物体を引く力であるため、反作用は地球にある。よって、地球の中心から上向きに存在する。

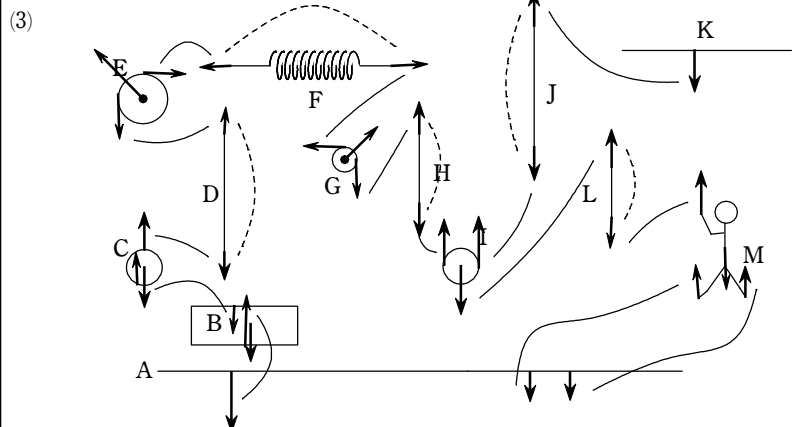
② 人がロープを引いたときにロープに作用する力の反作用であるため、反作用は人に作用する。よって、手から上向きに作用する

③ 上の物体にかかる垂直抗力であるため、反作用は下の台に作用する。よって、作用の作用点の向かい側の点から下向きに作用する。

④ 垂直抗力と摩擦力はともに抗力の分力であるため、作用点は同じである。よって、③と同じ点より左向きに作用する。



図の②③④は同一作用線上にないように見えるが黒点（作用の作用点）と白点（反作用の作用点）はとなりあう点のため同じ位置と考えてよい。反作用は斜線部の物体に作用している。

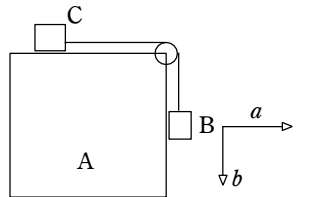


実曲線でつながっている2力は作用反作用の関係にあり、破曲線でつながっている2力は力のつりあい関係にある。つりあいの関係にある力は同一物体に作用しており、接触している物体間に作用している力が作用反作用の関係にある力である。

# 運動方程式

19.

滑らかな水平面上に物体Aがある。  
 物体A上には物体Cとロープでつながった  
 物体Bがある。物体Aを右方向に加速すると、  
 物体B、Cもそれぞれ加速した。  
 物体Bの加速度水平成分を $a$ 、鉛直下向き成分を $b$   
 とする。物体Aの加速度は右向きに $a$ 、  
 Cの加速度は右向きに $a+b$ であることを示せ。



解説

物体Aが右方向へ $x$ 動けばその上に乗っている物体B、Cも右へ $x$ 動く。この状態で物体Bが下に $y$ 動いたとすると、動いた分だけ物体Cはさらに前に出なければならない。よって、物体Cは最初の位置よりも $x+y$ だけ前に出ることになる。

この距離を時間で割ると、速度になり、すべての物体は同じ時間だけ移動する。そのため、速度に関しても同じことが言える。加速度も同様である。

よって、物体Aの加速度は右方向に $a$ 、物体Cの加速度は右方向に $a+b$ となる。

一般に土台が動く問題では土台が静止しているときの加速度に土台の加速度をベクトル和した加速度になる。

