１.

有効数字について

(1)　測定値2.31の実際の値の存在範囲を示せ。

(2)　測定値2.31と測定値1.3の和および差の存在範囲を示せ。

(3)　測定値2.31と測定値1.3の積および商の存在範囲を示せ。

(4)　測定値2.31の平方根の存在範囲を示せ。

解説

(1)　この場合は小数第三位を四捨五入した結果が2.31と考える。

よって、　$2.305 \leqq x < 2.315$　といえる。

(2)　1.3は同じく$1.25 \leqq y < 1.35$である。

よってその和は$2.305 + 1.25 \leqq x + y < 2.315 + 1.35$で

$3.555 \leqq x + y < 3.665$

この場合小数第三位を四捨五入した場合小数第二位までは共通となり3.6が答えとなる。正規にはこのようになるのであるが、実際問題としてここまでやる必要がない。実際は2.31の小数第二位は有効数字であるが、1.3の小数第二位は不明である。よって小数第二位どおしの和は不確定となるために$2.31 + 1.3 = 2.61$の小数第二位を四捨五入して2.6と算出する。この方法は上の方法と答えが若干異なることもあるが、すべての場合でほぼ一致し、有効数字の計算はこの方法に決められている。

差を求める場合もまったく同様である。

$2.305 - 1.35 < x - y < 2.315 - 1.25$　で　$0.955 < x < 1.045$　小数第二位を四捨五入して1.0が答えとなる。この場合も1.3の小数第二位が不明であるから小数第二位を四捨五入して答えるように決められている。

(3)　積の範囲を計算すると、$2.305 \times 1.25 \leqq xy < 2.315 \times 1.35$であり、

これは、$2.88125 \leqq xy < 3.12525$　となり小数第一位ですでに少し狂っているが小数第二位を四捨五入すると$2.9 < xy < 3.1$　小数第一位を四捨五入すると$xy = 3$となる。確実な有効数字は3のみであるが小数第一位は0.2ほどのずれしかない。これをまったく不明な数字とすると、その分精度が落ちてしまう。よって積の場合最小の有効桁数が有効数字と決められている。この場合は有効数字3桁の2.31と有効数字2桁の1.3の積であるから有効桁数の少ない2桁が積の有効桁数となる。決められたとおりに計算すると、

$2.31 \times 1.3 = 3.003$で3桁目（小数第二位）を四捨五入して3.0がこの場合の答えとなる。

小数第二位が0.2ほどずれているのが気になるのであるが、$2.88125 \leqq xy < 3.12525$の範囲に真の値があるといっても多くの場合その真ん中の3.0に近いところにある確率が高い。2.9や3.1のように大きくずれている確率は低いのである。

たとえば　$x = 1$，２，4でそれぞれ確率$\dfrac{1}{3}$ずつだとする。yも同様とする。

この場合xyの値は1,2,4,8,16の各値をとりうるが1をとる確率はx,yともに1をかけた場合のみで確率$\dfrac{1}{9}$である。このようにしてそれぞれの確率を求めると、順に

$\dfrac{1}{9}, \dfrac{2}{9}, \dfrac{3}{9}, \dfrac{2}{9}, \dfrac{1}{9}$となり、中ほどの値つまり$xy = 4$になる確率が最も高くなる。

このような理由によりこの場合は3.0が有効としてもほぼ差し支えない。

商の場合も同等である。

$2.305 \div 1.35 < \dfrac{x}{y} < 2.315 \div 1.25$　で　$1.70747 < \dfrac{x}{y} < 1.8520$　となる。

この場合も積と同様にして有効数字2桁と考える。$2.31 \div 1.3 = 1.7769$で小数第二位を四捨五入して1.8が答えとなる。

決められたとおりに四捨五入した場合、実際の有効範囲と積や商は少しずれが生じている。そのために少しでも誤差を生まないような計算をしなければならない。そのためには四捨五入をするのは、解答の直前に一回のみとするようにしなければならない。途中は分数のままにして計算をし答えを書くときのみ四捨五入をするように心がけると良い。

(4)　$\sqrt{2.305} \leqq x < \sqrt{2.315}$　で　これは、$1.518223 < x < 1.521512$　で小数第三位四捨五入すれば$x = 1.52$となる。平方根の場合も有効桁数を同じにとれば良いことがわかる。この場合は積や商に比べて精度が悪くはなっていない。

$\sqrt{2.31} = 1.519868 = 1.52$としてよい。

物理の場合は、数学と異なり有効数字の範囲内で等しいときに記号「＝」を使っているのである。

２.

速さと速度

(1)　瞬間の速さと平均の速さの違いを説明し、それぞれの速さの測定方法を述べよ。

(2)　A地点とB地点を行きにv_1[m/s]で、帰りにv_2[m/s]で往復した、平均の速さは$\dfrac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$であることを示せ。

(3)　V[km/h]$= v$[m/s]としたとき、$V = 3.6v$が成り立つことを示せ。

(4)　速度と速さの違いを説明せよ。

解説

(1)　平均の速さは$\dfrac{\text{移動した距離}}{\text{かかった時間}}$で定義される速さであり、速さが途中で変化する場合はその平均値が、速さが一定の場合はその速さが求められる。瞬間の速さは、ある時刻における速さである。測定時間が短いとその間に速さが変化してしまうために、

$\dfrac{\text{移動した距離}}{\text{かかった時間}}$で速さを計算すると平均の速さになるが、速さが変化する暇がないほど非常に短い測定時間をとるとその間の速さは一定と考えてよい。このとき、

$\dfrac{\text{移動した距離}}{\text{かかった時間}}$は瞬間の速さを意味している。

同じ$\dfrac{\text{移動した距離}}{\text{かかった時間}}$を使うのであるが、平均の速さは測定時間を十分に長くしたもの、瞬間の速さは測定時間を限りなく短くしたものといえよう。

(2)　平均に速さということで、$\dfrac{v_1 + v_2}{2}$とやりがちであるが、これは間違いである。常に

定義から計算する習慣をつけておくこと、平均の速さは$\dfrac{\text{移動した距離}}{\text{かかった時間}}$で定義されている。

　AB間の距離をxとすると、行きにかかる時間は$\dfrac{x}{v_1}$。帰りにかかる時間は$\dfrac{x}{v_2}$で、往復$2x$移動するのに$\dfrac{x}{v_1}+\dfrac{x}{v_2}$だけ時間がかかっている。

よって、$\dfrac{\text{移動した距離}}{\text{かかった時間}}=\dfrac{2x}{\dfrac{x}{v_1}+\dfrac{x}{v_2}}=\dfrac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$となる。

一般にaとbの平均といわれているのは相加平均（$\dfrac{a+b}{2}$）であるが、これ以外にも何種類もある。2乗平均（$\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$）、相乗平均（$\sqrt{ab}$）、調和平均（$\dfrac{2ab}{a+b}$）などである。この往復の場合の平均の速さは調和平均になっているのである。

　物理ではこのように紛らわしい例が数多くあるので、常に定義から証明し、証明したもののみ使う習慣をつけておくこと、思いつきやカンに頼るとこのようなことになる。

　平均の速さの定義は分母が時間であるから、その平均は時間毎の平均なのである。

最初のt時間を速さv_1で、次のt時間を速さv_2で走ったときの平均の速さを求めてみると、行程はv_1t+v_2tでかかった時間は$2t$であるから、平均の速さの定義より、$\dfrac{v_1t+v_2t}{2t}$で

これは、相加平均$\dfrac{v_1+v_2}{2}$となっている。つまり、平均の速さは時間が同じならば相加平均で距離が同じならば調和平均となっているのである。これらの違いも自分でしっかりと証明しておけば二度と間違えないであろう。

(3)　単位の変換はその方法を覚えるのではなく、一つ一つ丁寧に計算していけばよいのである。

1km＝1000m、1h＝3600sを使うと良い。

$V[\mathrm{km/h}]=V\dfrac{1km}{1h}=V\dfrac{1000m}{3600s}=\dfrac{1}{3.6}V[\mathrm{m/s}]=v[\mathrm{m/s}]$

よって、$\dfrac{1}{3.6}V=v$となり、$V=3.6v$が成立する。

正式にはこのようにして時速と秒速の変換をするのであるが、実際問題としては36km/h＝10m/sを覚えてこれを使えばよい。

しかし、記憶に頼って計算するのはあくまで速く楽に計算するための手法に過ぎないのであって、いつでも正規の誘導ができるというのが大前提である。これを間違えて、記憶に頼っていると物理がわからなくなるので注意を要する。

(4)　速さは大きさのみ（スカラー）であり、速度は大きさにその運動方向も同時に考えたもの（ベクトル）である。

　解答するとき、速さであれば、たとえば「20m/s」とか「30km/h」といったものでよいが速度の場合はその方向を示す要素を書き込まなくてはならない。たとえば「東へ20m/s」とか、「右へ30km/h」などというようにである。

　しかし、問題によっては「右向きを正とせよ」とか「上向を正の方向とする」とかが書かれている場合がある。この場合は符号で持ってその方向を示すことができる。たとえば「＋20km/h」とか「−20m/s」などである。当然ながら＋は省略しても良い。この場合は速さと同じ答えになる。問題で正の方向を指示されていないのに符号付で速度を答えると間違いとなるので注意を要する。

３．

等速直線運動

　時刻t_0においてx_0の位置にいた物体が等速直線運動をして、時刻tにおいてxの位置に移動した。

①　変位が$x-x_0$であることを示せ。

②　速度vは単位時間の変位であることを利用し、$v=\dfrac{x-x_0}{t-t_0}$であることを示せ。

③　$x-t$グラフ（縦軸x、横軸t）において、等速直線運動は直線（一次関数）になり、速度vはグラフの傾き、切片は時刻０における位置にをあらわしていることを示せ。

④　$v-t$グラフ（縦軸v、横軸t）において、時刻0における速度をv_0とすると、等速直線運動は$v=v_0$＝一定のグラフになり、変位$x-x_0$はグラフの下の部分の面積を表していることを示せ。

解説

(1)

①　物体の変位とは位置がどれだけずれたかを示すベクトルである。たとえば数直線上の位置３から８に移動した場合は、正の方向に8−3＝5位置が移動したと考える。この場合の変位は　＋5　である。

　逆に８から３に移動した場合は、負の方向に５位置が移動したと考える。この場合の変位は−5である。式にすれば3−8＝−5となる。

　この二例より変位は符号も含めて

（変位）＝（移動した後の位置）−（移動する前の位置）

であらわされることがわかる。

よって、x_0の位置からxの位置に移動したのであるから、変位は$x-x_0$となる。

②　速度とは単位時間（1秒間）の変位である。つまり、変位をかかった時間で割ればよい。

　この場合移動するのにかかった時間は$t-t_0$である。よって、

$$v=\frac{\text{変位}}{\text{かかった時間}}=\frac{x-x_0}{t-t_0}$$

③　$v=\dfrac{x-x_0}{t-t_0}$を変形すると、$x-x_0=v(t-t_0)$となる。

　これは、$x=vt+x_0-vt_0$である。

　数学より、

４．

等加速度直線運動

(1)　時刻t_0において速度v_0だった物体が、加速し、時刻tにおいてvになったとする。

①　加速度は単位時間（1秒間）の速度変化を示すベクトルであることを利用すると、

加速度aは　$a=\dfrac{v-v_0}{t-t_0}$　と表されることを示せ。

②　$v-t$グラフ（縦軸v、横軸t）において、等加速度直線運動は直線（一次関数）であり、加速度aはそのグラフの傾きを、切片は時刻０における速度を意味していることを示せ。

(2)　等加速度直線運動において$v-t$グラフ（縦軸v、横軸t）のグラフの下の部分の面積は、変位を表していることを示し、変位$x-x_0$（以後$\varDelta x$とおく）は

$\varDelta x=\dfrac{(v+v_0)(t-t_0)}{2}$で表されることを証明せよ。

(3)　等加速度直線運動における時刻t_0からtの間の平均速度は、最初の速度と最後の速度の平均値、つまり、$\dfrac{v+v_0}{2}$であり、その中点の$\dfrac{t+t_0}{2}$における瞬間の速度に等しいことを証明せよ。

「縦軸y、横軸xとするとき、一次関数は$y=ax+b$で傾きがa、切片がbである。」

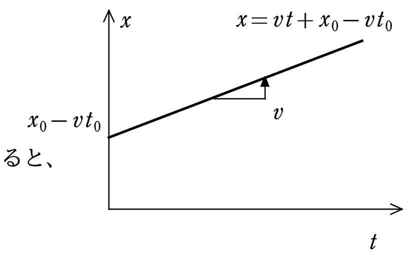
縦軸をx、横軸をtとすると、$x=vt+x_0-vt_0$においては、$x=at+b$となり、直線（一次関数）を意味している。

よって、傾きは$a=v$、切片はx_0-vt_0の直線といえる。

このグラフの傾きは速度を表していることになる。

それでは、切片は何を表しているのであろうか。

$x=vt+x_0-vt_0$において、$t=0$を代入すると、$x=x_0-vt_0$となる。これは$t=0$のときの位置を表していることになる。



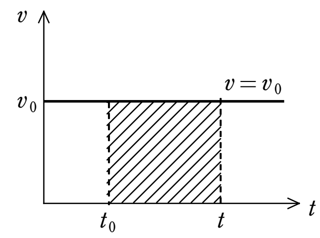
④　等速直線運動では速度が一定であるためにグラフはt軸に平行となる。

このグラフは$v=\dfrac{x-x_0}{t-t_0}=v_0$である。

変形すると、$x-x_0=v_0(t-t_0)$である。

また、グラフの斜線部分（長方形）の面積Sは$S=v_0(t-t_0)$である。

よって、斜線部分の面積Sは変位$x-x_0$をあらわしていることになる。



解説

(1)　①　この運動の場合、速度変化は$v-v_0$であり、経過時間は$t-t_0$である。加速度は1秒あたりの速度変化であるから、$a=\dfrac{v-v_0}{t-t_0}$　となる。

②　$a=\dfrac{v-v_0}{t-t_0}$を変形すると、$v=at+v_0-at_0$となる。

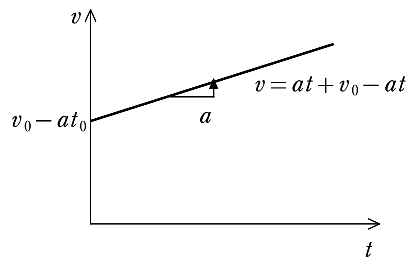
数学における一次関数の定義により、この式は傾きa、切片v_0-at_0の一次関数である。

よって

$v-t$グラフの傾きは

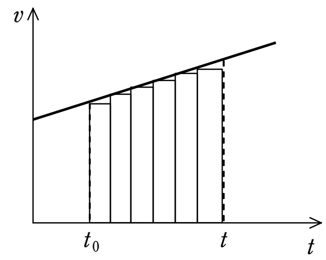
加速度をあらわし、切片は

時刻０における速度を意味している。



(2)　等加速度運動においては速度は常に変化している。そのために等速直線運動の式$v=\dfrac{x-x_0}{t-t_0}$はこのままでは使えない。

しかし測定時間を非常に短くした場合、その間に速度はほとんど変化していない。つまり一定と考えてよい。これをグラフにあらわしたのが右図である。



tとt_0の間を細かく区分して、その一区分の間の速度は一定であると考えると、その変位はグラフの下の長方形の部分の面積となる。しかし、実際はその短い間にも速度は少し変化しているわけであるから、長方形の面積の和が実際の変位とはならない。しかし、その区分を限りなく多くすると、この面積の和は、台形の面積に近づく。よって、この部分の面積が物体の変位を表しているといえる。

よって、変位は台形の面積の公式より、

$\varDelta x=\dfrac{(v+v_0)(t-t_0)}{2}$となる。

(3)　平均速度は変位（移動距離）をかかった時間で割ったものつまり、$\overline{v}=\dfrac{x-x_0}{t-t_0}$であらわされる。(2)により、変位はグラフ下の台形の面積であることがわかった。

これにより、変位は$\varDelta x=\dfrac{(v+v_0)(t-t_0)}{2}$

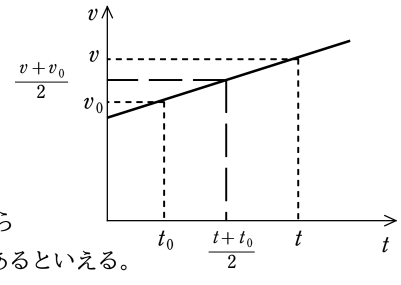
で表される。

よって、平均速度は

$\overline{v}=\dfrac{\varDelta x}{t-t_0}=\dfrac{v+v_0}{2}$

v_0は最初の速度、vは最後の速度であるから

平均速度は最初と最後の速度の平均値であるといえる。



（ただし、これは等加速度直線運動についてのみいえることに注意）

数学の中点連結定理により、瞬間速度が中点である$\dfrac{v+v_0}{2}$となるのは、時間もその中点の$\dfrac{t+t_0}{2}$のときとなる。

５．

加速度三公式の導入

時刻０における位置を０、速度をv_0とする等加速度直線運動を考える。

(1)　時刻tにおける位置をxとすると、変位もxであることを示せ。

(2)　加速度の定義式$a=\dfrac{v-v_0}{t-t_0}$をもちいて、$v=v_0+at$を導け。

(3)　$x=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$を導け

(4)　$v^2-{v_0}^2=2ax$を導け

６．

負の等加速度直線運動

時刻0に原点を初速度v_0で正の方向に出発した物体が、加速度$-a$の等加速度運動をした。

(1)　だんだん遅くなり$\dfrac{v_0}{a}$秒後に静止することを示せ。

(2)　静止後、負の方向に速度を持つことを示せ。

(3)　正の方向への変位は、静止した瞬間が最大であり、その変位は$\dfrac{{v_0}^2}{2a}$であることを示せ。

(4)　再び原点に戻ってくるのは静止までの時間の2倍で、その速度は初速度と速さが同じで逆向きであることを示せ。

(5)　原点に戻ってきたときの変位は０で、動いた距離は$\dfrac{{v_0}^2}{a}$であることを示せ。

(6)　物体の正の方向への移動中、静止した瞬間、負の方向への移動中それぞれの加速度はいくらか。

(7)　$v-t$グラフのt軸より下の部分の面積は、負の方向への変位を表していることを示せ。

(8)　$x-t$グラフにおける接線の傾きは瞬間の速度を表していることを示せ。

(9)　この運動の$x-t$グラフを描き、等加速度直線運動において$x-t$グラフは二次関数となり、その頂点が最大変位を意味していることを示せ。

よって

等加速度直線運動における平均速度は

その時間区間の中点における瞬間の速さに等しい

解説

(1)　変位は$x-x_0$であるが、時刻０の位置を０としているために、$x_0=0$である。

よって、変位はxでt秒後の位置と等しくなる。

(2)　時刻t_0における速度がv_0であり、この場合$t_0=0$であるから、$a=\dfrac{v-v_0}{t}$となる。

よって、$v=v_0+at$

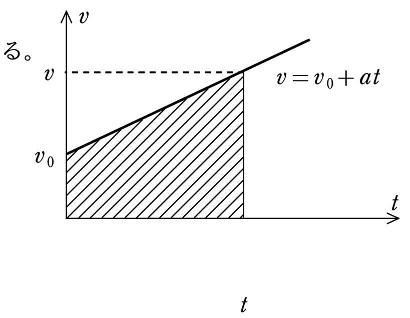
(3)　変位は$v-t$グラフの下の部分の面積である。

よって、台形の面積の公式より、

$x=\dfrac{(v_0+v)t}{2}$

この式に$v=v_0+at$を代入すると、

$x=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$



＜別解＞

平均速度は中点の瞬間の速さと等しいので

$x=\overline{v}\,t=\left(v_0+a\cdot\dfrac{1}{2}t\right)t=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$

(4)　$v=v_0+at$より、$t=\dfrac{v-v_0}{a}$

これを、$x=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$に代入すると、

$x=v_0\dfrac{v-v_0}{a}+\dfrac{1}{2}a\left(\dfrac{v-v_0}{a}\right)^2=\dfrac{v^2-{v_0}^2}{2a}$

よって、

$v^2-{v_0}^2=2ax$

解説

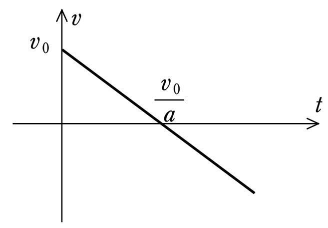
(1)　加速度三公式よりこの物体の速度は$v=v_0-at$で表される。これをグラフにすると、右図のようになる。これにより、vはだんだん遅くなっていることがわかる。

静止するということは$v=0$であるから、

$v=v_0-at=0$

これを解くと、$t=\dfrac{v_0}{a}$となる。

これは、グラフにおけるt軸との交点のt座標である。



(2)　グラフより、静止後のvは負の値になっている。よって、静止後は負の速度を持つ。

(3)　ある瞬間物体がAのように正の方向に速度を持っていれば次の瞬間は、もっと右に

移動している。また、Bのように負の方向（左）に速度を持っていれば、もっと右方向からやってきたことを意味し、どちらもこの瞬間右端にいたことにならない。つまり、右端にいるのは、速度が０のとき以外にないのである。

つまり、$t=\dfrac{v_0}{a}$のとき、最大変位になっている。

よって、加速度の公式（第二公式）より、

$x=v_0\left(\dfrac{v_0}{a}\right)+\dfrac{1}{2}(-a)\left(\dfrac{v_0}{a}\right)^2=\dfrac{{v_0}^2}{2a}$

(4)　再び原点に戻ってきたときは、元と同じ位置であるから変位は０（位置も０）である。その時刻をtとすると、加速度第二公式より、

$0=v_0t-\dfrac{1}{2}at^2$

これを解くと、　$t=0$、$\dfrac{2v_0}{a}$

このうち、$t=0$は出発時刻であるから原点にあるのは当たり前である。

よって、戻ってきたときは$t=\dfrac{2v_0}{a}$であり、これは、物体が戻ってくるまでの時間は静止するまでの時間の2倍であることを意味している。

また、速度に関して調べると、

第一公式に代入して、

$v=v_0-a\dfrac{2v_0}{a}=-v_0$

となり、物体が元の位置に戻ったとき、速さが同じで向きが逆の速度になっていることがわかる。

(5)　変位は位置のずれである。出発点と同じ位置に戻ってきたのであるから、その変位は

７．

加速度の測定

等速直線運動している物体の時刻t_0における位置がx_0、t_0+tにおける位置がx_1、

t_0+2tにおける位置がx_2とするとき

⑴　加速度の大きさは$a=\dfrac{x_2-2x_1+x_0}{t^2}$であることを示せ。

⑵　時刻t_0における瞬間の速度は$\dfrac{x_2-x_0}{2t}$であることを示せ。

０である。

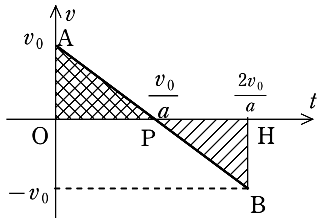
また、動いた距離は最大変位点までの往復であるから、最大変位の2倍になる。よって、$\dfrac{{v_0}^2}{a}$となる。

⑹　この物体は加速度$-a$の等加速度運動であるからすべて加速度は$-a$である。

加速度の符号は速度同様に速度の変化する方向を表している。この場合は負（左）の方向に速くなることを意味している。速度が正の場合は負の方向に加速されればだんだん遅くなるが、負の方向に速度を持つ場合は、同じ方向に加速されるのであるから、だんだんと速くなる。また、静止中でも加速度は存在する。この場合は物体は加速度の方向に動き始める

⑺　速度が正の場合グラフの下の部分の面積は変位を表している。この場合Pが最大変位を表しているので、△AOPの面積が最大変位になる。よって、三角形の面積の公式より、

$S=\dfrac{1}{2}v_0\dfrac{v_0}{a}=\dfrac{{v_0}^2}{2a}$となる。



加速度の公式を使わなくてもこのようにしても求められる。

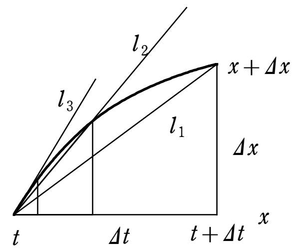
では△PBHの面積は何を表しているのであろうか。最大変位Pを過ぎているのであるから速度が逆向き（負）になっている。つまり、BHはマイナスの値になる。そのまま直接△PBHの面積を求めるとこの面積はマイナスとなる。実際上における面積にマイナスはありえないのであるが、計算上マイナスになる。変位はベクトルであるから負の方向の変位はマイナスでなければならない。面積は変位を表すのであるが、この場合は符号も含めて考えるようにしたほうが良い。よって、t軸の下の部分のグラフの場合面積はマイナスとなり、そのまま変位がマイナスであることを意味している。

⑻　$x=v_0t-\dfrac{1}{2}at^2$のグラフで、tと$t+\varDelta t$の平均のグラフの傾きを求める。

右図より平均の傾きは$\dfrac{\varDelta x}{\varDelta t}$である。

この式は平均速度を表している。

このとき$\varDelta t$を順次０に近づけていくと平均の傾きは直線l_1、l_2、l_3の傾きになっていく。$\varDelta t$を限りなく0に近づければこの直線は限りなく接線に近づく。



$\varDelta t$を限りなく0に近い値をとったときの平均の速度は時間が短いのであるから、その間の速度は一定と考えても良く、これが瞬間の速度である。すなわち接線である。

⑻において頂点における接線の傾きは０であるから、最大変位のときの速度は０であるといえる。

⑼　加速度第二公式より

$x=v_0t-\dfrac{1}{2}at^2$

これはtに関する二次関数である。数学流に平方完成によりその頂点を求めると、

$$x=v_0t-\frac{1}{2}at^2=-\frac{1}{2}a\left(t^2-\frac{2v_0}{a}t\right)=-\frac{1}{2}a\left(t^2-\frac{2v_0}{a}t+\frac{{v_0}^2}{a^2}\right)+\frac{{v_0}^2}{2a}$$

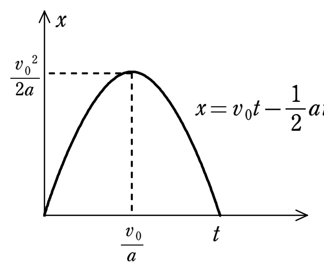
$$=-\frac{1}{2}a\left(t-\frac{v_0}{a}\right)^2+\frac{{v_0}^2}{2a}$$

これをグラフにすると、右図のようになる。

その頂点の座標は

$\left(\dfrac{v_0}{a},\dfrac{{v_0}^2}{2a}\right)$

で⑴,⑶の結果より、最大変位となる時刻とその変位を表していることがわかる。



このグラフを見ることにより次のことが言える。

①　同じ変位xになる時刻の速さ（接線の傾きの絶対値）は同じである。

②　最大変位までの時間と、戻ってくる時間は同じである。

③　最大変位（頂点）における速度（接線の傾き）は０である。

解説

⑴　$t_0\sim t_0+t$の平均速度は$v_1=\dfrac{x_1-x_0}{t}$、$t_0+t\sim t_0+2t$の平均速度は$v_2=\dfrac{x_2-x_1}{t}$

これらの平均速度は、その中点における瞬間の速度であり、

v_1は時刻$t_0+\dfrac{1}{2}t$における瞬間の速度、v_2は$t_0+\dfrac{3}{2}t$における瞬間の速度となる。

よって、加速度は

$$a=\frac{\varDelta v}{\varDelta t}=\frac{\dfrac{x_2-x_1}{t}-\dfrac{x_1-x_0}{t}}{\left(t_0+\dfrac{3}{2}t\right)-\left(t_0+\dfrac{1}{2}t\right)}=\frac{x_2-2x_1+x_0}{t^2}$$

⑵　$v=v_0+at$にv_1での値を代入して、$v_1=v_0+\dfrac{x_2-2x_1+x_0}{t^2}\left(t_0+\dfrac{1}{2}t-t_0\right)$

8．

自由落下

自由落下とは初速度０でそっと手を離して物体を落下させる運動のことである。

地球上の物体を空中に投射すると、そのすべての物体は重力加速度g（9.8m/s²）を受けた運動をする。（空気抵抗がないものとしたとき）

以後すべて下向きを正とする。

(1)　落下t秒後の速度はgtで表されることを示せ。

(2)　落下t秒間の落下距離は$\frac{1}{2}gt^2$であることを示せ。

9．

鉛直投げ下ろし

鉛直投げ下ろしとは真下に向けて、物体を投げ下ろすことである。

この場合重力加速度はg、初速度はv_0とする。この場合も下向きを正とする。

(1)　投げ下ろしt秒後の速度は、v_0+gtであることを示せ。

(2)　投げ下ろしてからt秒間に落下した距離は$v_0t+\frac{1}{2}gt^2$であることを示せ。

10．

鉛直投げ上げ

鉛直投げ上げとは、物体を真上に向けて投げ上げる運動であり、通常上向を正とする。この場合物体は最高点に達した後、落下する。初速度の大きさをv_0、重力加速度の大きさをgとする。

(1)　投げ上げt秒後の速度は$v=v_0-gt$であることを示せ。

(2)　投げ上げt秒後の高さは$y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$であることを示せ。

(3)　最高点について

①　最高点における速度は０であることを示せ。

②　最高点に達するのは$\frac{v_0}{g}$秒後であることを示せ。

③　最高点の高さは$\frac{{v_0}^2}{2g}$で表されることを示せ。

(4)　落下点について

①　落下してくるまでの時間は、最高点に達するまでの時間の2倍であることを示せ。

②　落下点における速度は$-v_0$であることを示せ。

(5)　同じ高さにある物体の速さは同じであることを示せ。

よって、$v_0=\frac{x_1-x_0}{t}+\frac{x_2-2x_1+x_0}{2t}=\frac{x_2-x_0}{2t}$

＜別解＞　$s=v_0t+\frac{1}{2}at^2$の公式を使って連立方程式を立てれば解けるが、平均の速さと瞬間の速さの違いを認識するための問題であるから、この方法は使わない。

解説

(1)　加速度第一公式で、$a=g$、$v_0=0$とおいて、$v=v_0+at=gt$

(2)　加速度第二公式で、$a=g$、$v_0=0$とおいて、$x=v_0t+\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}gt^2$

解説

(1)　加速度第一公式で、$a=g$とおいて、$v=v_0+gt$となる。

(2)　加速度第二公式で、$a=g$とおいて、$x=v_0t+\frac{1}{2}gt^2$となる。

解説

(1)　上向を正とするため、初速度はv_0、重力加速度は下向きなので$-g$とおける。
これを加速度第一公式$v=v_0+at$に代入して、$v=v_0-gt$となる。

(2)　ボールの高さをyとすると、$x=y$、初速度はv_0、重力加速度は下向きなので$-g$とおくと、加速度第二公式$x=v_0t+\frac{1}{2}at^2$に代入して、$y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$となる。

(3)　①　速度が上向の場合、さらに上に上昇する。よって、最高点では速度は上向きではない。また、速度が下向きの場合、さらに上から降りてきたことを意味しており、最高点では速度は下向きではない。以上の2点から考えると、最高点においては速度が０の場合以外は考えられない。

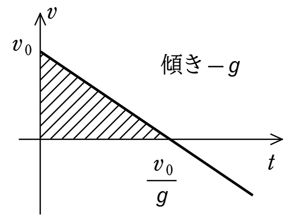
②　最高点では速度が０であるために$v=0$とおける。(1)に代入して$0=v_0-gt$。これより$t=\frac{v_0}{g}$となる。この式の意味は$\frac{v_0}{g}$秒後に速度が０になることを意味しており、また、このとき以外に速度が０になるときは存在しない。よって、このときが最高点に達した瞬間である。

③　$t=\frac{v_0}{g}$を(2)公式に代入すると、その時刻の高さが求められる。

$$y=v_0\cdot\frac{v_0}{g}+\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2=\frac{{v_0}^2}{2g}$$

＜別解１＞

(1)式を$v-t$グラフにすると、t切片は$\frac{v_0}{g}$となるため、最高点に達するのは$\frac{v_0}{g}$秒後、また、斜線部の面積は$\frac{1}{2}v_0\cdot\frac{v_0}{g}=\frac{{v_0}^2}{2g}$であるので、最高点の高さは$\frac{{v_0}^2}{2g}$となる。



＜別解２＞

(2)式を$x-t$グラフにすると、右のようになる。

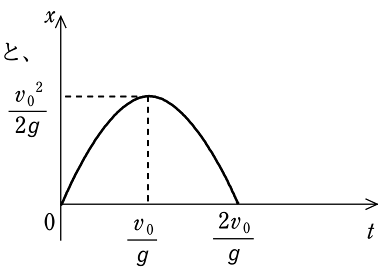
$y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2=0$としてt軸との交点を求めると、

因数分解して$t\left(v_0-\frac{1}{2}gt\right)=0$より、

$t=0,\frac{2v_0}{g}$

頂点のt座標はその中点であるから、

$t=\frac{v_0}{g}$となる。よって、頂点のx座標は$\frac{{v_0}^2}{2g}$



＜別解３＞

(2)式$y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$は二次関数である。その頂点が最高点を意味している。

数学より

二次関数$y=ax^2+bx+c$の頂点の座標は（$-\frac{b}{2a}$、$\frac{-b^2+4ac}{4a}$）

$a=-\frac{1}{2}g$、$b=v_0$、$c=0$とおいて、

11.

平面運動

xy平面上において原点$(0,0)$を始点として、座標(x,y)を終点とするベクトルを$\vec{s}=(x,y)$と表す。このベクトルを位置ベクトルという。

位置の変化を表すベクトルを変位ベクトルという。$\vec{s}=(x,y)$、$\vec{s_1}=(x_1,y_1)$、$\vec{s_0}=(x_0,y_0)$の三つの位置ベクトルを定義するとき、

① 座標(x_0,y_0)から座標(x_1,y_1)への変位ベクトル$\vec{x_1}$は$\vec{x_1}=\vec{s_1}-\vec{s_0}$で表されることを示せ。

② 座標(x_1,y_1)から座標(x,y)への変位ベクトルを$\vec{x_2}$とし、座標(x_0,y_0)から座標(x,y)への変位ベクトルを$\vec{x}$とするとき、$\vec{x}=\vec{x_1}+\vec{x_2}$が成り立つことを示せ。

速度を表すベクトルを速度ベクトルという。速度は単位時間（1秒間）の変位と定義されている。t秒間に$\vec{x}=(x,y)$の変位があったとすると、$\vec{v}=\dfrac{\vec{x}}{t}$と表すことができる。

③ 静水中の船の速度を$\vec{v_s}$、川の水の速度を$\vec{v_r}$とするとき、川を渡る船の速度$\vec{v}$は$\vec{v}=\vec{v_s}+\vec{v_r}$で表されることを示せ。

加速度を表すベクトルを加速度ベクトルという。加速度は単位時間（1秒間）の速度変化と定義されている。t秒間に$\vec{v_0}$から$\vec{v}$に速度が変化したとき、$\vec{a}=\dfrac{\vec{v}-\vec{v_0}}{t}$となる。

④ 加速度$\vec{a_s}$で運動している台上で、小物体が台に対して$\vec{a_r}$で加速しているとき、地面に対する加速度$\vec{a}$は$\vec{a}=\vec{a_s}+\vec{a_r}$で表されることを示せ。

⑤ 平面運動に関して$\vec{v}=\vec{v_0}+\vec{a}t$が成立することを示せ。

⑥ 平面運動に関して$\vec{x}=\vec{v_0}t+\dfrac{1}{2}\vec{a}t^2$が成立することを示せ。

⑦ 平面運動に関して$|\vec{v}|^2-|\vec{v_0}|^2=2\vec{a}\cdot\vec{x}$が成立することを示せ。

$\vec{a}\cdot\vec{x}$はベクトルの内積である。

最高点に達する時刻は　$t=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{v_0}{g}$

最高点の高さは　$y=\dfrac{-b^2+4ac}{4a}=\dfrac{{v_0}^2}{2g}$

(4) ① 落下点では高さ＝０であるから$y=0$である。

(2)式に代入して$0=v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$　これより、$t=0,\dfrac{2v_0}{g}$

$t=0$は投げた瞬間である。（投げた瞬間も高さ＝０である。）

そのため、落下時刻は$t=\dfrac{2v_0}{g}$となる。

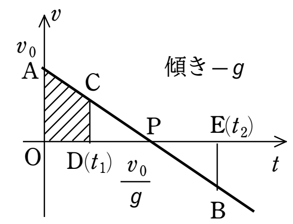
これは、最高点に達する時間$\dfrac{v_0}{g}$の2倍になっている。

② (1)式に$t=\dfrac{2v_0}{g}$を代入すると、$v=v_0-g\cdot\dfrac{2v_0}{g}=-v_0$となり、落下点の速度は初速度と同じ速さで逆向きになっていることがわかる。

(5) 加速度第三公式$v^2-{v_0}^2=2ax$より、鉛直投射では$a=-g$とおいて、$v^2-{v_0}^2=-2gy$が成り立つ。これを解くと、$v=\pm\sqrt{{v_0}^2-2gy}$となり、同じ高さ（y）に対して、速度が二つ存在し、しかもその速度は絶対値が等しく符号が逆である。片方は上昇中でありもう片方は下降中である。よって、同じ高さにある物体の速さは同じであるといえる。

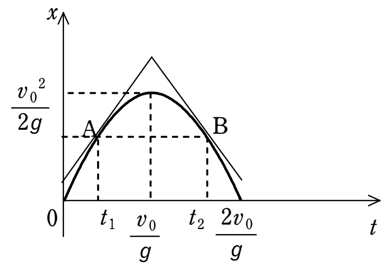
＜別解１＞

$v-t$グラフから考えてみると、時刻t_1（D）と時刻t_2（E）が同じ高さだとすると、その高さは時刻t_1の場合、台形AODCの面積となるので、t_2も同じとなる。t軸よりも下の部分の面積はマイナスとなる。△PCD＝△PBEであればt_2までの面積も△PCBと△PBEが打ち消しあうので、台形AODCの面積と同じになる。△PCD＝△PBEであるためにはDP＝PEが成立しなければならない。これはある高さのところから最高点まで上昇する時間と最高点から同じ高さのところまで降りてくるまでの時間が同じであることを意味している。そして、CD＝EBであることから、この2点での速度は向きが逆で同じ速さであることを意味している。



＜別解２＞

$x-t$グラフで考えてみる。同じ高さになる時刻をt_1、t_2とすると、右図のようになる。このとき、放物線は左右対称であるから、A、B点での接線の傾き（速度）は符号が逆で同じ大きさである。このことから、同じ高さにおいては速度は速さが同じで逆向きであることがわかる。



(解説)

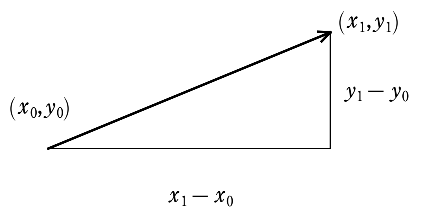
① 変位ベクトル$\vec{x_1}$は右図より、(x_1-x_0,y_1-y_0)となる。

また、

$\vec{s_1}-\vec{s_0}=(x_1,y_1)-(x_0,y_0)$

$=(x_1-x_0,y_1-y_0)$

よって、$\vec{x_1}=\vec{s_1}-\vec{s_0}$



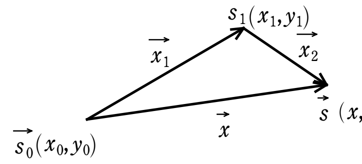
② ①より、$\vec{x_1}=\vec{s_1}-\vec{s_0}$、$\vec{x}=\vec{s}-\vec{s_0}$、$\vec{x_2}=\vec{s}-\vec{s_1}$

$\vec{x_1}+\vec{x_2}=\vec{s_1}-\vec{s_0}+\vec{s}-\vec{s_1}=\vec{s}-\vec{s_0}=\vec{x}$

となる。

物体が連続して変位するときは

そのベクトル和を求めれば、最初の位置から最後の位置までの変位ベクトルが求められる。



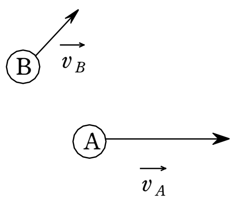
③ 川の水の変位を$\vec{x_r}$、静水中の船の変位を$\vec{x_s}$とすると、流水中の船の変位$\vec{x}$は川の変位と船による変位が同時に起こっているので、$\vec{x}=\vec{x_r}+\vec{x_s}$が成立する。速度の定義$\vec{v}=\dfrac{\vec{x}}{t}$より、$\vec{x}=\vec{v}t$が成立する。よって、$\vec{x_r}=\vec{v_r}t$、$\vec{x_s}=\vec{v_s}t$が成立する。

$\vec{x}=\vec{x_r}+\vec{x_s}$より、$\vec{x}t=\vec{x_r}t+\vec{x_s}t$が成立し、これより、$\vec{v}=\vec{v_s}+\vec{v_r}$となる。

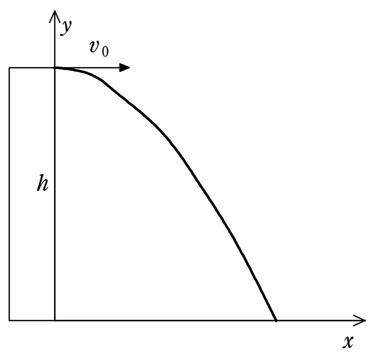
④ t秒間に台の速度が$\vec{v_{s0}}$から$\vec{v_s}$まで変化し、その上の小物体が台に対して$\vec{v_{r0}}$から$\vec{v_r}$まで変化したとすると、地面に対する小物体の速度は$\vec{v_{s0}}+\vec{v_{r0}}$から$\vec{v_s}+\vec{v_r}$まで変化したことになる。よって、$\vec{a}=\dfrac{\vec{v_s}+\vec{v_r}-(\vec{v_{s0}}+\vec{v_{r0}})}{t}=\dfrac{\vec{v_s}-\vec{v_{s0}}}{t}+\dfrac{\vec{v_r}-\vec{v_{r0}}}{t}=\vec{a_s}+\vec{a_r}$となる。

⑤ 加速度の定義式$\vec{a}=\dfrac{\vec{v}-\vec{v_0}}{t}$より、$\vec{v}=\vec{v_0}+\vec{a}t$が成立。

12.
相対速度
速度の基準は絶対的なものでなく、
それぞれが都合が良いように勝手に決めてよい。
　図のように物体が動いているとき、
　Aから見たBの相対速度が$\overrightarrow{v_{AB}}=\overrightarrow{v_B}-\overrightarrow{v_A}$
　であることを示せ。



13.
水平投射
高さhの塔の上からボールAを初速度v_0で水平に投げると同時にボールBを自由落下させた。
重力加速度をgとする。



(1)　ボールAの速度の水平成分は常に一定であることを証明せよ。
(2)　ボールAとボールBは常に同じ高さにあることをしめし、AとBは同時に地面に落下することを証明せよ。
(3)　ボールBからボールAを見たとき、ボールAは等速直線運動をしていることを証明せよ。
(4)　ボールAの軌道は投げた位置を頂点とする放物線であることを証明せよ。
(5)　この物体は$\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$秒後に原点より$v_0\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$だけ離れた位置に落下することを示せ。

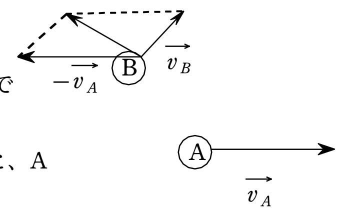
⑥　直線運動に関しては等加速度直線運動において平均速度は最初の速度と最後の速度を足して2で割ったものである。すなわち、$\overline{v}=\dfrac{v_0+v}{2}$である。（等加速度直線運動の項を参照）　$\vec{v}=\vec{v_0}+\vec{a}t$において、$\vec{a}t$の部分は等加速度直線運動を表している。よって、この部分の平均速度は$\dfrac{1}{2}\vec{a}t$となる。$\vec{v_0}$は常に一定であるから、$\vec{v}$の平均速度は$\overline{\vec{v}}=\vec{v_0}+\dfrac{1}{2}\vec{a}t$となる。$\vec{x}=\overline{\vec{v}}t=\left(\vec{v_0}+\dfrac{1}{2}\vec{a}t\right)t=\vec{v_0}t+\dfrac{1}{2}\vec{a}t^2$となる。

⑦　$\vec{x}=\vec{v_0}t+\dfrac{1}{2}\vec{a}t^2$より、$\vec{a}\cdot\vec{x}=\vec{a}\cdot\left(\vec{v_0}t+\dfrac{1}{2}\vec{a}t^2\right)$。これに$\vec{a}=\dfrac{\vec{v}-\vec{v_0}}{t}$を代入すると、

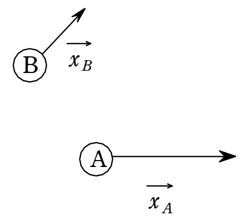
$$\vec{a}\cdot\vec{x}=\frac{\vec{v}-\vec{v_0}}{t}\cdot\left(\vec{v_0}t+\frac{1}{2}\frac{\vec{v}-\vec{v_0}}{t}t^2\right)=\frac{\left|\vec{v}\right|^2-\left|\vec{v_0}\right|^2}{2}$$

　よって、$\left|\vec{v}\right|^2-\left|\vec{v_0}\right|^2=2\vec{a}\cdot\vec{x}$となる。

解説
速度の基準は絶対的なものでなく、それぞれが都合が良いように勝手に決めてよい。
図は地上が動いていないと決めたときの速度である。Aが動いていないときめると、Aから見ると、周りの景色は逆方向に$-\overrightarrow{v_A}$で動いているように見える。
　よって、Bの速度に景色の速度を加えると、Aからみた速度になる。



$\overrightarrow{v_{AB}}=\overrightarrow{v_B}+\left(-\overrightarrow{v_A}\right)=\overrightarrow{v_B}-\overrightarrow{v_A}$
この考え方は相対変位や相対加速度でも使える。
　物体Aが右方向に$\overrightarrow{x_A}$動いたとすると、物体Aから見ると、周りの景色が左方向に$-\overrightarrow{x_A}$動いたことになる。

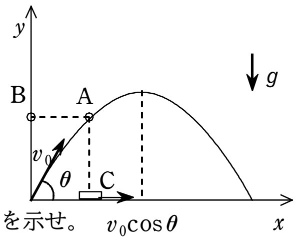


　よって、Aから見た、Bの変位$\overrightarrow{x_{AB}}$は
　$\overrightarrow{x_{AB}}=\overrightarrow{x_B}+\left(-\overrightarrow{x_A}\right)=\overrightarrow{x_B}-\overrightarrow{x_A}$
　相対加速度も同様にして
　$\overrightarrow{a_{AB}}=\overrightarrow{a_B}-\overrightarrow{a_A}$
　が成り立つ。相対変位・相対速度・相対加速度はすべて同じ形式をしている。

解説
(1)　投げてからt秒後の速度を$\vec{v}=(v_x,v_y)$とし、初速度を$\vec{v_0}=(v_0,0)$とする。
　加速度$\vec{a}=(0,-g)$であるから、$\vec{v}=\vec{v_0}+\vec{a}t$を用いて、
　$(v_x,v_y)=(v_0,0)+(0,-g)t$が成立。
　各成分ごとに等式を立てると、　$\begin{cases} v_x=v_0 \\ v_y=-gt \end{cases}$
　これにより、速度の水平成分v_xは常に初速度v_0と等しくなり、一定である。
　一般に
　「放物運動における水平方向の運動は等速直線運動と同じである。」
(2)　ボールAのt秒後の座標を(x,y)とすると、ボールAの変位は投げた点の座標が$(0,h)$であるため、$\vec{x}=(x,y)-(0,h)=(x,y-h)$　となる。
　$\vec{x}=\vec{v_0}t+\dfrac{1}{2}\vec{a}t^2$に代入して、
　$(x,y-h)=(v_0,0)t+\dfrac{1}{2}(0,-g)t^2$となる。
　各成分ごとに等式を立てると、$\begin{cases} x=v_0t \\ y-h=-\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$
　よって、ボールAのt秒後の高さは$y=h-\dfrac{1}{2}gt^2$となる。
　一方自由落下の式よりボールBはt秒間に$\dfrac{1}{2}gt^2$だけ落下するので、t秒後の高さは$h-\dfrac{1}{2}gt^2$とあらわされ、ボールAと同じ式になる。よって、ボールBとボールAは常に同じ高さにあるといえる。
　常に同じ高さにあるのであるから、高さが0（地面に落下するとき）になるのも同時である。
　一般に
　「水平投射の鉛直方向の運動は自由落下と同じ運動である。」
　といえる。
(3)　ボールAの速度ベクトルは$\overrightarrow{v_A}=\vec{v_0}+\vec{a}t=(v_0,0)+(0,-g)t=(v_0,-gt)$
　ボールBの速度ベクトルはy成分のみなので$\overrightarrow{v_B}=(0,-gt)$

14.

放物運動



初速度v_0で角度θの方向にボールAを斜方投射すると同時に鉛直上向きに初速度$v_0\sin\theta$でボールBを鉛直投射した。さらに、ボールA、Bを投げると同時に台車Cを水平に等速$v_0\cos\theta$で走らせた。

(1)　ボールAは常に台車の真上にあることを示せ。

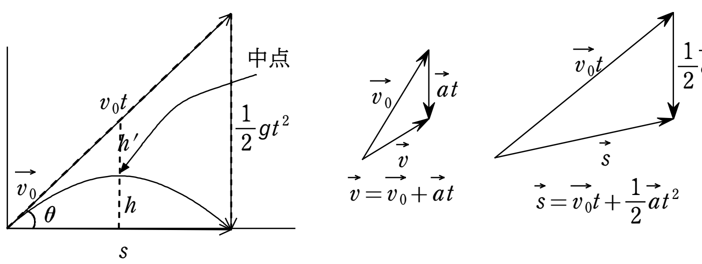
(2)　ボールBとボールAは常に同じ高さにあることを示せ。

(3)　最高点の高さが$\dfrac{v_0{}^2 sin^2\theta}{2g}$であることを導け。

(4)　水平到達距離が$\dfrac{v_0{}^2 sin2\theta}{g}$であることを導け。

(5)　この放物線の式が$y=xtan\theta-\dfrac{1}{2}\dfrac{g}{v_0{}^2 cos^2\theta}x^2$であることを導け。

(6)　$\vec{v}=\vec{v_0}+\vec{a}t$　及び　$\vec{s}=\vec{v_0}t+\dfrac{1}{2}\vec{a}t^2$はベクトル式でもある。図を参考にして、最高点の高さ及び水平到達距離を求めよ。



ボールBからボールAを見た相対速度は$\vec{v}=\vec{v_A}-\vec{v_B}=(v_0,-gt)-(0,-gt)=(v_0,0)$となり、一定速度となる。つまり、等速直線運動である。

(4)　(2)より、t秒後のAの位置は$\begin{cases} x=v_0t \\ y-h=-\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$

この2式よりtを消去すると、$y=h-\dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{x}{v_0}\right)^2=-\dfrac{g}{2v_0{}^2}x^2+h$

この式は頂点を$(0,h)$とする上に凸の放物線である。頂点の位置座標$(0,h)$は投げた位置の座標である。

(5)　落下地点のy座標は0であるから$y-h=-\dfrac{1}{2}gt^2$に代入して$h=\dfrac{1}{2}gt^2$。これより、

$t=\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$。これを$x=v_0t$に代入すると、$x=v_0\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$となる。

解説

(1)　重力の加速度は鉛直下向きである。（重力が下向きに作用するために下向きにしか速度は変化しない）。そのために水平方向の速度は変化しない。ボールAも台車Cもともに同じ初速度$v_0\cos\theta$で走らせたのであるから、水平方向の位置（x座標）は常に同じである。よって、ボールAは常に台車の真上にあることになる。そのため、落下点に達するとき、ボールは台車の上に落ちてくることになる。

(2)　ボールAのt秒後の座標を(x,y)とし、原点$(0,0)$からボールを投げると、その変位ベクトル$\vec{s}$は$\vec{s}=(x,y)-(0,0)=(x,y)$となる。

また、初速度ベクトルは$\vec{v_0}=(v_0cos\theta,v_0sin\theta)$である。重力による加速度のベクトルは水平方向成分は0で鉛直下向きに$-g$であるから、$\vec{a}=(0,-g)$となる。

よって、$\vec{s}=\vec{v_0}t+\dfrac{1}{2}\vec{a}t^2$に代入すると、$(x,y)=(v_0\cos\theta,v_0\sin\theta)t+\dfrac{1}{2}(0,-g)t^2$

となる。各成分ごとに計算すると、

$\begin{cases} x=v_0\cos\theta\cdot t \\ y=v_0\sin\theta\cdot t-\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$

となる。

また、初速度$v_0\sin\theta$で鉛直にボールを投げた場合のt秒後の高さy'は加速度$a=-g$を$s=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$に代入して、$y'=v_0\sin\theta\cdot t-\dfrac{1}{2}gt^2$となる。

この式を比較すれば$y=y'$であることがわかる。

よって、常に同じ高さにあるといえる。

一般に放物運動の各要素（位置、変位、速度、加速度）の鉛直成分は、初速度の鉛直成分と同じ大きさの初速度で真上にボールを投げたときの各要素と同じである。

(3)　初速度を分解すると、$\vec{v_0}=(v_0cos\theta,v_0sin\theta)$、

また、最高点での速度の鉛直成分は0であるから、

$v=v_0+at$より、$0=v_0sin\theta-gt$　よって、$t=\dfrac{v_0sin\theta}{g}$

$s=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$より、$y=v_0\dfrac{v_0sin\theta}{g}-\dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{v_0sin\theta}{g}\right)^2=\dfrac{v_0{}^2sin^2\theta}{2g}$

<別解１>

$s=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$より、$y=v_0\sin\theta\cdot t-\dfrac{1}{2}gt^2$

最高点では$\dfrac{dy}{dt}=0$であるから、$y'=v_0\sin\theta-gt=0$　これよりtを求める。以後同様

<別解２>

数学より$y=ax^2+bx+c$の頂点の座標は$\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{-b^2+4ac}{2a}\right)$である。

$a=-\dfrac{1}{2}g$、$b=v_0\sin\theta$、$c=0$と考えると、

$t=\dfrac{v_0\sin\theta}{g}$、$y=\dfrac{v_0{}^2\sin^2\theta}{g}$となる。

(4)　水平到達時間は最高点までの時間の2倍であるから、

$t=\dfrac{2v_0sin\theta}{g}$　よって、$x=v_0cos\theta\dfrac{2v_0sin\theta}{g}=\dfrac{v_0{}^2sin2\theta}{g}$

(5)　$x=v_0cos\theta\cdot t$、$y=v_0sin\theta\cdot t-\dfrac{1}{2}gt^2$より、

$t=\dfrac{x}{v_0cos\theta}$　これをyに代入すると、

$y=xtan\theta-\dfrac{1}{2}\dfrac{g}{v_0{}^2cos^2\theta}x^2$

15.

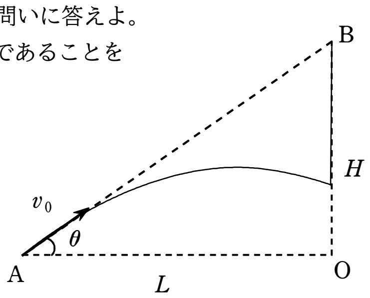
モンキーハンティング

A点からB点にある静止している物体めがけてボールを投げると同時にBは自由落下した。このことについて以下の問いに答えよ。

(1)　物体Bから物体Aを見た相対速度は一定であることを証明せよ。

(2)　初速度が正確にBのほうを向いていれば必ずAとBは衝突することを証明せよ。

(3)　この２物体が空中で衝突するためには $v_0{}^2 > \dfrac{L^2+H^2}{2gH}$ の条件を満たしておけばよいことを証明せよ。

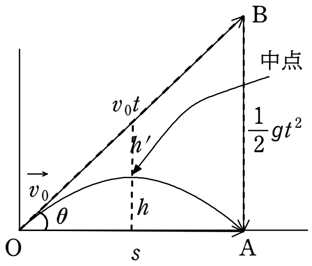


(6)　点Oから初速度の方向に線分を延長し落下点Aから上に垂線を引き、その交点をBとする。

このとき、$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{v_0}t$であり、その長さは$v_0t$である。

$\overrightarrow{BA}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{g}t^2$であり、その長さは$\dfrac{1}{2}gt^2$である。

∠AOB＝θであることを利用して



$$sin\theta=\frac{BA}{OB}=\frac{\frac{1}{2}gt^2}{v_0t}=\frac{gt}{2v_0}\quad \text{よって、}t=\frac{2v_0sin\theta}{g}$$

$$s=OB\cos\theta=v_0tcos\theta=\frac{2v_0{}^2sin\theta cos\theta}{g}$$

$$h=\frac{1}{4}v_0tsin\theta=\frac{v_0{}^2sin^2\theta}{2g}$$

hは$\dfrac{1}{2}gt^2$の$\dfrac{1}{4}$となる。

これは最高点での落下距離h'は時間が$\dfrac{t}{2}$であるから、

$h'=\dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{t}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2}gt^2$となるからである。つまり、$h=h'$で最高点は中点である。

直接ベクトルで計算するのは一般的に速く答えが出せる。しかし図形の性質を利用するために機械的にできるわけではないので注意が必要。

解説

(1)　物体Aを速度ベクトルであらわすと、$\overrightarrow{v_A}=(v_0cos\theta, v_0sin\theta-gt)$

物体Bを速度ベクトルであらわすと、$\overrightarrow{v_B}=(0,-gt)$

よって相対速度は$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v_A}-\overrightarrow{v_B}=(v_0cos\theta, v_0sin\theta)$となり、時間$t$が含まれないため一定となる。

(2)　初速度が正確にBの方を向くということは$\tan\theta=\dfrac{H}{L}$が成り立つということである。

物体Aの位置を原点とすると、t秒後のAの座標は

$x_A=v_0\cos\theta\cdot t\quad y_A=v_0\sin\theta\cdot t-\dfrac{1}{2}gt^2$

また、t秒後のBの座標は

$x_B=L\qquad y_B=H-\dfrac{1}{2}gt^2$

となる。

衝突するということは同時刻に同位置にあるということであるから、t秒後のx座標、y座標ともに等しくなればよい。

x座標　　$v_0\cos\theta\cdot t=L$

y座標　　$v_0\sin\theta\cdot t-\dfrac{1}{2}gt^2=H-\dfrac{1}{2}gt^2$

x座標の式よりtを求めると、$t=\dfrac{L}{v_0\cos\theta}$

これをy座標の式に入れると、$y_A-y_B=v_0\sin\theta\cdot t-H=L\tan\theta-H$

$\tan\theta=\dfrac{H}{L}$より、この式の値は０となる。

よって、$t=\dfrac{L}{v_0\cos\theta}$秒後、$x$座標と$y$座標の値は等しくなるのでAとBは衝突するといえる。

(3)　空中で衝突するためには衝突地点のy座標が正なら良い。

$$y_B=H-\frac{1}{2}gt^2=H-\frac{1}{2}g\frac{L^2}{v_0{}^2\cos^2\theta}=H-\frac{L^2}{2gv_0{}^2}(1+\tan^2\theta)$$

$$=\frac{2gv_0{}^2H-L^2-H^2}{2gv_0{}^2}>0$$

よって、　　$v_0{}^2>\dfrac{L^2+H^2}{2gH}$